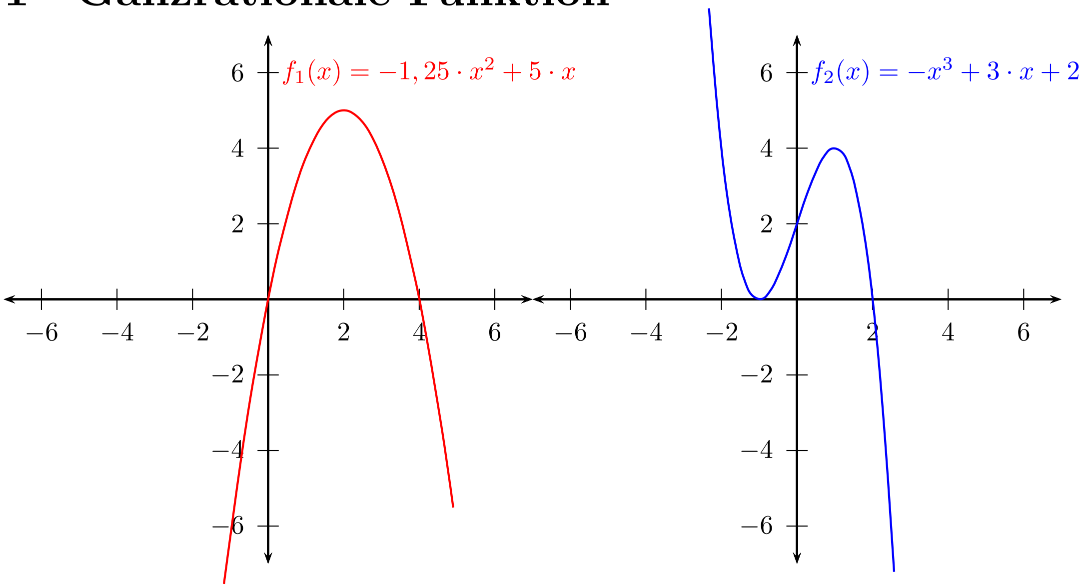
Kurvendiskussion
Ganzrationale Funktion
Aufgaben und Lösungen

http://www.fersch.de

7. September 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Ganzrationale Funktion



Formen der Polynomfunktion - ganzrationalen Funktion

Allgemeine Polynomfunktion

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

Quadratische Polynomfunktion vom Grad 2

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Kubische Polynomfunktion vom Grad 3

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Biquadratische Polynomfunktionen vom Grad 4

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Faktorisierte Polynomfunktion

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...$

$x_1, x_2, x_3...$ Nullstellen

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$
$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$

Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertebereich:

- höchster Exponent ungerade:
  $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- höchster Exponent gerade:
  $\mathbb{W} =$ [absoluter Tiefpunkt;∞[
  $\mathbb{W} =]-\infty$;absoluter Hochpunkt]

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$
absoluter Hochpunkt:(2/5) höchster Exponent 2
Definitions- und Wertebereich:
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-\infty, 5[$

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$
höchster Exponent 3 (ungerade Zahl)
Definitions- und Wertebereich:
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Grenzwert - Verhalten im Unendlichen

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$

Das Vorzeichen des Glieds mit der höchsten Potenz und der Grad des Polynoms bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
+	ungerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
-	gerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$
+	ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$
$\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$
$\lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung

$f(x)$ hat nur ungerade Exponenten oder $f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse

$f(x)$ hat nur gerade Exponenten oder $f(-x) = f(x)$

$f_1(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
$f_2(-x) = -1 \cdot 1(-x)^3 + 3 \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

Nullstellen

Nullstellen - Schnittpunkte mit der x-Achse

$f(x) = 0$

siehe Algebra - Gleichungen

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = 0$

$x(-1\frac{1}{4}x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -1\frac{1}{4}x + 5 = 0$

$-1\frac{1}{4}x + 5 = 0 \qquad / -5$

$-1\frac{1}{4}x = -5 \qquad / : (-1\frac{1}{4})$

$x = \dfrac{-5}{-1\frac{1}{4}}$

$x = 4$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(-x^3 & & +3x & +2 &) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\
-(-x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
& x^2 & +3x & +2 & \\
& -(x^2 & +x) & & \\
\hline
& & 2x & +2 & \\
& & -(2x & +2) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm 3}{-2}$

$x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-1-3}{-2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei ganzrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+ f(x)>0 Graph oberhalb der x-Achse

- f(x)<0 Graph unterhalb der x-Achse

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$

	$x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

<u>oberhalb der x-Achse</u>

$x \in]0;4[\quad f(x) > 0$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) < 0$

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

<u>oberhalb der x-Achse</u>

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;2[\quad f(x) > 0$

<u>unterhalb der x-Achse</u>

$x \in]2;\infty[\quad f(x) < 0$

Ableitung

Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen, vom Exponenten 1 abziehen:
$f\left(x\right) = ax^n \to f'\left(x\right) = nax^{n-1}$
Die erste Ableitung $f'\left(x\right)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.
Die zweite Ableitung $f''\left(x\right)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$f_1\left(x\right) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$
$f_1'\left(x\right) = -2\frac{1}{2}x + 5$
$f_1''\left(x\right) = -2\frac{1}{2}$
$f_1'''\left(x\right) = 0$

$f_2\left(x\right) = -x^3 + 3x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$
$f_2'\left(x\right) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$
$f_2''\left(x\right) = -6x = -6x$
$f_2'''\left(x\right) = -6$

Extremwerte

Notwendige Bedingung: 1. Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen
Hinreichende Bedingung: Einsetzen der Nullstellen x_0 in die 2. Ableitung

- $f''\left(x_0\right) > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei x_0.
- $f''\left(x_0\right) < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum bei x_0.
- $f''\left(x_0\right) = 0 \wedge f'''\left(x_0\right) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5 = 0$
$-2\frac{1}{2}x + 5 = 0 \qquad / - 5$
$-2\frac{1}{2}x = -5 \qquad / : \left(-2\frac{1}{2}\right)$
$x = \frac{-5}{-2\frac{1}{2}}$
$x = 2$
$f_1''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/5)}$

$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = 0$
$-3x^2 + 3 = 0 \qquad / - 3$
$-3x^2 = -3 \qquad / : (-3)$
$x^2 = \frac{-3}{-3}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$f_2''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1/0)}$
$f_2''(1) = -6$
$f_2''(1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1/4)}$

Monotonie

Erste Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen.
Nullstelle x_1 in die Vorzeichentabelle eintragen.
Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen.
Vorzeichentabelle mit $f'(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	steigend	0	fallend

Vorzeichenwechsel
von + nach - $\Rightarrow$ Lokales Maximum bei x_1
von - nach + $\Rightarrow$ Lokales Minimum bei x_1
von + nach + $\Rightarrow$ Terrassenpunkt bei x_1
von - nach - $\Rightarrow$ Terrassenpunkt bei x_1

$f_1'\left(x\right) = -2\frac{1}{2}x + 5$

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

streng monoton steigend
$x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) > 0$
streng monoton fallend
$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0$
$f_2'(x) = -3x^2 + 3$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

streng monoton steigend
$x \in]-1; 1[\quad f'(x) > 0$
streng monoton fallend
$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f'(x) < 0$

Wendepunkt

Notwendige Bedingung: 2. Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen
Hinreichende Bedingung: Einsetzen der Nullstellen x_1 in die 3. Ableitung

- $f'''(x_1) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei x_1.
- $f'''(x_1) = 0 \Rightarrow$ Kein Wendepunkt.

$f_1'''(x) = 0$
kein Wendepunkt

$f_2''(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$
$f'''(0) = 2$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:(0/2)

Krümmung

Zweite Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen.
Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen.
Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.
Vorzeichentabelle mit $f''(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	links gekrümmt	0	rechts gekrümmt

Vorzeichenwechsel
von + nach - $\Rightarrow$ Wendepunkt bei x_1
von - nach + $\Rightarrow$ Wendepunkt bei x_1
von + nach + $\Rightarrow$ Flachpunkt bei x_1
von - nach - $\Rightarrow$ Flachpunkt bei x_1

$f_2''(x) = -6x$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt
$x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Stammfunktion von f(x)

Stammfunktionen bildet man durch: zum Exponent 1 addieren, durch den Exponenten dividieren:
$f(x) = ax^n \rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$
Unbestimmtes Integral // $F(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c$

$F_1(x) = \int(-1\frac{1}{4}x^2 + 5x)dx = -\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$
$F_2(x) = \int\left(-x^3 + 3x + 2\right)dx = -\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

Bestimmtes Integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

$A_1 = \int_0^4 \left(-1\frac{1}{4}x^2 + 5x\right)dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$
$= \left(-\frac{5}{12}\cdot 4^3 + 2\frac{1}{2}\cdot 4^2\right) - \left(-\frac{5}{12}\cdot 0^3 + 2\frac{1}{2}\cdot 0^2\right)$
$= \left(13\frac{1}{3}\right) - (0) = 13\frac{1}{3}$
$A_2 = \int_{-1}^2 \left(-x^3 + 3x + 2\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2$
$= \left(-\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 1\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + 1\frac{1}{2}\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)\right)$
$= (6) - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6\frac{3}{4}$

2 Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$

2.1 Aufgaben

(1) $f(x) = 2x^2$
(2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$
(3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$
(4) $f(x) = -2x^2 - 8x$
(5) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$
(6) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$
(7) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3$
(8) $f(x) = -2x^2 + 4$
(9) $f(x) = x^2 - 2$
(10) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$
(11) $f(x) = x^2 - 4x + 7$
(12) $f(x) = -x^2 + 4x - 7$
(13) $f(x) = 2x^2 + 4x$
(14) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$
(15) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$
(16) $f(x) = x^2 + 6x - 2$
(17) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5$
(18) $f(x) = -\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49}$
(19) $f(x) = -\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81}$
(20) $f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$
(21) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x$
(22) $f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 5$
(23) $f(x) = 12x^2 + 12x$
(24) $f(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25}$
(25) $f(x) = -\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25}$
(26) $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8}$
(27) $f(x) = \frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49}$
(28) $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9}$
(29) $f(x) = -2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9}$
(30) $f(x) = -\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x$
(31) $f(x) = \frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49}$
(32) $f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x$
(33) $f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15$
(34) $f(x) = 4x^2 - 8x$
(35) $f(x) = -\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49}$
(36) $f(x) = \frac{8}{27}x^2 + 2\frac{2}{3}x$
(37) $f(x) = \frac{20}{81}x^2 + 2\frac{2}{9}x$
(38) $f(x) = 1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25}$

2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 2x^2$
$f'(x) = 4x$
$f''(x) = 4$
$F(x) = \int (2x^2)dx = \frac{2}{3}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(2)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [2 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [2 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2$
$f(-x) = 2 \cdot x^2$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 2x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_1 = 0$; 2-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_2 = 0$; 1-fache Nullstelle
$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(0/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	98	-28	4
$-6\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	-26	4
-6	72	-24	4
$-5\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{2}$	-22	4
-5	50	-20	4
$-4\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$	-18	4
-4	32	-16	4
$-3\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$	-14	4
-3	18	-12	4
$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	-10	4
-2	8	-8	4
$-1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	-6	4
-1	2	-4	4
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	4
0	0	0	4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	4
1	2	4	4
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	6	4
2	8	8	4
$2\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	10	4
3	18	12	4
$3\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$	14	4
4	32	16	4
$4\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$	18	4
5	50	20	4
$5\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{2}$	22	4
6	72	24	4
$6\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	26	4
7	98	28	4

Aufgabe (2)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$
$f'(x) = -x$
$f''(x) = -1$
$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^2)dx = -\frac{1}{6}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 0[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{1}{2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^2$
$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -1$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

