Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ hat den Tiefpunkt $(0\,|\,0)$ und den Wendepunkt $\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{5}{4}\right)$.

a Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g. — 6

(zur Kontrolle: $g(x)=\frac{5}{2}x^2\cdot(2x+3)$)

b Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1{,}5\leq x\leq 0{,}5$ in ein Koordinatensystem ein. — 2

c Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet. — 3

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x)=5x^2\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.

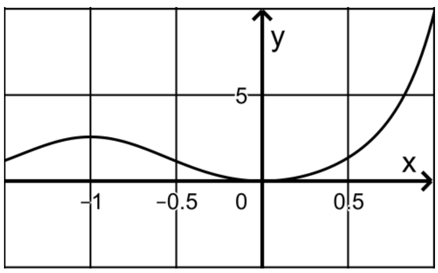


Abb. 1

d Geben Sie den Grenzwert von h für $x\to-\infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt. — 2

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

e Zeigen Sie, dass $h'(x)=10x\cdot\left(1+x^3\right)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h ist. 3

f Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h. 3

g Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1\leq x\leq 0$. 3

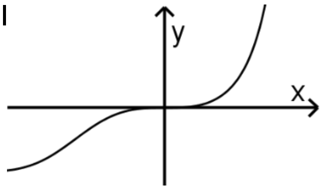
h Es gilt $\left(h(1)-g(1)\right)\cdot\left(h(2)-g(2)\right)<0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1<x<2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

i Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung 1 die folgende Aussage: 3

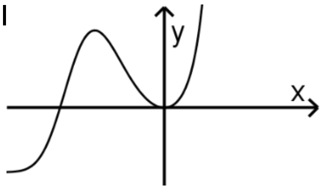
Für $-1{,}5\leq x\leq 1$ ändert sich beim Graphen jeder Stammfunktion von h genau einmal das Krümmungsverhalten.

j Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion H mit $H(x)=\int_0^x h(t)\,dt$ darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 3

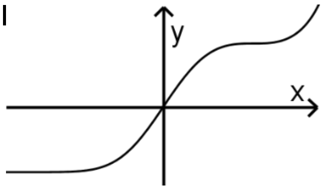
I



II



III



2 Der Luftdruck wird in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel modellhaft mithilfe der Funktion p mit $p(x)=1000e^{-\frac{x}{8}}$ und $x\in\mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist x die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern und $p(x)$ der Luftdruck in Hektopascal (hPa). Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von p.

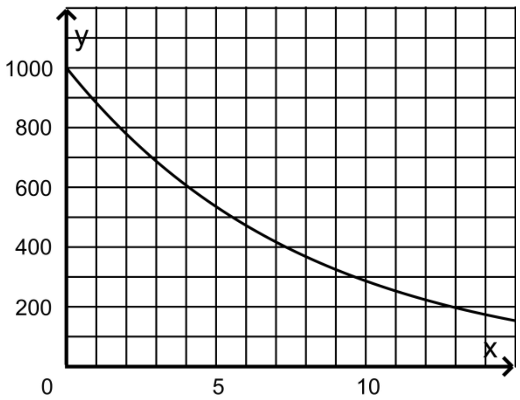


Abb. 2

a Bestimmen Sie grafisch die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 2. 2

b Zeigen Sie, dass eine Verringerung des Luftdrucks um die Hälfte auf eine Höhenänderung zurückzuführen ist, die unabhängig von der Ausgangshöhe ist. Geben Sie diese Höhenänderung an. 3

c Bestimmen Sie die lokale Änderungsrate des Luftdrucks in einer Höhe von 1,785 km. 3

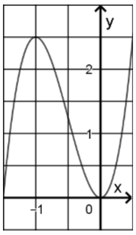
Laut einer Faustregel sinkt der Luftdruck um 1 hPa, wenn die Höhe um 10 m zunimmt.

