

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

1 Aufgabe

Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualitätsstufe A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, eines der Qualitätsstufe B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %.

Ein Gemüseanbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, davon 65 % der Qualitätsstufe A. Alle gekauften Samenkörner werden gesät.

- a** Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 3
- b** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten keimenden Samenkorn um ein Samenkorn der Qualitätsstufe B handelt. 3
- c** Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: 3
- E: „Von 200 gesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe B keimen genau 140.“
- F: „Von 200 gesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe B keimen mehr als 130 und weniger als 150.“

- d** Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang: 2

$$1 - \left(\sum_{i=0}^{120} \binom{200}{i} \cdot 0,7^i \cdot 0,3^{200-i} + \sum_{i=160}^{200} \binom{200}{i} \cdot 0,7^i \cdot 0,3^{200-i} \right)$$

- e** Der Preis pro Samenkorn beträgt für die Qualitätsstufe A 17 Cent und für die Qualitätsstufe B 12 Cent. Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Gurkenpflanze heran. Dabei besteht das Risiko, dass die Pflanze aufgrund von Wettereinflüssen oder Schädlingen keine Früchte trägt. Dieses Risiko beträgt für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe A 15 % und für alle gekeimten Samenkörner der Quali- 6

BE

tätsstufe B 25 %. Die Anzahl der Gurken, die pro fruchttragender Pflanze im Mittel geerntet werden können, ist unabhängig von der Qualitätsstufe der Samenkörner. Der Anbaubetrieb verkauft alle geernteten Gurken zum gleichen Preis. Prüfen Sie, ob es für den Anbaubetrieb finanziell sinnvoll wäre, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken.

- f Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B durch eine Weiterentwicklung auf mehr als 70 % erhöht habe. Deshalb soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B ist höchstens 70 %.“ auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Dazu werden nach der Weiterentwicklung 100 Samenkörner der Qualitätsstufe B gesät. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des Tests. 5

- g Für eine Qualitätsstufe C wird vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns 60 % beträgt. Es werden 50 Samenkörner gesät; davon keimen 27. 3

Eine Wahrscheinlichkeit von 60 % ist bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % mit der angegebenen Anzahl keimender Samenkörner verträglich, wenn 27 im Intervall $[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma]$ liegt. Dabei ist μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung einer $B_{50;0,6}$ -verteilten Zufallsgröße.

Untersuchen Sie, ob die vermutete Wahrscheinlichkeit von 60 % bei der angegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit damit verträglich ist, dass 27 Samenkörner keimen.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	<p>A: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn gehört zur Qualitätsstufe A.“ B: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn gehört zur Qualitätsstufe B.“ K: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn keimt.“</p>	3
b	$\frac{0,35 \cdot 0,7}{0,65 \cdot 0,95 + 0,35 \cdot 0,7} \approx 28,4\%$	3
c	$P(E) \approx 6,1\%, P(F) \approx 0,9305 - 0,0728 \approx 85,8\%$	3
d	Mit dem Term kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass von 200 gesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe B mindestens 121 und höchstens 159 keimen.	2

e	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus einem Samenkorn eine fruchttragende Pflanze heranwächst, beträgt für die Qualitätsstufe A $0,95 \cdot 0,85$, für die Qualitätsstufe B $0,7 \cdot 0,75$. Damit entstehen pro Pflanze für die Qualitätsstufe A Kosten in Höhe von $\frac{17\text{ct}}{0,95 \cdot 0,85} \approx 21\text{ct}$, für die Qualitätsstufe B in Höhe von $\frac{12\text{ct}}{0,7 \cdot 0,75} \approx 23\text{ct}$. Für den Anbaubetrieb wäre es finanziell also nicht sinnvoll, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken.	6
f	Z: Anzahl der keimenden Samenkörner $P_{0,7}^{100}(Z > k) \leq 5\%$ Keimen mehr als 77 Samenkörner, so wird die Nullhypothese abgelehnt.	5
g	$\mu = 50 \cdot 0,6$, $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,6 \cdot 0,4}$, $\mu - 1,96\sigma \approx 23,2$, $\mu + 1,96\sigma \approx 36,8$ Damit ist die vermutete Wahrscheinlichkeit bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % mit der Anzahl der keimenden Samenkörner verträglich.	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3					X			I	I		I	X		
b	3					X		II	II		I			X	
c	3					X			I		I		X		
d	2	X				X	III	III	III						X
e	6					X	III	III				II			X
f	5	X			X	X			II		II	II		X	
g	3		X		X	X					II	II		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.