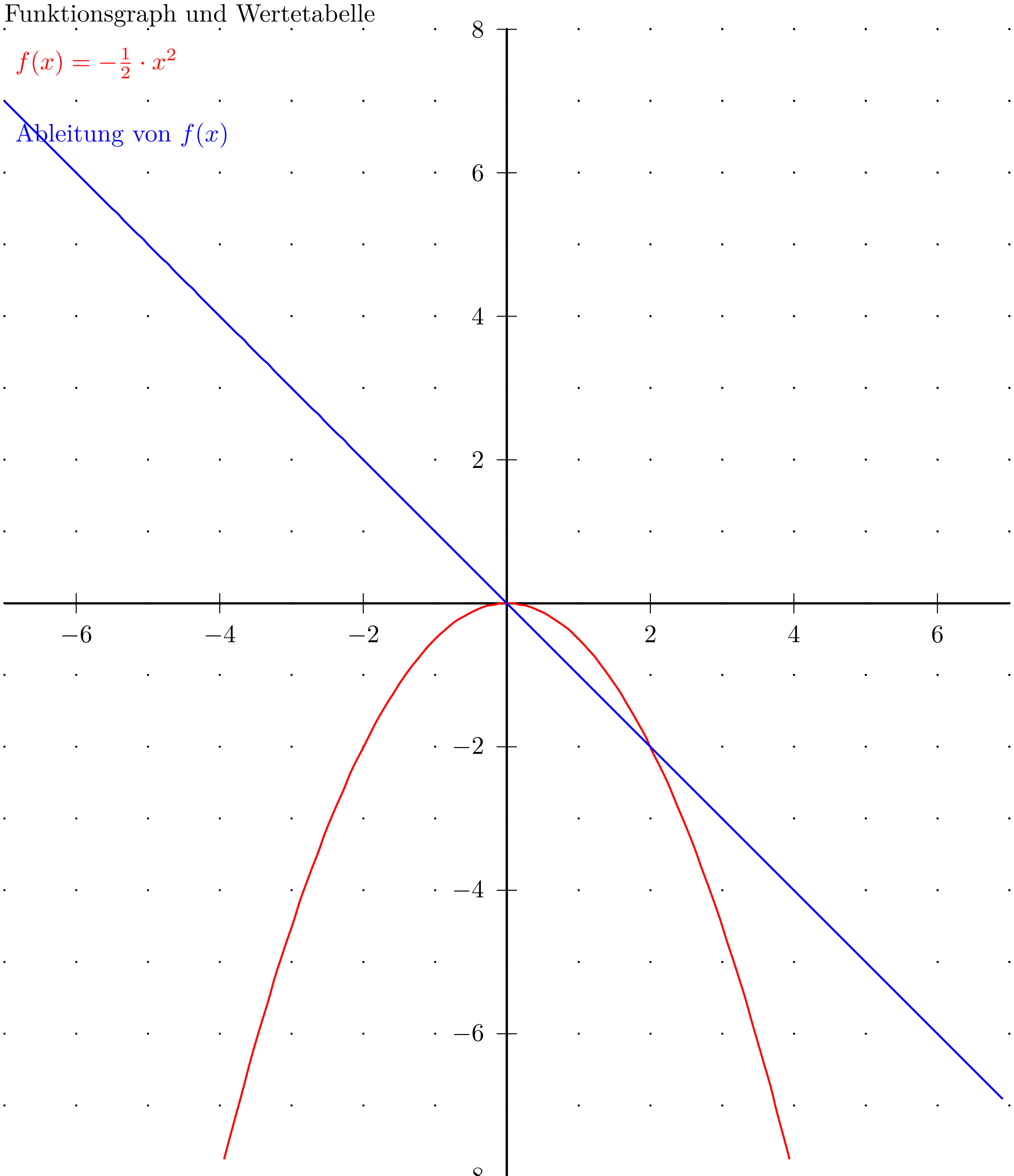
	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-24\frac{1}{2}$	7	-1
$-6\frac{1}{2}$	$-21\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	-1
-6	-18	6	-1
$-5\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{8}$	$5\frac{1}{2}$	-1
-5	$-12\frac{1}{2}$	5	-1
$-4\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	-1
-4	-8	4	-1
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{8}$	$3\frac{1}{2}$	-1
-3	$-4\frac{1}{2}$	3	-1
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$2\frac{1}{2}$	-1
-2	-2	2	-1
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{2}$	-1
-1	$-\frac{1}{2}$	1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	-1
0	0	0	-1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	-1
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-1
1	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{8}$	$-1\frac{1}{2}$	-1
2	-2	-2	-1
$2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$-2\frac{1}{2}$	-1
3	$-4\frac{1}{2}$	-3	-1
$3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{8}$	$-3\frac{1}{2}$	-1
4	-8	-4	-1
$4\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$-4\frac{1}{2}$	-1
5	$-12\frac{1}{2}$	-5	-1
$5\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{8}$	$-5\frac{1}{2}$	-1
6	-18	-6	-1
$6\frac{1}{2}$	$-21\frac{1}{8}$	$-6\frac{1}{2}$	-1
7	$-24\frac{1}{2}$	-7	-1

Aufgabe (3)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6 = -\frac{1}{2}(x + 3,46)(x - 3,46)$
$f'(x) = -x$
$f''(x) = -1$
$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^2 + 6)dx = -\frac{1}{6}x^3 + 6x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 6[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{1}{2} + \dfrac{6}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + 6$
$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 6$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0 \qquad / - 6$
$-\frac{1}{2}x^2 = -6 \qquad / : \left(-\frac{1}{2}\right)$
$x^2 = \dfrac{-6}{-\frac{1}{2}}$
$x = \pm\sqrt{12}$
$x_1 = 3,46 \qquad x_2 = -3,46$
$\underline{x_1 = -3,46;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3,46;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,46$	$< x <$	$3,46$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-3,46; 3,46[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -3,46[\quad \cup \quad]3,46; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -1$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

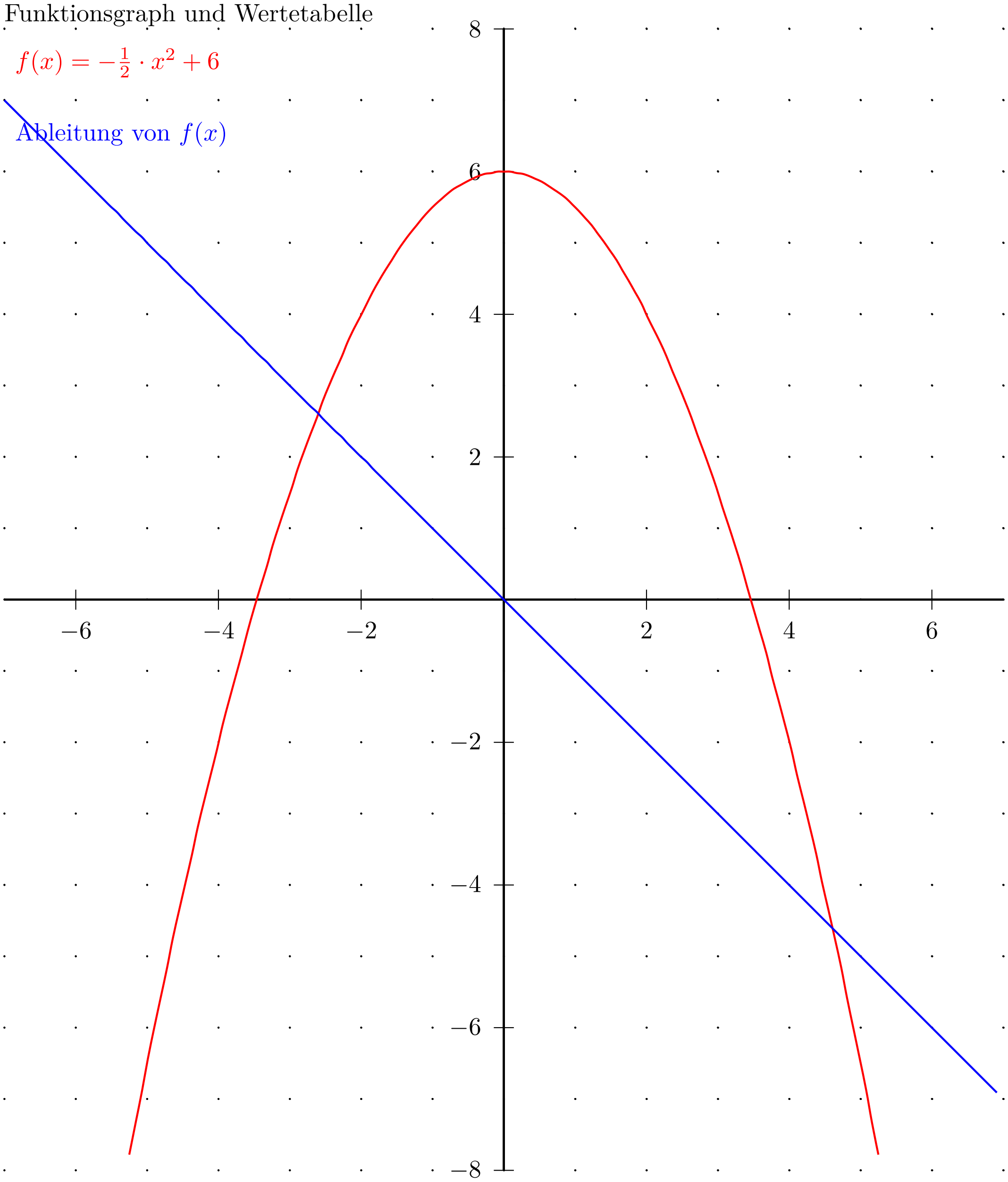
$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-3,46}^{3,46} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 6\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3,46}^{3,46}$$
$$= \left(-\frac{1}{6} \cdot 3,46^3 + 6 \cdot 3,46\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-3,46)^3 + 6 \cdot (-3,46)\right)$$
$$= (13,9) - (-13,9) = 27,7$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-18\frac{1}{2}$	7	-1
$-6\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	-1
-6	-12	6	-1
$-5\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{8}$	$5\frac{1}{2}$	-1
-5	$-6\frac{1}{2}$	5	-1
$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	-1
-4	-2	4	-1
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$3\frac{1}{2}$	-1
-3	$1\frac{1}{2}$	3	-1
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{8}$	$2\frac{1}{2}$	-1
-2	4	2	-1
$-1\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{2}$	-1
-1	$5\frac{1}{2}$	1	-1
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	-1
0	6	0	-1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	6	0	-1
$\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-1
1	$5\frac{1}{2}$	-1	-1
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{8}$	$-1\frac{1}{2}$	-1
2	4	-2	-1
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{8}$	$-2\frac{1}{2}$	-1
3	$1\frac{1}{2}$	-3	-1
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-3\frac{1}{2}$	-1
4	-2	-4	-1
$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{8}$	$-4\frac{1}{2}$	-1
5	$-6\frac{1}{2}$	-5	-1
$5\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{8}$	$-5\frac{1}{2}$	-1
6	-12	-6	-1
$6\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{8}$	$-6\frac{1}{2}$	-1
7	$-18\frac{1}{2}$	-7	-1

Aufgabe (4)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2x^2 - 8x = -2(x+4)x$
$f'(x) = -4x - 8$
$f''(x) = -4$
$F(x) = \int(-2x^2 - 8x)dx = -\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 8[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-2 - \frac{8}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^2 - 8 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2x^2 - 8x = 0$
$x(-2x - 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -2x - 8 = 0$
$-2x - 8 = 0 \qquad / + 8$
$-2x = 8 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{8}{-2}$
$x = -4$
$\underline{x_1 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-4; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -4x - 8 = 0$

$-4x - 8 = 0 \qquad / + 8$
$-4x = 8 \qquad / : (-4)$
$x = \frac{8}{-4}$
$x = -2$
$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = -4$
$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2/8)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