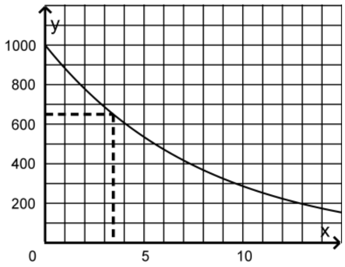
d Eine Gruppe von Bergsteigern misst in einer Höhe von 1785 m einen Luftdruck von 800 hPa. Bestimmen Sie die Höhe, in der sich die Bergsteiger einige Zeit später befinden, wenn die Faustregel dafür 2785 m liefert. 4

e	Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, die ausgehend von einem Luftdruck von 800 hPa in einer Höhe von 1785 m für jeden anderen Luftdruck (in hPa) die der Faustregel entsprechende Höhe (in km) liefert.	3
f	Geben Sie die Wertemenge des Terms $-8 \cdot \ln\frac{u}{1000}$ für $0 < u \leq 1000$ an. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachzusammenhang.	4
		50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	Der gesuchte Term hat die Form $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Da $(0\,\vert\,0)$ Tiefpunkt ist, gilt $c = d = 0$. Damit: $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $g''(x) = 6ax + 2b$ Mit $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 2b = a + 10$ ergibt sich: $g''\left(-\frac{1}{2}\right) = -3a + a + 10 = 0 \Leftrightarrow a = 5$, d. h. $b = \frac{15}{2}$	6
	b		2
	c	$\tan\alpha = g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}$, d. h. $\alpha \approx -75°$ Die Größe des Winkels beträgt etwa 75°.	3
	d	$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$, d. h. der Graph von h nähert sich für $x \to -\infty$ der x-Achse beliebig nahe an.	2
	e	$h'(x) = 10x \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 5x^2 \cdot 2x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} = 10x \cdot \left(1 + x^3\right) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$	3
	f	$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$, $h(-1) = 5e^{-\frac{2}{3}}$, $h(0) = 0$ Damit: $\left(-1\,\vert\,5e^{-\frac{2}{3}}\right)$, $(0\,\vert\,0)$	3
	g	$\frac{g(0)-g(-1)-(h(0)-h(-1))}{h(0)-h(-1)} \approx -0{,}026$, d. h. die Abweichung beträgt etwa 2,6 %.	3
	h	Da das Produkt negativ ist, haben die beiden Differenzen unterschiedliche Vorzeichen. Damit haben die Graphen von g und h im angegebenen Bereich mindestens einen Schnittpunkt.	3

	i	Die Aussage ist falsch. Begründung: Das Krümmungsverhalten des Graphen einer Stammfunktion von h ändert sich für einen Wert von x, wenn der Graph von h dort einen Extrempunkt hat. Der Graph von h hat für $-1{,}5 \le x \le 1$ mehr als einen Extrempunkt.	3
	j	Es gilt $H'(x) = h(x)$. Da $h(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $h(0) = 0$, ist der Graph von H monoton steigend und dessen Steigung für $x = 0$ null. Dies gilt nur für den Graphen I.	3
2	a	 Die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt, ist etwa 3,4 km.	2
	b	$p(x+d) = \frac{1}{2} \cdot p(x) \Leftrightarrow 1000e^{-\frac{x+d}{8}} = 500e^{-\frac{x}{8}} \Leftrightarrow e^{-\frac{d}{8}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d = 8 \cdot \ln 2$ Die Höhenänderung beträgt etwa 5,5 km.	3
	c	$p'(x) = -125e^{-\frac{x}{8}}$ $p'(1{,}785) = -125e^{-\frac{1{,}785}{8}} \approx -100$, d. h. die Änderungsrate beträgt etwa $-100\,\frac{\text{hPa}}{\text{km}}$.	3
	d	$1000e^{-\frac{x}{8}} = p(1{,}785) - 100$ liefert $x = -8 \cdot \ln\frac{p(1{,}785)-100}{1000} \approx 2{,}85$. Die Bergsteiger befinden sich in einer Höhe von etwa 2850 m.	4
	e	Die Gleichung hat die Form $y = -0{,}01x + n$. Da der Punkt $(800\,\vert\,1{,}785)$ auf dem Graphen der Funktion liegt, ergibt sich: $1{,}785 = -0{,}01 \cdot 800 + n \Leftrightarrow n = 9{,}785$	3
	f	Wertemenge: $\mathbb{R}_0^+$ Mit dem Term kann im Modell für jeden Luftdruck in Hektopascal die zugehörige Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern berechnet werden.	4
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	6	II	II			II			X	
b	2				I			X		
c	3		I			II	I		X	
d	2				I	I	I	X		
e	3					II			X	
f	3					I		X		
g	3					II	I		X	

h	3	III	III				II			X
i	3	III			II		II			X
j	3	III	III		II					X
2 a	2			I	I			X		
b	3		III	II		II				X
c	3			I		I		X		
d	4		III	II		II				X
e	3			II		II	II		X	
f	4	II		II		I	I		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.