Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

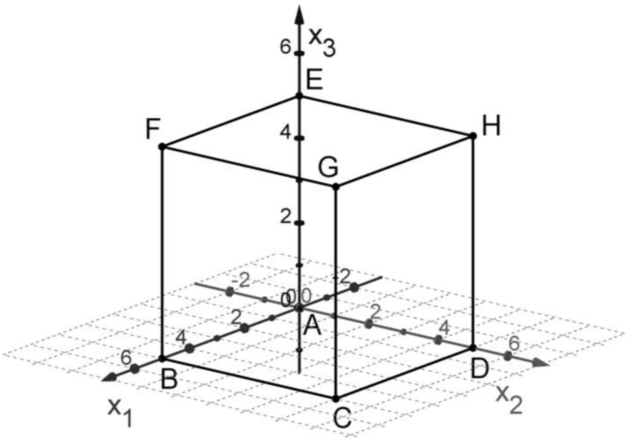
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

BE

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



a Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein. — 2

b Zeigen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. — 3

c Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform. — 4

(zur Kontrolle: $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$)

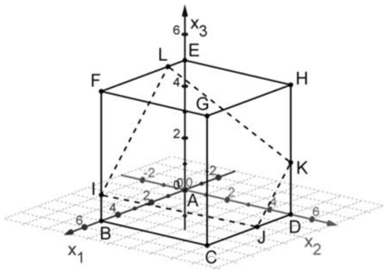
d Spiegelt man T an der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 2{,}5$, so erhält man die Ebene T'. Zeigen Sie, dass T' durch die Gleichung $-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich T und T' schneiden. — 6

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

e	Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Strecke $\overline{FG}$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 sein kann.	4
	Betrachtet wird die Schar der Geraden $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$.	
f	Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$ liegt.	2
g	Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und T' zur betrachteten Schar gehört.	4
		25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a		2
b	$\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind kollinear. Zudem gilt $\left\lvert\overrightarrow{IJ}\right\rvert = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \left\lvert\overrightarrow{KL}\right\rvert$.	3
c	$T : \vec{x} = \overrightarrow{AI} + r \cdot \overrightarrow{IJ} + s \cdot \overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ liefert das Gleichungssystem: I $x_1 = 5 - 3r - 2s$ II $x_2 = 5r$ III $x_3 = 1 - r + 2s$ Aus II ergibt sich $r = \frac{1}{5}x_2$ und damit aus III $s = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{2}$. Mit I ergibt sich: $x_1 = 5 - \frac{3}{5}x_2 - x_3 - \frac{1}{5}x_2 + 1 \Leftrightarrow 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$	4

d	Spiegelt man I, J und K an der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 2{,}5$, so erhält man die Punkte $I'(0\,|\,0\,|\,1)$, $J'(3\,|\,5\,|\,0)$ und $K'(5\,|\,5\,|\,2)$. Es gilt $-5\cdot 0 + 4\cdot 0 + 5\cdot 1 - 5 = 0$, $-5\cdot 3 + 4\cdot 5 + 5\cdot 0 - 5 = 0$ und $-5\cdot 5 + 4\cdot 5 + 5\cdot 2 - 5 = 0$. $\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix}\right\|} = \frac{8}{33}$ liefert $\varphi \approx 76°$.	6
e	Koordinaten der Spitze S: $(5\,|\,t\,|\,5)$, $t \in [0;5]$ Abstand von S zu T: $\frac{5\cdot 5+4t+5\cdot 5-30}{\sqrt{66}} = \frac{4t+20}{\sqrt{66}}$ $\frac{4t+20}{\sqrt{66}} = 2$ liefert $t \approx -0{,}9$, d. h. die Höhe der Pyramide kann nicht 2 sein.	4
f	Eine Gerade liegt genau dann in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$, wenn für alle Punkte dieser Gerade $x_3 = 3{,}5$ gilt. Wegen $\frac{2}{a} \neq 0$ ist dies für keine Gerade der Schar der Fall.	2
g	Die Koordinaten des Punkts $(2{,}5\,|\,0\,|\,3{,}5)$ erfüllen die Gleichungen von T und T'. Für $a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\begin{pmatrix}0\\-10a\\\frac{2}{a}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -40a + \frac{10}{a} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ $\begin{pmatrix}0\\-5\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix} = 0$, d. h. die Schnittgerade gehört zur Schar.	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2				I			X		
b	3	I	I			I		X		
c	4					II	I		X	
d	6		II		II	II			X	
e	4	II	III			III				X
f	2	II			II		I		X	
g	4		III		II	II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.