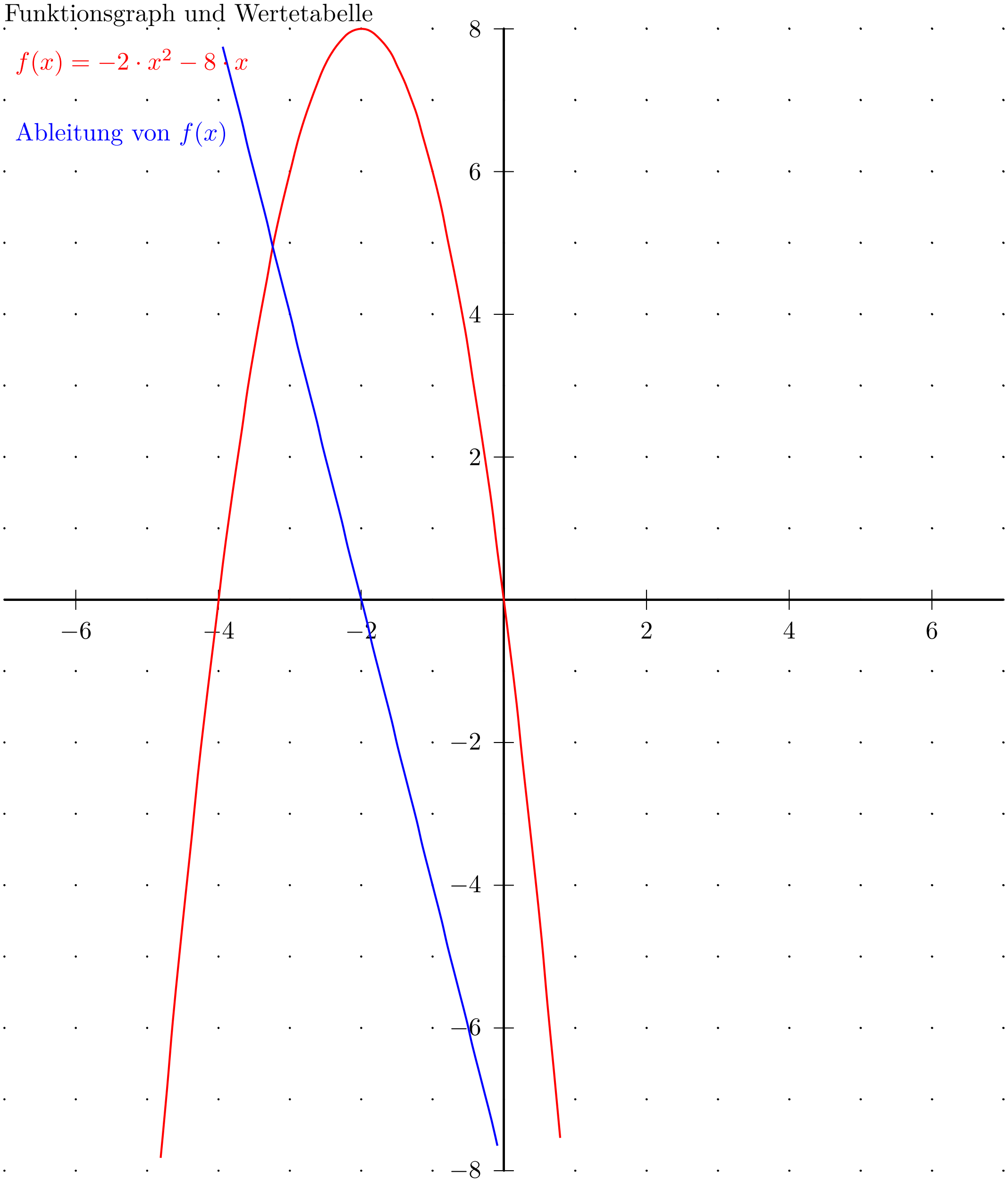
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-4}^{0} \left(-2x^2 - 8x\right) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - 4x^2\right]_{-4}^{0}$$

$$= \left(-\frac{2}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2\right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-4)^3 - 4 \cdot (-4)^2\right)$$

$$= (0) - \left(-21\frac{1}{3}\right) = 21\frac{1}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-42	20	-4
$-6\frac{1}{2}$	$-32\frac{1}{2}$	18	-4
-6	-24	16	-4
$-5\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{2}$	14	-4
-5	-10	12	-4
$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	10	-4
-4	0	8	-4
$-3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	6	-4
-3	6	4	-4
$-2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	2	-4
-2	8	0	-4
$-1\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	-2	-4
-1	6	-4	-4
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	-6	-4
0	0	-8	-4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-8	-4
$\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	-10	-4
1	-10	-12	-4
$1\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{2}$	-14	-4
2	-24	-16	-4
$2\frac{1}{2}$	$-32\frac{1}{2}$	-18	-4
3	-42	-20	-4
$3\frac{1}{2}$	$-52\frac{1}{2}$	-22	-4
4	-64	-24	-4
$4\frac{1}{2}$	$-76\frac{1}{2}$	-26	-4
5	-90	-28	-4
$5\frac{1}{2}$	$-104\frac{1}{2}$	-30	-4
6	-120	-32	-4
$6\frac{1}{2}$	$-136\frac{1}{2}$	-34	-4
7	-154	-36	-4

Aufgabe (5)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2 = \frac{1}{4}(x + 2,83)(x - 2,83)$
$f'(x) = \frac{1}{2}x$
$f''(x) = \frac{1}{2}$
$F(x) = \int(\frac{1}{4}x^2 - 2)dx = \frac{1}{12}x^3 - 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-2), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(\frac{1}{4} - \dfrac{2}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot (-x)^2 - 2$
$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2$
$f(-x) = f(x) \to$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2 = 0$

$\frac{1}{4}x^2 - 2 = 0 \qquad / + 2$
$\frac{1}{4}x^2 = 2 \qquad / : \frac{1}{4}$
$x^2 = \dfrac{2}{\frac{1}{4}}$
$x = \pm\sqrt{8}$
$x_1 = 2,83 \qquad x_2 = -2,83$
$\underline{x_1 = -2,83;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2,83;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,83$	$< x <$	$2,83$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2,83[\quad \cup \quad]2,83; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2,83; 2,83[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{1}{2}x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-2)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

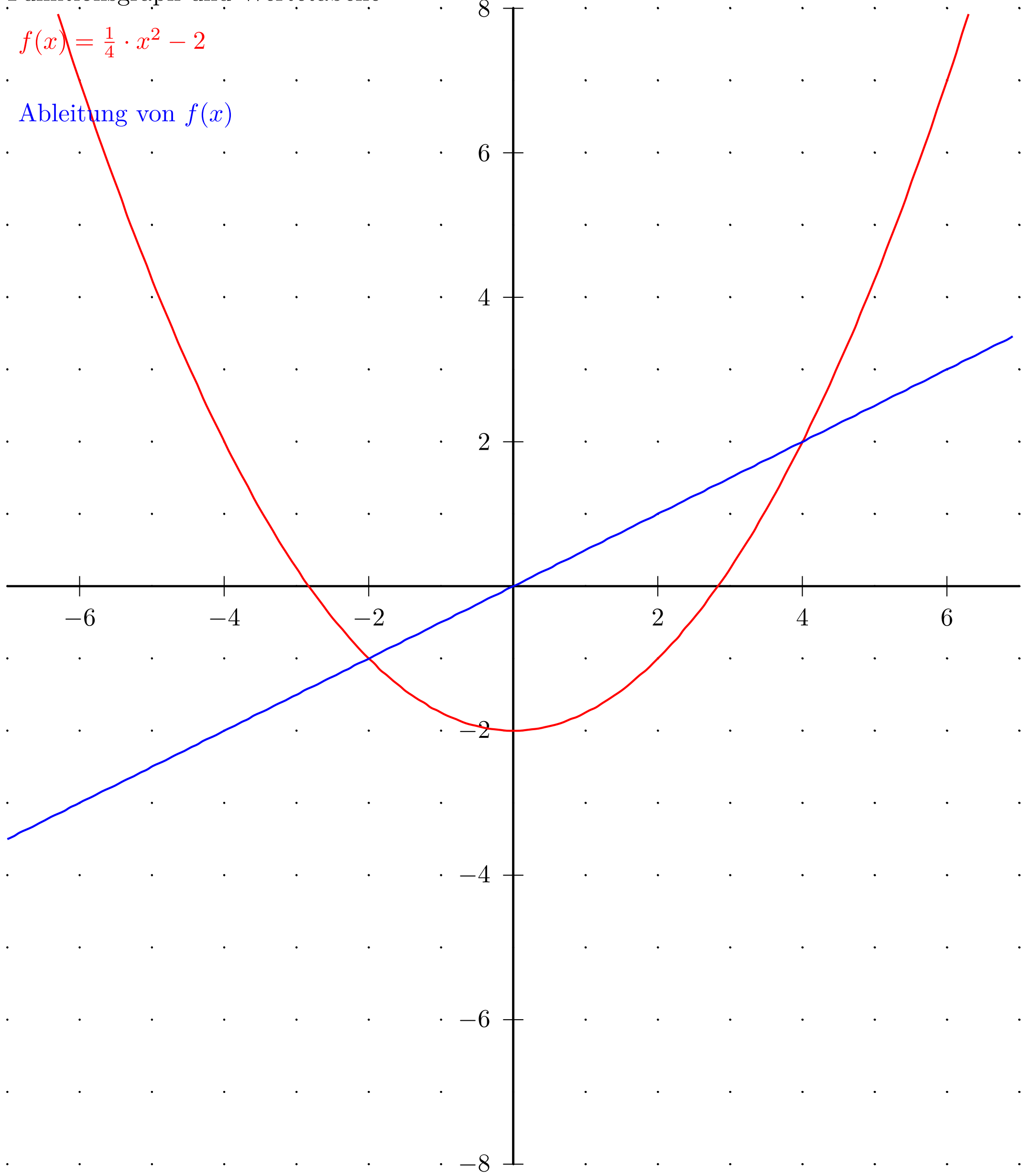
$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2,83}^{2,83} \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 - 2x\right]_{-2,83}^{2,83}$$
$$= \left(\frac{1}{12} \cdot 2,83^3 - 2 \cdot 2,83\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-2,83)^3 - 2 \cdot (-2,83)\right)$$
$$= (-3,77) - (3,77) = -7,54$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$10\frac{1}{4}$	$-3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-6\frac{1}{2}$	$8\frac{9}{16}$	$-3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-6	7	-3	$\frac{1}{2}$
$-5\frac{1}{2}$	$5\frac{9}{16}$	$-2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
-5	$4\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{16}$	$-2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-4	2	-2	$\frac{1}{2}$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{16}$	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
-3	$\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{16}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-2	-1	-1	$\frac{1}{2}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
-1	$-1\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{15}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	-2	0	$\frac{1}{2}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-2	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{15}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	-1	1	$\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{16}$	$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	2	2	$\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{16}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
5	$4\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{9}{16}$	$2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
6	7	3	$\frac{1}{2}$
$6\frac{1}{2}$	$8\frac{9}{16}$	$3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
7	$10\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe (6)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = -\frac{1}{3}(x + 7,24)(x - 1,24)$
$f'(x) = -\frac{2}{3}x - 2$
$f''(x) = -\frac{2}{3}$
$F(x) = \int(-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3)dx = -\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 6[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{1}{3} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{3} \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$

$-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{8}}{-\frac{2}{3}}$$
$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 2,83}{-\frac{2}{3}}$$
$$x_1 = \frac{2 + 2,83}{-\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \frac{2 - 2,83}{-\frac{2}{3}}$$
$x_1 = -7,24$ $x_2 = 1,24$
$\underline{x_1 = -7,24;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1,24;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-7,24$	$< x <$	$1,24$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-7,24; 1,24[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -7,24[\quad \cup \quad]1,24; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = -\frac{2}{3}x - 2 = 0$$
$$-\frac{2}{3}x - 2 = 0 \qquad / + 2$$
$$-\frac{2}{3}x = 2 \qquad / : \left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$x = \frac{2}{-\frac{2}{3}}$$
$x = -3$
$\underline{x_3 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-3) = -\frac{2}{3}$
$f''(-3) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-3/6)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

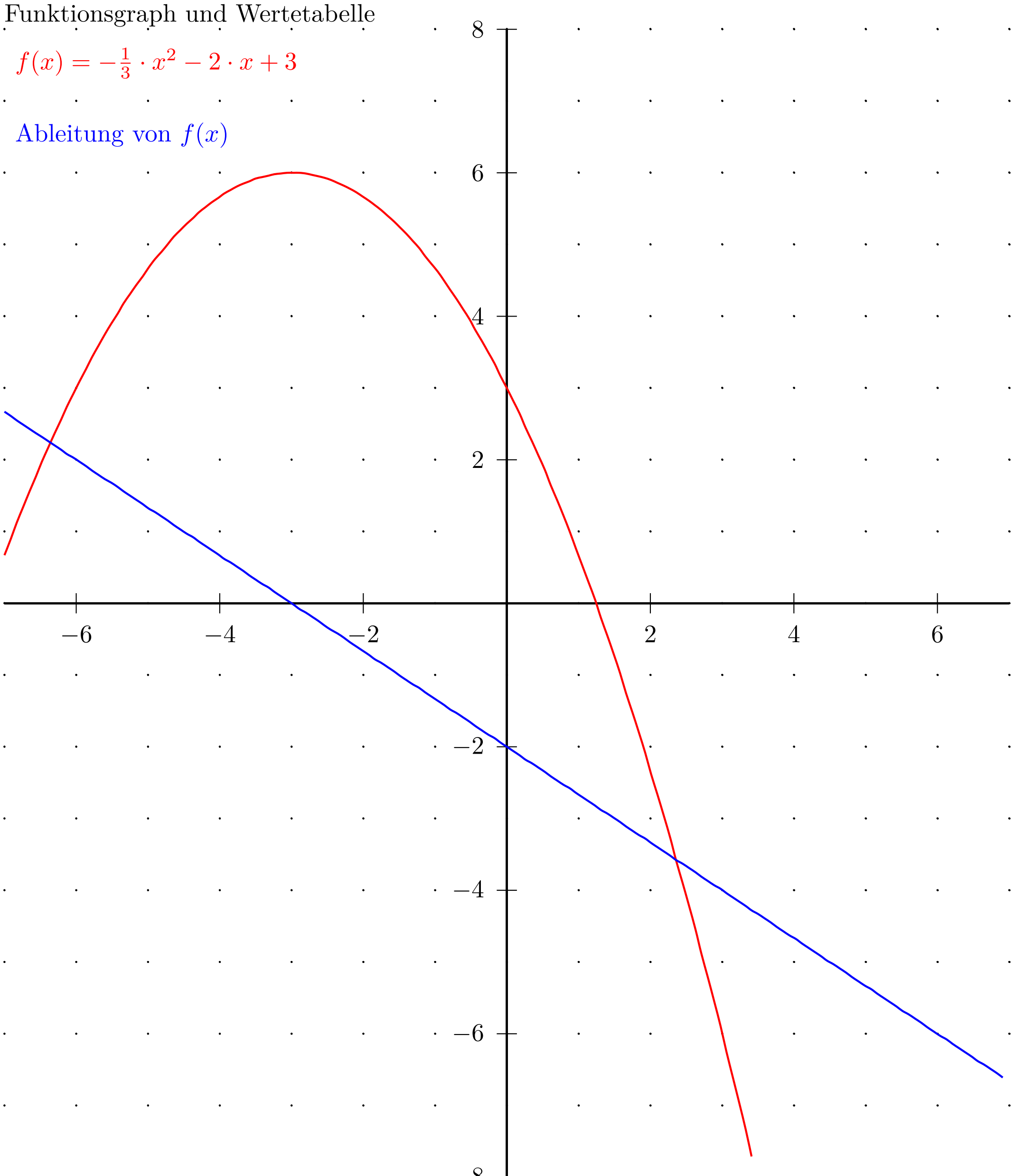
$x \in]-\infty; -3[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-7,24}^{1,24} \left(-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3\right) dx = \left[-\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x\right]_{-7,24}^{1,24}$$
$$= \left(-\frac{1}{9} \cdot 1,24^3 - 1 \cdot 1,24^2 + 3 \cdot 1,24\right) - \left(-\frac{1}{9} \cdot (-7,24)^3 - 1 \cdot (-7,24)^2 + 3 \cdot (-7,24)\right)$$
$$= (1,97) - (-32) = 33,9$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{12}$	$2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-6	3	2	$-\frac{2}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$1\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-5	$4\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	1	$-\frac{2}{3}$
-4	$5\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-3	6	0	$-\frac{2}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-2	$5\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{2}{3}$
-1	$4\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$-1\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
0	3	-2	$-\frac{2}{3}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	3	-2	$-\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{12}$	$-2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
1	$\frac{2}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-3	$-\frac{2}{3}$
2	$-2\frac{1}{3}$	$-3\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{12}$	$-3\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
3	-6	-4	$-\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{12}$	$-4\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
4	$-10\frac{1}{3}$	$-4\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{4}$	-5	$-\frac{2}{3}$
5	$-15\frac{1}{3}$	$-5\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$-18\frac{1}{12}$	$-5\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
6	-21	-6	$-\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$-24\frac{1}{12}$	$-6\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
7	$-27\frac{1}{3}$	$-6\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Aufgabe (7)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3 = \frac{1}{4}(x + 3,46)(x - 3,46)$
$f'(x) = \frac{1}{2}x$
$f''(x) = \frac{1}{2}$
$F(x) = \int(\frac{1}{4}x^2 - 3)dx = \frac{1}{12}x^3 - 3x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-3), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(\frac{1}{4} - \dfrac{3}{x^2})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot (-x)^2 - 3$
$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3 = 0$

$\frac{1}{4}x^2 - 3 = 0 \quad / + 3$
$\frac{1}{4}x^2 = 3 \quad / : \frac{1}{4}$
$x^2 = \dfrac{3}{\frac{1}{4}}$
$x = \pm\sqrt{12}$
$x_1 = 3,46 \quad x_2 = -3,46$
$\underline{x_1 = -3,46; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3,46; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,46$	$< x <$	$3,46$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -3,46[\quad \cup \quad]3,46; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-3,46; 3,46[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{1}{2}x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-3)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

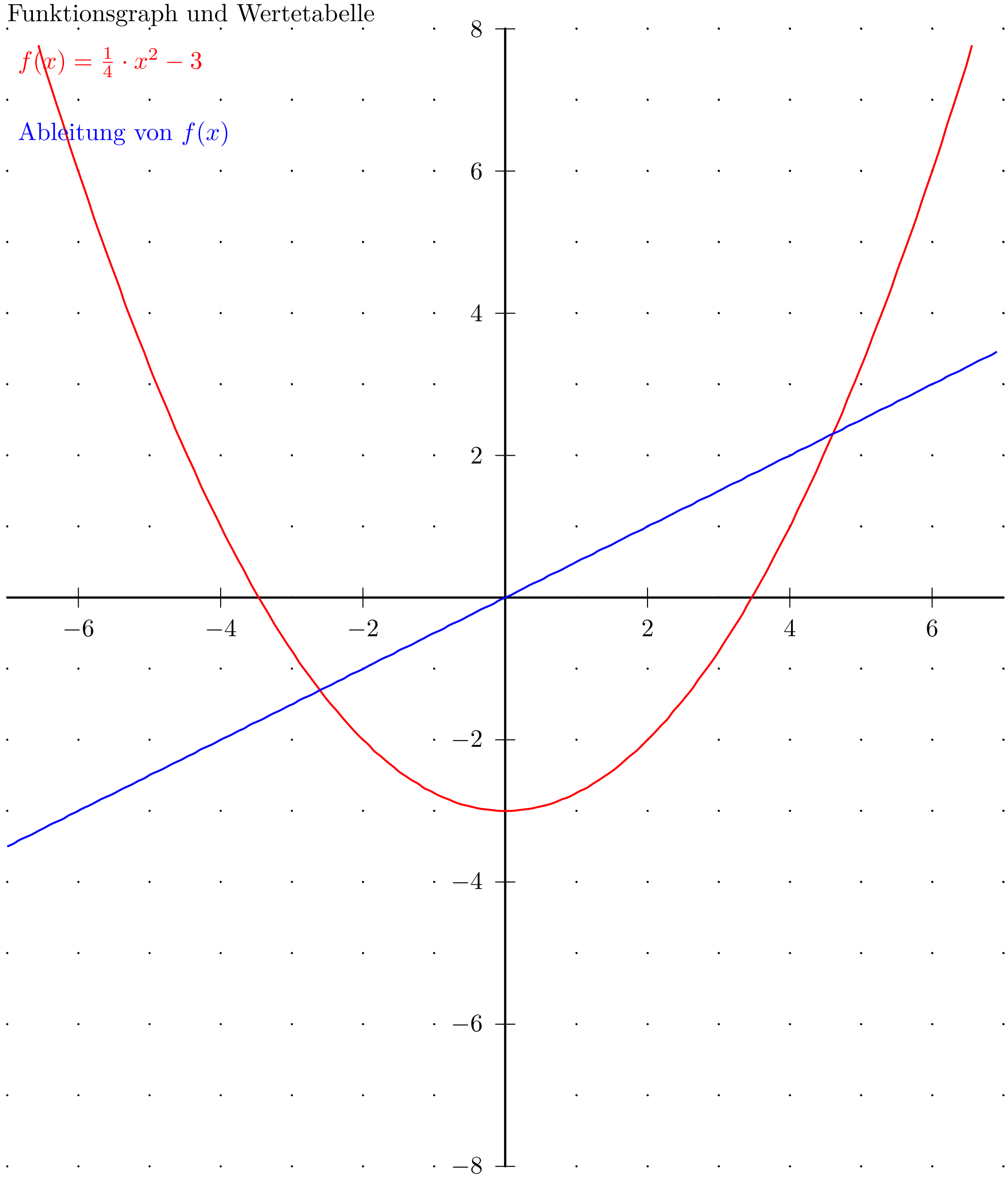
$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-3,46}^{3,46} \left(\frac{1}{4}x^2 - 3\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 - 3x\right]_{-3,46}^{3,46}$
$= \left(\frac{1}{12} \cdot 3,46^3 - 3 \cdot 3,46\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-3,46)^3 - 3 \cdot (-3,46)\right)$
$= (-6,93) - (6,93) = -13,9$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$9\frac{1}{4}$	$-3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-6\frac{1}{2}$	$7\frac{9}{16}$	$-3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-6	6	-3	$\frac{1}{2}$
$-5\frac{1}{2}$	$4\frac{9}{16}$	$-2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
-5	$3\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{16}$	$-2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-4	1	-2	$\frac{1}{2}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{16}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-2	-2	-1	$\frac{1}{2}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
-1	$-2\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{15}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	-3	0	$\frac{1}{2}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-3	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{15}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$-2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	-2	1	$\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	$-\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	1	2	$\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{16}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
5	$3\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$4\frac{9}{16}$	$2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
6	6	3	$\frac{1}{2}$
$6\frac{1}{2}$	$7\frac{9}{16}$	$3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
7	$9\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe (8)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2x^2 + 4 = -2(x + 1,41)(x - 1,41)$
$f'(x) = -4x$
$f''(x) = -4$
$F(x) = \int(-2x^2 + 4)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 4[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-2 + \dfrac{4}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^2 + 4$
$f(-x) = -2 \cdot x^2 + 4$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2x^2 + 4 = 0$

$-2x^2 + 4 = 0 \qquad / - 4$
$-2x^2 = -4 \qquad / : (-2)$
$x^2 = \dfrac{-4}{-2}$
$x = \pm\sqrt{2}$
$x_1 = 1,41 \qquad x_2 = -1,41$
$\underline{x_1 = -1,41;}$ 1-fache Nullstelle
$\underline{x_2 = 1,41;}$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,41$	$< x <$	$1,41$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1,41; 1,41[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -1,41[\quad \cup \quad]1,41; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -4x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0;}$ 1-fache Nullstelle
$f''(0) = -4$
$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(0/4)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-1,41}^{1,41} \left(-2x^2 + 4\right) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x\right]_{-1,41}^{1,41}$
$= \left(-\frac{2}{3} \cdot 1,41^3 + 4 \cdot 1,41\right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-1,41)^3 + 4 \cdot (-1,41)\right)$
$= (3,77) - (-3,77) = 7,54$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-94	28	-4
$-6\frac{1}{2}$	$-80\frac{1}{2}$	26	-4
-6	-68	24	-4
$-5\frac{1}{2}$	$-56\frac{1}{2}$	22	-4
-5	-46	20	-4
$-4\frac{1}{2}$	$-36\frac{1}{2}$	18	-4
-4	-28	16	-4
$-3\frac{1}{2}$	$-20\frac{1}{2}$	14	-4
-3	-14	12	-4
$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$	10	-4
-2	-4	8	-4
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	6	-4
-1	2	4	-4
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	2	-4
0	4	0	-4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	0	-4
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	-2	-4
1	2	-4	-4
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-6	-4
2	-4	-8	-4
$2\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$	-10	-4
3	-14	-12	-4
$3\frac{1}{2}$	$-20\frac{1}{2}$	-14	-4
4	-28	-16	-4
$4\frac{1}{2}$	$-36\frac{1}{2}$	-18	-4
5	-46	-20	-4
$5\frac{1}{2}$	$-56\frac{1}{2}$	-22	-4
6	-68	-24	-4
$6\frac{1}{2}$	$-80\frac{1}{2}$	-26	-4
7	-94	-28	-4

Aufgabe (9)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2 - 2 = (x + 1,41)(x - 1,41)$
$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2 - 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-2), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1 - \dfrac{2}{x^2})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 2$
$f(-x) = 1 \cdot x^2 - 2$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - 2 = 0$

$1x^2 - 2 = 0 \qquad / + 2$
$1x^2 = 2 \qquad / : 1$
$x^2 = \dfrac{2}{1}$
$x = \pm\sqrt{2}$
$x_1 = 1,41 \qquad x_2 = -1,41$
$\underline{x_1 = -1,41; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1,41; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,41$	$< x <$	$1,41$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1,41[\quad \cup \quad]1,41; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1,41; 1,41[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-2)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

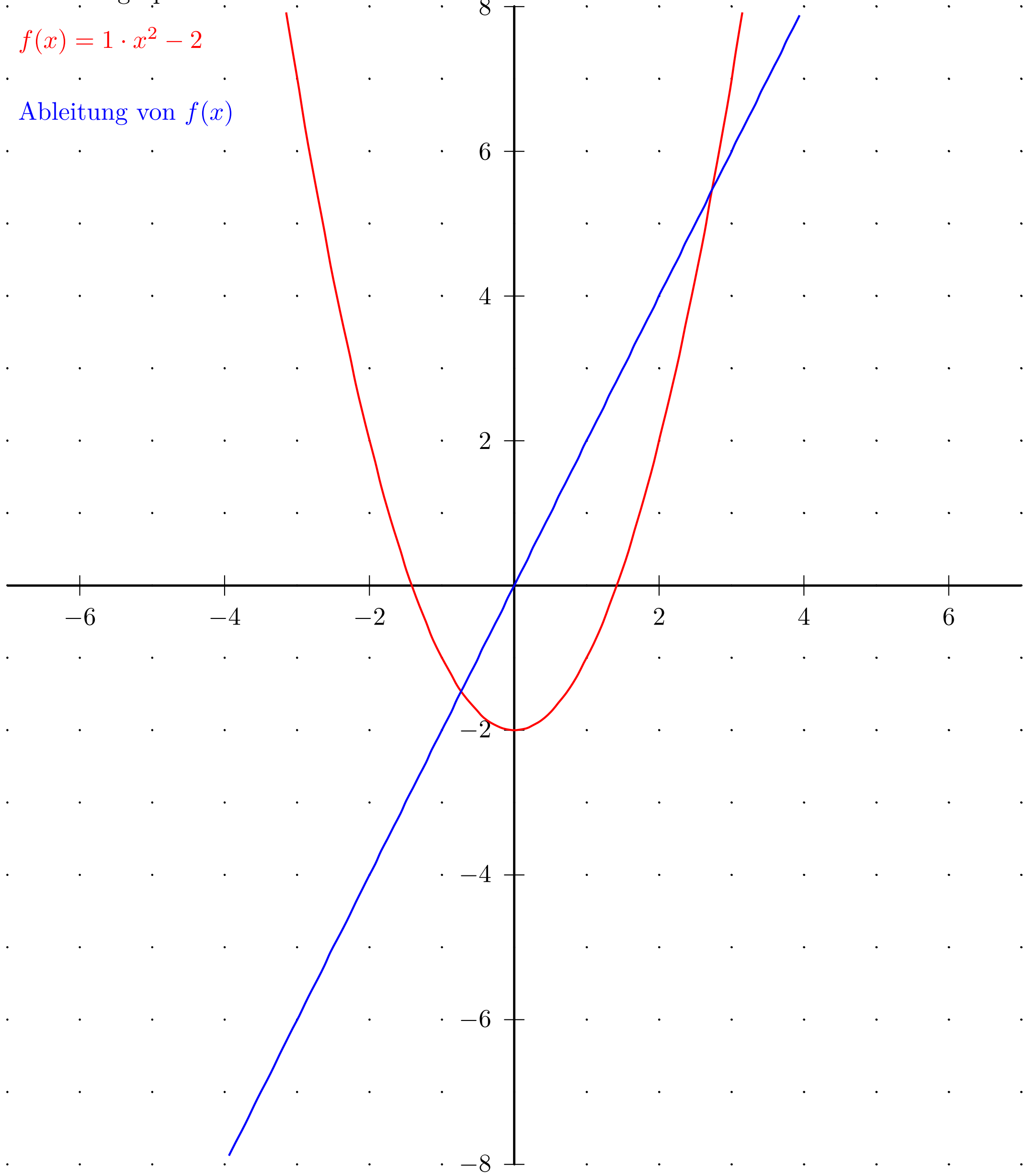
$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-1,41}^{1,41} \left(x^2 - 2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_{-1,41}^{1,41}$$

$= \left(\frac{1}{3} \cdot 1,41^3 - 2 \cdot 1,41\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1,41)^3 - 2 \cdot (-1,41)\right)$
$= (-1,89) - (1,89) = -3,77$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	47	-14	2
$-6\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{4}$	-13	2
-6	34	-12	2
$-5\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{4}$	-11	2
-5	23	-10	2
$-4\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{4}$	-9	2
-4	14	-8	2
$-3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{4}$	-7	2
-3	7	-6	2
$-2\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	-5	2
-2	2	-4	2
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-3	2
-1	-1	-2	2
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	-1	2
0	-2	0	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-2	0	2
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	1	2
1	-1	2	2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	3	2
2	2	4	2
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	5	2
3	7	6	2
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{4}$	7	2
4	14	8	2
$4\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{4}$	9	2
5	23	10	2
$5\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{4}$	11	2
6	34	12	2
$6\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{4}$	13	2
7	47	14	2

Aufgabe (10)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x = -\frac{1}{3}x(x-6)$
$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$
$f''(x) = -\frac{2}{3}$
$F(x) = \int(-\frac{1}{3}x^2 + 2x)dx = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 3[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{1}{3} + \dfrac{2}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{3} \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$
$x(-\frac{1}{3}x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{3}x + 2 = 0$
$-\frac{1}{3}x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-\frac{1}{3}x = -2 \qquad / : \left(-\frac{1}{3}\right)$
$x = \dfrac{-2}{-\frac{1}{3}}$
$x = 6$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	6	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0;6[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]6;\infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -\dfrac{2}{3}x + 2 = 0$

$-\dfrac{2}{3}x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-\dfrac{2}{3}x = -2 \qquad / : \left(-\dfrac{2}{3}\right)$
$x = \dfrac{-2}{-\frac{2}{3}}$
$x = 3$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(3) = -\dfrac{2}{3}$
$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/3)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend

$x \in]3; \infty[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

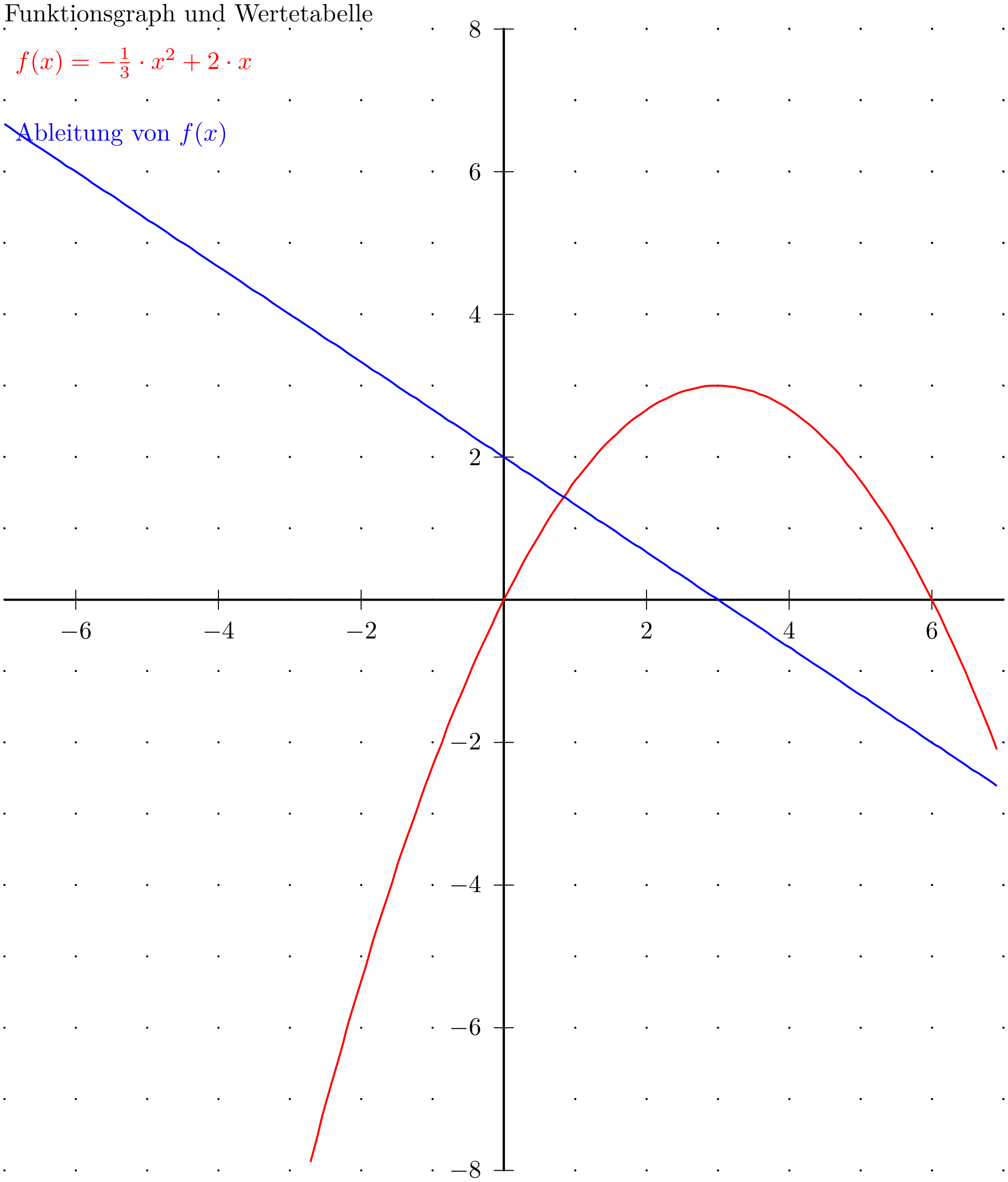
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_0^6 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 2x\right) dx = \left[-\frac{1}{9}x^3 + x^2\right]_0^6$$

$$= \left(-\frac{1}{9} \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2\right) - \left(-\frac{1}{9} \cdot 0^3 + 1 \cdot 0^2\right)$$

$$= (12) - (0) = 12$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-30\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$-27\frac{1}{12}$	$6\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-6	-24	6	$-\frac{2}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$-21\frac{1}{12}$	$5\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-5	$-18\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{4}$	5	$-\frac{2}{3}$
-4	$-13\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-11\frac{1}{12}$	$4\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-3	-9	4	$-\frac{2}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{12}$	$3\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-2	$-5\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	3	$-\frac{2}{3}$
-1	$-2\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{12}$	$2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
0	0	2	$-\frac{2}{3}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	2	$-\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{12}$	$1\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
1	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	1	$-\frac{2}{3}$
2	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
3	3	0	$-\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
4	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{2}{3}$
5	$1\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{11}{12}$	$-1\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
6	0	-2	$-\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{12}$	$-2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
7	$-2\frac{1}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Aufgabe (11)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2 - 4x + 7$
$f'(x) = 2x - 4$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2 - 4x + 7)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]3, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 7$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - 4x + 7 = 0$

$1x^2 - 4x + 7 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{-12}}{2}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x - 4 = 0$

$2x - 4 = 0 \quad / + 4$
$2x = 4 \quad / : 2$
$x = \dfrac{4}{2}$
$x = 2$
$x_1 = 2$; 1-fache Nullstelle
$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(2/3)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

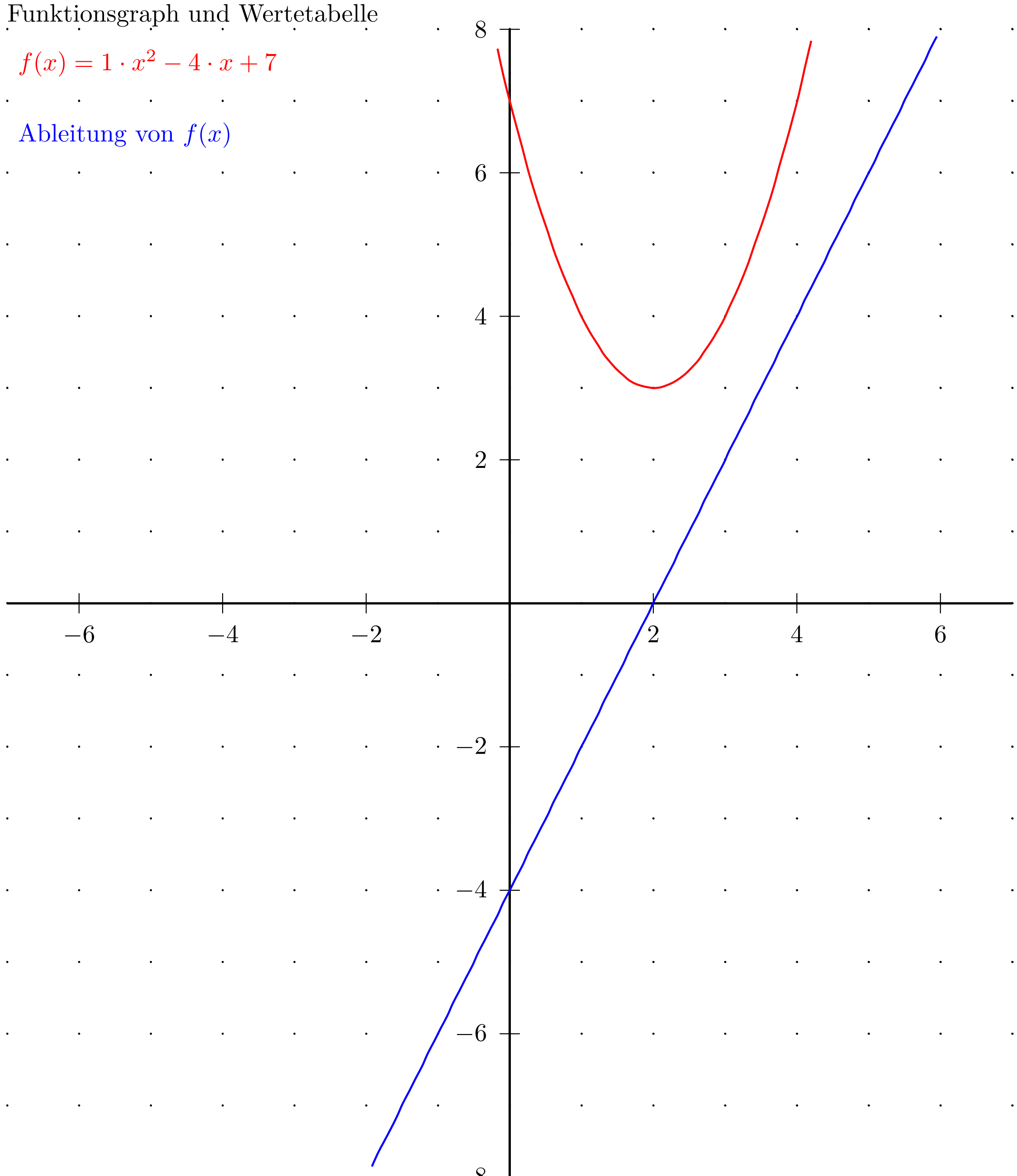
	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]2; \infty[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 2[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	84	-18	2
$-6\frac{1}{2}$	$75\frac{1}{4}$	-17	2
-6	67	-16	2
$-5\frac{1}{2}$	$59\frac{1}{4}$	-15	2
-5	52	-14	2
$-4\frac{1}{2}$	$45\frac{1}{4}$	-13	2
-4	39	-12	2
$-3\frac{1}{2}$	$33\frac{1}{4}$	-11	2
-3	28	-10	2
$-2\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{4}$	-9	2
-2	19	-8	2
$-1\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{4}$	-7	2
-1	12	-6	2
$-\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	-5	2
0	7	-4	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	7	-4	2
$\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-3	2
1	4	-2	2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	-1	2
2	3	0	2
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	1	2
3	4	2	2
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	3	2
4	7	4	2
$4\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	5	2
5	12	6	2
$5\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{4}$	7	2
6	19	8	2
$6\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{4}$	9	2
7	28	10	2

Aufgabe (12)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -x^2 + 4x - 7$
$f'(x) = -2x + 4$
$f''(x) = -2$
$F(x) = \int(-x^2 + 4x - 7)dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 7x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, (-3)[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-1 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x) - 7$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -x^2 + 4x - 7 = 0$

$-x^2 + 4x - 7 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7)}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-12}}{-2}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R}$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -2x + 4 = 0$

$-2x + 4 = 0 \quad / -4$
$-2x = -4 \quad / : (-2)$
$x = \dfrac{-4}{-2}$
$x = 2$
$x_1 = 2;$ 1-fache Nullstelle
$f''(2) = -2$
$f''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(2/-3)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

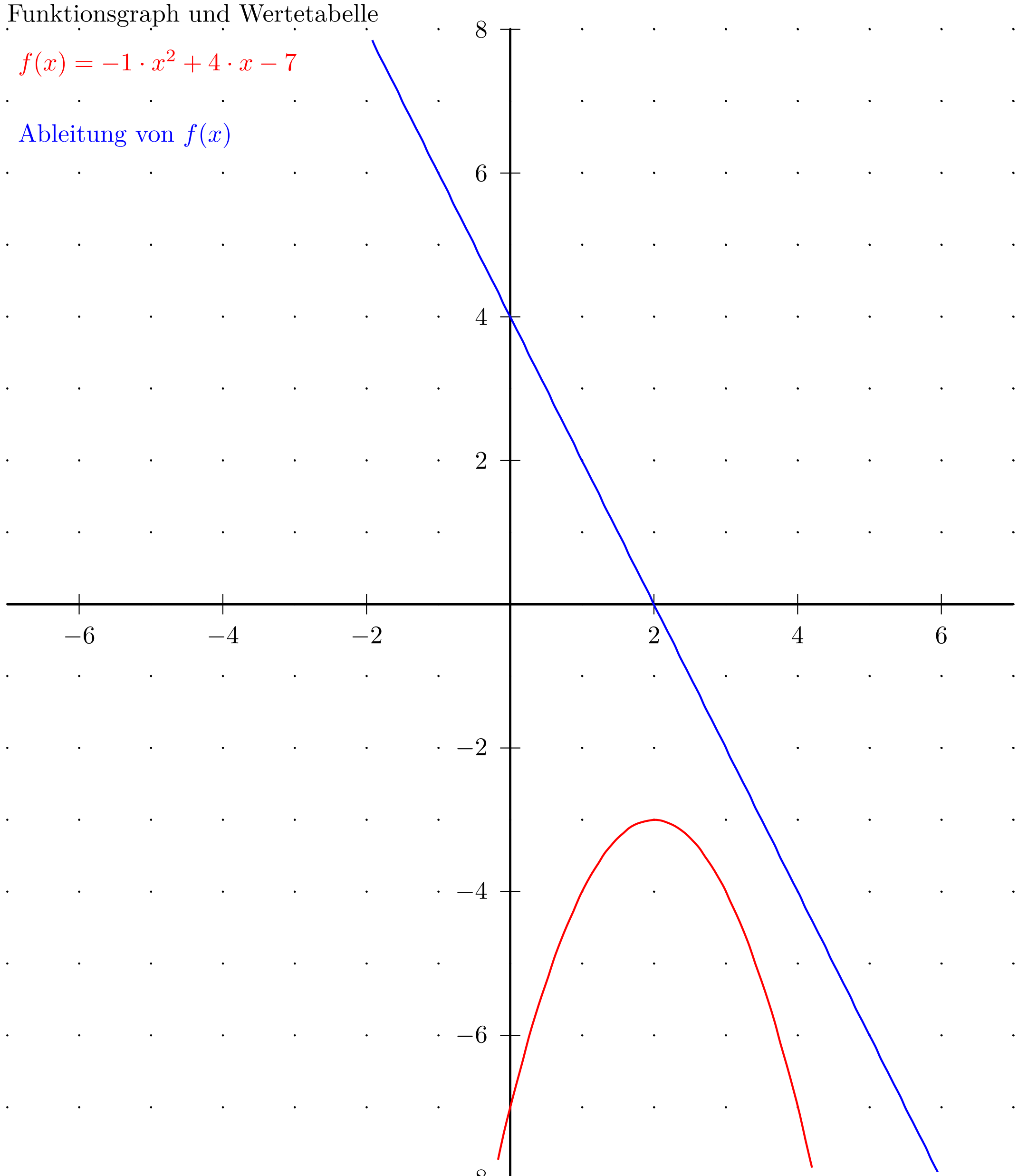
	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 2[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]2; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-84	18	-2
$-6\frac{1}{2}$	$-75\frac{1}{4}$	17	-2
-6	-67	16	-2
$-5\frac{1}{2}$	$-59\frac{1}{4}$	15	-2
-5	-52	14	-2
$-4\frac{1}{2}$	$-45\frac{1}{4}$	13	-2
-4	-39	12	-2
$-3\frac{1}{2}$	$-33\frac{1}{4}$	11	-2
-3	-28	10	-2
$-2\frac{1}{2}$	$-23\frac{1}{4}$	9	-2
-2	-19	8	-2
$-1\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{4}$	7	-2
-1	-12	6	-2
$-\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{4}$	5	-2
0	-7	4	-2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-7	4	-2
$\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	3	-2
1	-4	2	-2
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{4}$	1	-2
2	-3	0	-2
$2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{4}$	-1	-2
3	-4	-2	-2
$3\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	-3	-2
4	-7	-4	-2
$4\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{4}$	-5	-2
5	-12	-6	-2
$5\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{4}$	-7	-2
6	-19	-8	-2
$6\frac{1}{2}$	$-23\frac{1}{4}$	-9	-2
7	-28	-10	-2

Aufgabe (13)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2(x+2)x$
$f'(x) = 4x + 4$
$f''(x) = 4$
$F(x) = \int (2x^2 + 4x)dx = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-2), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(2 + \dfrac{4}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [2 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [2 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 2x^2 + 4x = 0$
$x(2x+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x + 4 = 0$
$2x + 4 = 0 \qquad / - 4$
$2x = -4 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{-4}{2}$
$x = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x + 4 = 0$

$4x + 4 = 0 \qquad / - 4$
$4x = -4 \qquad / : 4$
$x = \dfrac{-4}{4}$
$x = -1$
$\underline{x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1/-2)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

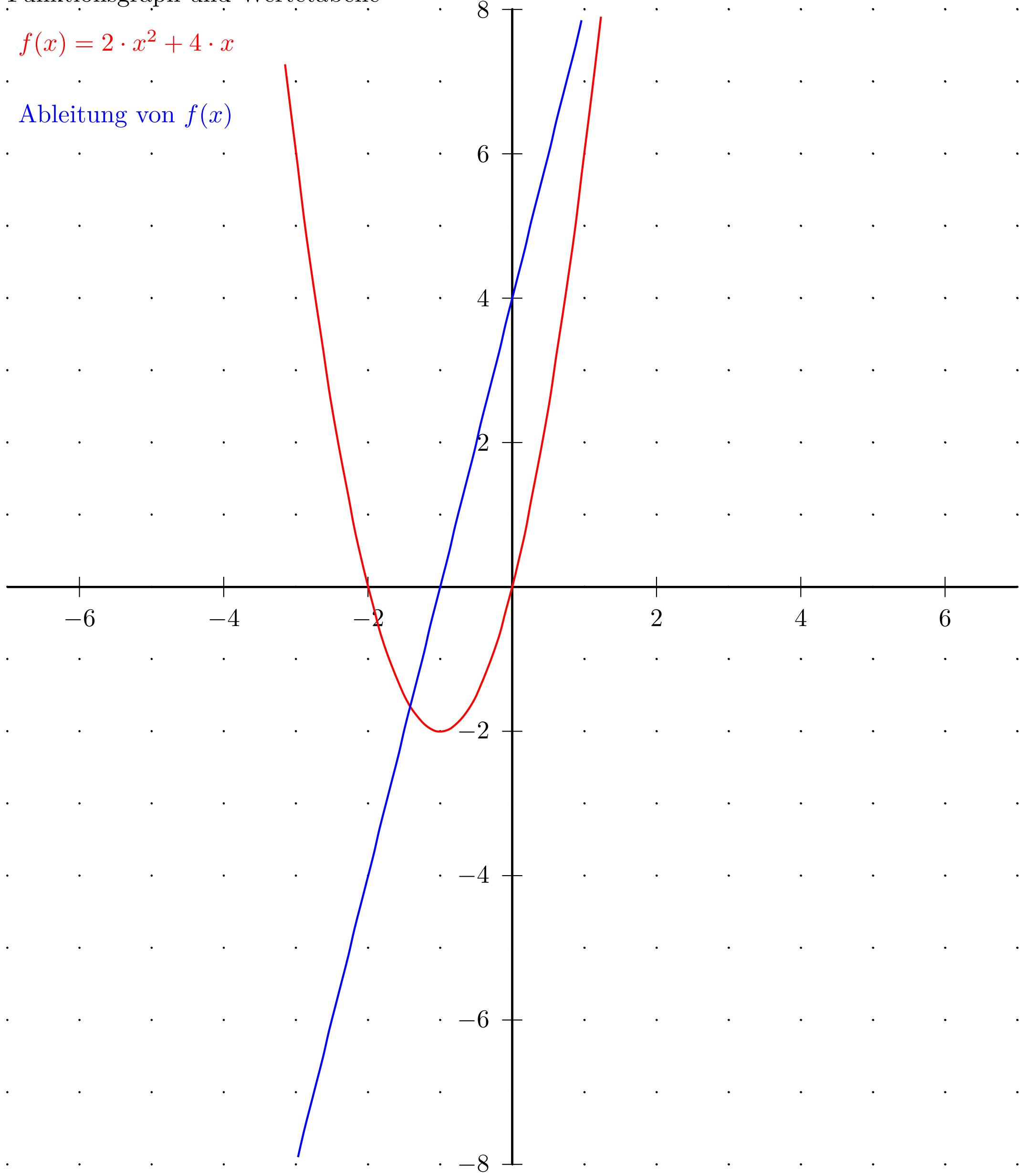
$\underline{x \in]-1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-2}^{0} (2x^2 + 4x)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_{-2}^{0}$
$= \left(\frac{2}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2\right)$
$= (0) - \left(2\frac{2}{3}\right) = -2\frac{2}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	70	-24	4
$-6\frac{1}{2}$	$58\frac{1}{2}$	-22	4
-6	48	-20	4
$-5\frac{1}{2}$	$38\frac{1}{2}$	-18	4
-5	30	-16	4
$-4\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	-14	4
-4	16	-12	4
$-3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	-10	4
-3	6	-8	4
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	-6	4
-2	0	-4	4
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	-2	4
-1	-2	0	4
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	2	4
0	0	4	4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	4	4
$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	6	4
1	6	8	4
$1\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	10	4
2	16	12	4
$2\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	14	4
3	30	16	4
$3\frac{1}{2}$	$38\frac{1}{2}$	18	4
4	48	20	4
$4\frac{1}{2}$	$58\frac{1}{2}$	22	4
5	70	24	4
$5\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{2}$	26	4
6	96	28	4
$6\frac{1}{2}$	$110\frac{1}{2}$	30	4
7	126	32	4

Aufgabe (14)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = -\frac{1}{2}(x + 1,74)(x - 5,74)$
$f'(x) = -x + 2$
$f''(x) = -1$
$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5)dx = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 7[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{1}{2} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x) + 5$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{14}}{-1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 3,74}{-1}$
$x_1 = \dfrac{-2 + 3,74}{-1}$ $x_2 = \dfrac{-2 - 3,74}{-1}$
$x_1 = -1,74$ $x_2 = 5,74$
$\underline{x_1 = -1,74;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 5,74;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,74$	$< x <$	$5,74$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1,74; 5,74[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1,74[\quad \cup \quad]5,74; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -x + 2 = 0$

$-1x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-1x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = \dfrac{-2}{-1}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(2) = -1$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/7)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

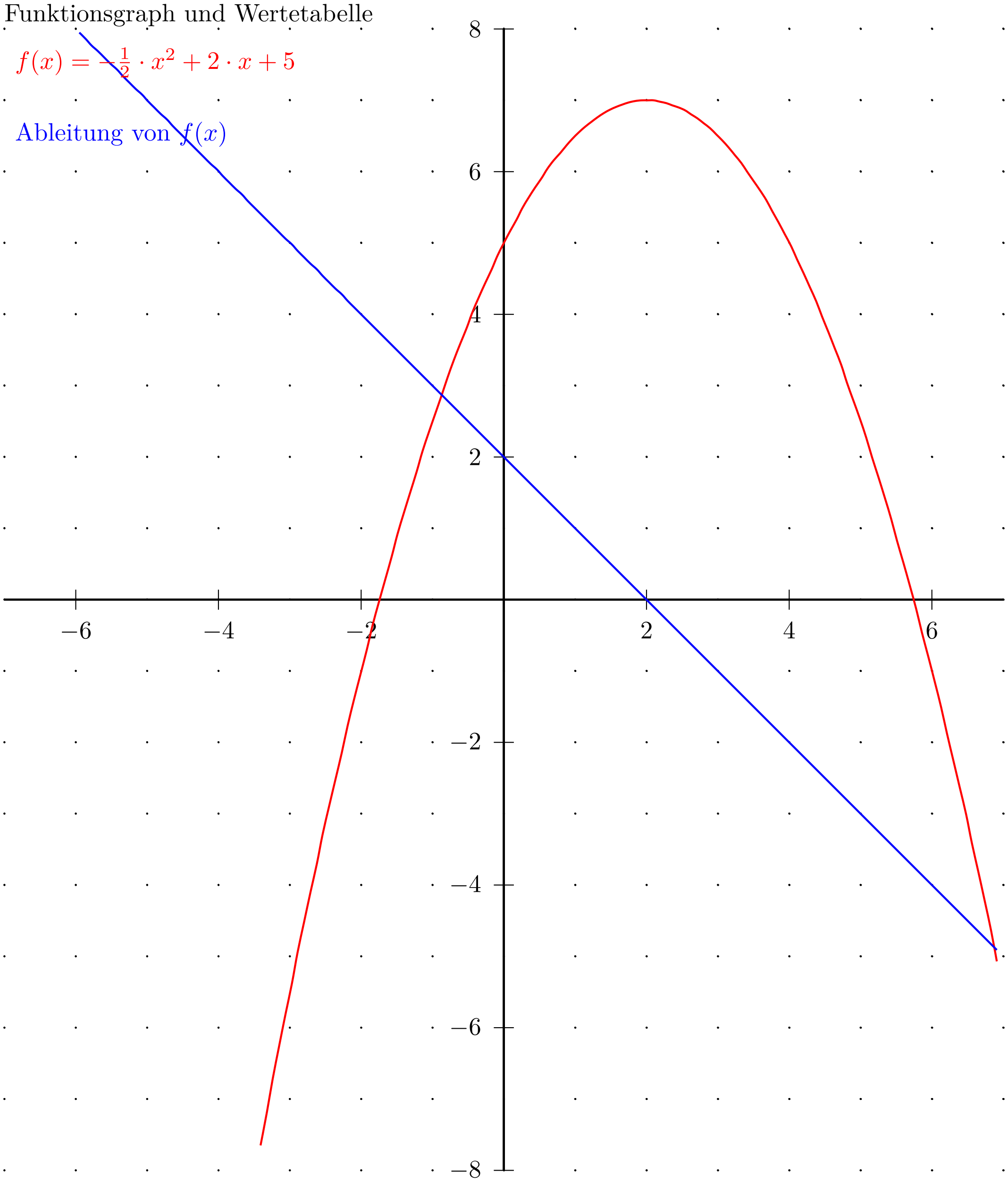
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1,74}^{5,74} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x\right]_{-1,74}^{5,74}$$

$$= \left(-\frac{1}{6} \cdot 5,74^3 + 1 \cdot 5,74^2 + 5 \cdot 5,74\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-1,74)^3 + 1 \cdot (-1,74)^2 + 5 \cdot (-1,74)\right)$$

$$= (30,1) - (-4,79) = 34,9$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-33\frac{1}{2}$	9	-1
$-6\frac{1}{2}$	$-29\frac{1}{8}$	$8\frac{1}{2}$	-1
-6	-25	8	-1
$-5\frac{1}{2}$	$-21\frac{1}{8}$	$7\frac{1}{2}$	-1
-5	$-17\frac{1}{2}$	7	-1
$-4\frac{1}{2}$	$-14\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	-1
-4	-11	6	-1
$-3\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{8}$	$5\frac{1}{2}$	-1
-3	$-5\frac{1}{2}$	5	-1
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	-1
-2	-1	4	-1
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$3\frac{1}{2}$	-1
-1	$2\frac{1}{2}$	3	-1
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{7}{8}$	$2\frac{1}{2}$	-1
0	5	2	-1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	2	-1
$\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{2}$	-1
1	$6\frac{1}{2}$	1	-1
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	-1
2	7	0	-1
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-1
3	$6\frac{1}{2}$	-1	-1
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{8}$	$-1\frac{1}{2}$	-1
4	5	-2	-1
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{7}{8}$	$-2\frac{1}{2}$	-1
5	$2\frac{1}{2}$	-3	-1
$5\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$-3\frac{1}{2}$	-1
6	-1	-4	-1
$6\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$-4\frac{1}{2}$	-1
7	$-5\frac{1}{2}$	-5	-1

Aufgabe (15)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2x^2 + 3x + 4 = -2(x + 0,851)(x - 2,35)$
$f'(x) = -4x + 3$
$f''(x) = -4$
$F(x) = \int(-2x^2 + 3x + 4)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 5\frac{1}{8}[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-2 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2x^2 + 3x + 4 = 0$

$-2x^2 + 3x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 4}}{2 \cdot (-2)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{-4}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm 6,4}{-4}$
$x_1 = \dfrac{-3 + 6,4}{-4}$ $x_2 = \dfrac{-3 - 6,4}{-4}$
$x_1 = -0,851$ $x_2 = 2,35$
$\underline{x_1 = -0,851;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2,35;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-0,851$	$< x <$	$2,35$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-0,851; 2,35[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -0,851[\quad \cup \quad]2,35; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -4x + 3 = 0$

$-4x + 3 = 0 \qquad / -3$
$-4x = -3 \qquad / : (-4)$
$x = \dfrac{-3}{-4}$
$x = \dfrac{3}{4}$
$\underline{x_3 = \frac{3}{4};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(\frac{3}{4}) = -4$

$f''(\frac{3}{4}) < 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{Hochpunkt:}(\frac{3}{4}/5\frac{1}{8})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{3}{4}$	$< x$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	

$\underline{x \in]-\infty; \frac{3}{4}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]\frac{3}{4}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

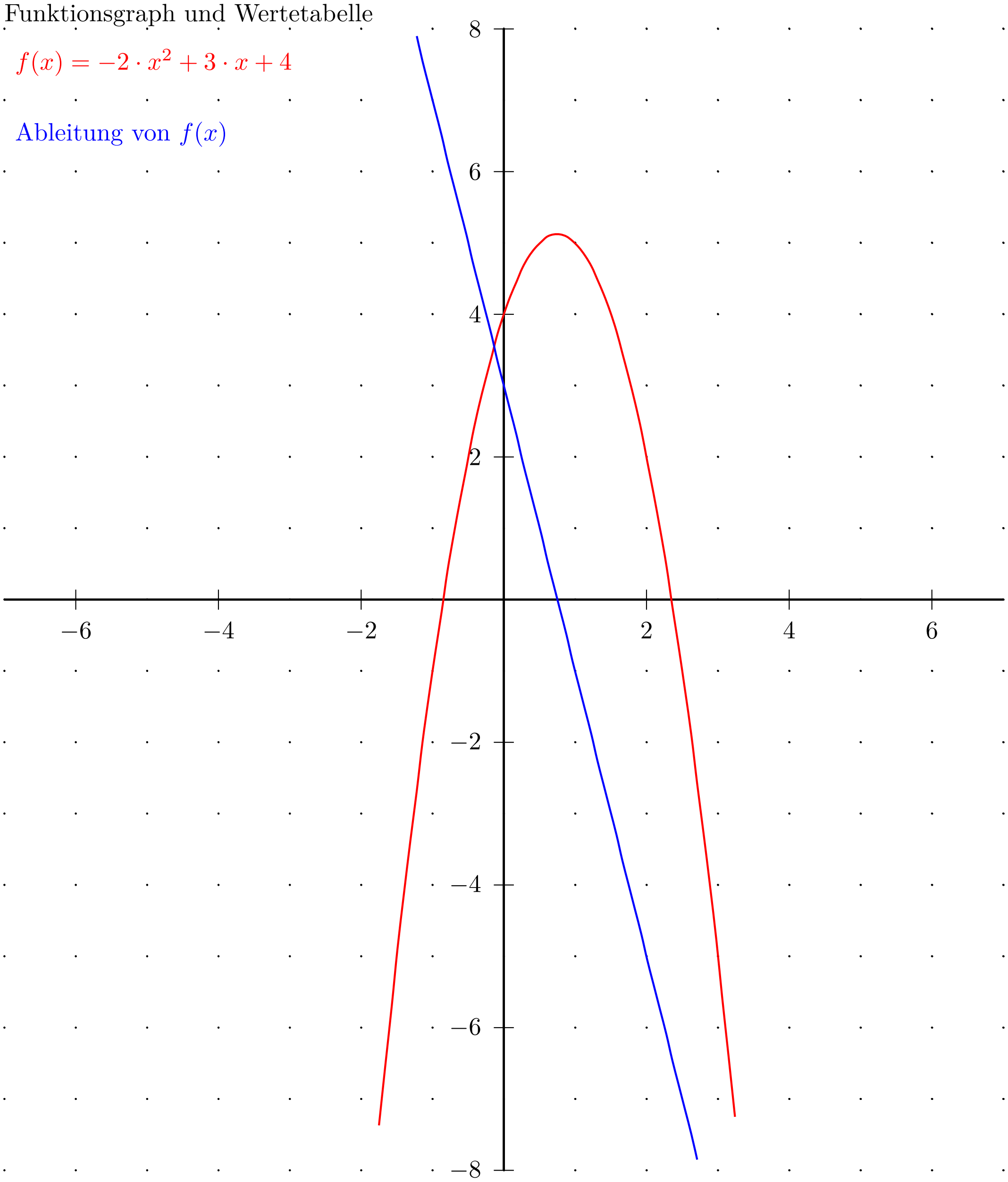
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-0,851}^{2,35} \left(-2x^2 + 3x + 4\right) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-0,851}^{2,35}$$

$$= \left(-\frac{2}{3} \cdot 2,35^3 + 1\frac{1}{2} \cdot 2,35^2 + 4 \cdot 2,35\right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-0,851)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-0,851)^2 + 4 \cdot (-0,851)\right)$$

$$= (9,03) - (-1,91) = 10,9$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-115	31	-4
$-6\frac{1}{2}$	-100	29	-4
-6	-86	27	-4
$-5\frac{1}{2}$	-73	25	-4
-5	-61	23	-4
$-4\frac{1}{2}$	-50	21	-4
-4	-40	19	-4
$-3\frac{1}{2}$	-31	17	-4
-3	-23	15	-4
$-2\frac{1}{2}$	-16	13	-4
-2	-10	11	-4
$-1\frac{1}{2}$	-5	9	-4
-1	-1	7	-4
$-\frac{1}{2}$	2	5	-4
0	4	3	-4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	3	-4
$\frac{1}{2}$	5	1	-4
1	5	-1	-4
$1\frac{1}{2}$	4	-3	-4
2	2	-5	-4
$2\frac{1}{2}$	-1	-7	-4
3	-5	-9	-4
$3\frac{1}{2}$	-10	-11	-4
4	-16	-13	-4
$4\frac{1}{2}$	-23	-15	-4
5	-31	-17	-4
$5\frac{1}{2}$	-40	-19	-4
6	-50	-21	-4
$6\frac{1}{2}$	-61	-23	-4
7	-73	-25	-4

Aufgabe (16)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2 + 6x - 2 = (x + 6,32)(x - 0,317)$
$f'(x) = 2x + 6$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2 + 6x - 2)dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-11), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1 + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 6 \cdot (-x) - 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 6x - 2 = 0$

$1x^2 + 6x - 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 6,63}{2}$
$x_1 = \frac{-6 + 6,63}{2}$ $x_2 = \frac{-6 - 6,63}{2}$
$x_1 = 0,317$ $x_2 = -6,32$
$\underline{x_1 = -6,32;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0,317;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-6,32$	$< x <$	$0,317$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -6,32[\quad \cup \quad]0,317; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-6,32; 0,317[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 6 = 0$

$2x + 6 = 0 \qquad / - 6$
$2x = -6 \qquad / : 2$
$x = \frac{-6}{2}$
$x = -3$
$\underline{x_3 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-3) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-3/-11)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-3;\infty[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend

$x \in]-\infty;-3[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

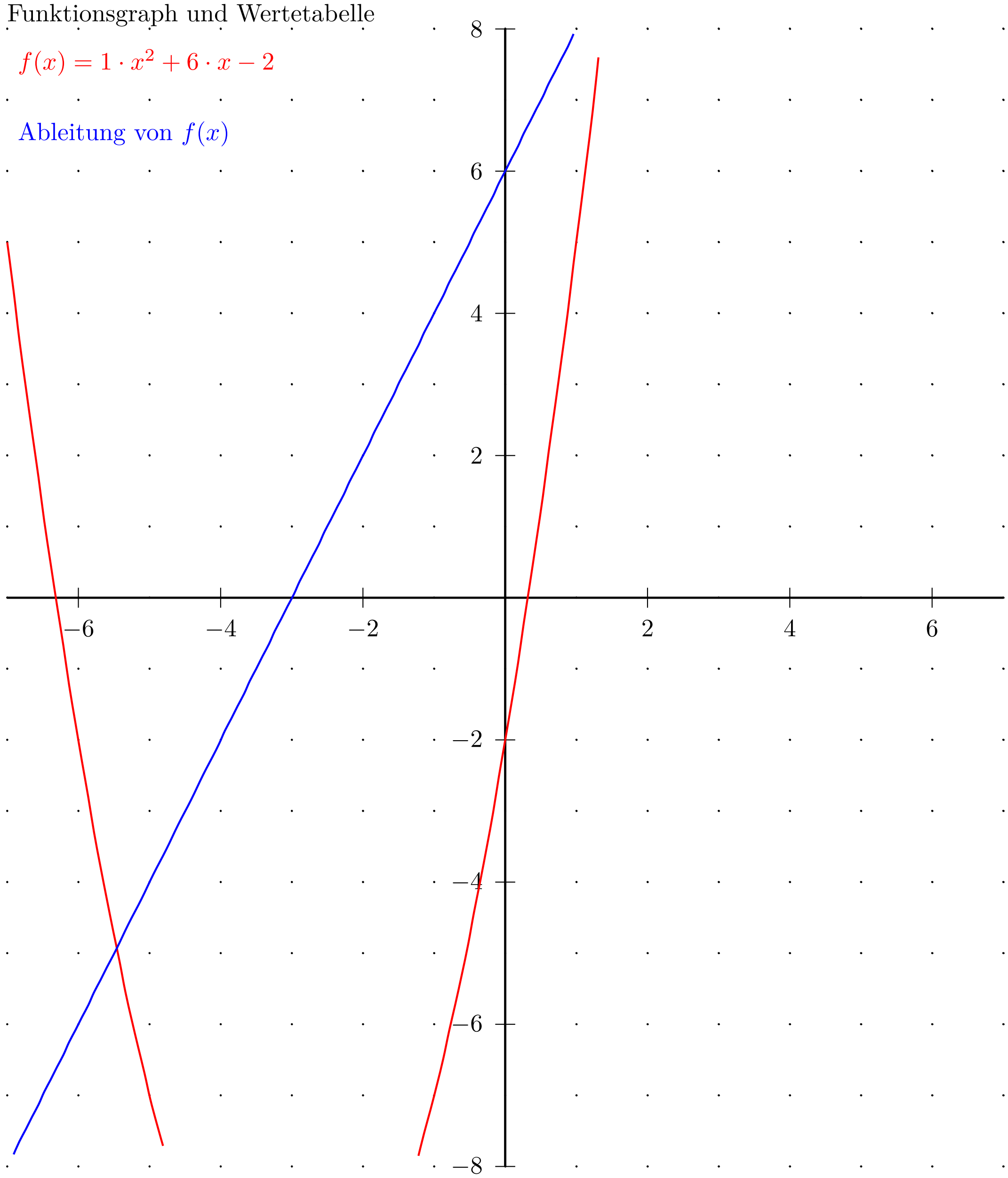
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-6,32}^{0,317} \left(x^2 + 6x - 2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2x\right]_{-6,32}^{0,317}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 0,317^3 + 3 \cdot 0,317^2 - 2 \cdot 0,317\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-6,32)^3 + 3 \cdot (-6,32)^2 - 2 \cdot (-6,32)\right)$$

$$= (-0,322) - (48,3) = -48,6$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	5	-8	2
$-6\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	-7	2
-6	-2	-6	2
$-5\frac{1}{2}$	$-4\frac{3}{4}$	-5	2
-5	-7	-4	2
$-4\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	-3	2
-4	-10	-2	2
$-3\frac{1}{2}$	$-10\frac{3}{4}$	-1	2
-3	-11	0	2
$-2\frac{1}{2}$	$-10\frac{3}{4}$	1	2
-2	-10	2	2
$-1\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	3	2
-1	-7	4	2
$-\frac{1}{2}$	$-4\frac{3}{4}$	5	2
0	-2	6	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-2	6	2
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	7	2
1	5	8	2
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	9	2
2	14	10	2
$2\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	11	2
3	25	12	2
$3\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	13	2
4	38	14	2
$4\frac{1}{2}$	$45\frac{1}{4}$	15	2
5	53	16	2
$5\frac{1}{2}$	$61\frac{1}{4}$	17	2
6	70	18	2
$6\frac{1}{2}$	$79\frac{1}{4}$	19	2
7	89	20	2

Aufgabe (17)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5 = -\frac{1}{3}(x + 1,9)(x - 7,9)$
$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$
$f''(x) = -\frac{2}{3}$
$F(x) = \int(-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5)dx = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 + 5x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 8[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{1}{3} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{3} \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x) + 5$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5 = 0$

$-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{10\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 3,27}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 3,27}{-\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \frac{-2 - 3,27}{-\frac{2}{3}}$$

$x_1 = -1,9 \qquad x_2 = 7,9$
$\underline{x_1 = -1,9; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 7,9; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,9$	$< x <$	$7,9$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1,9; 7,9[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1,9[\quad \cup \quad]7,9; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -\dfrac{2}{3}x + 2 = 0$

$-\dfrac{2}{3}x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-\dfrac{2}{3}x = -2 \qquad / : \left(-\dfrac{2}{3}\right)$
$x = \dfrac{-2}{-\frac{2}{3}}$
$x = 3$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(3) = -\frac{2}{3}$
$f''(3) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(3/8)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

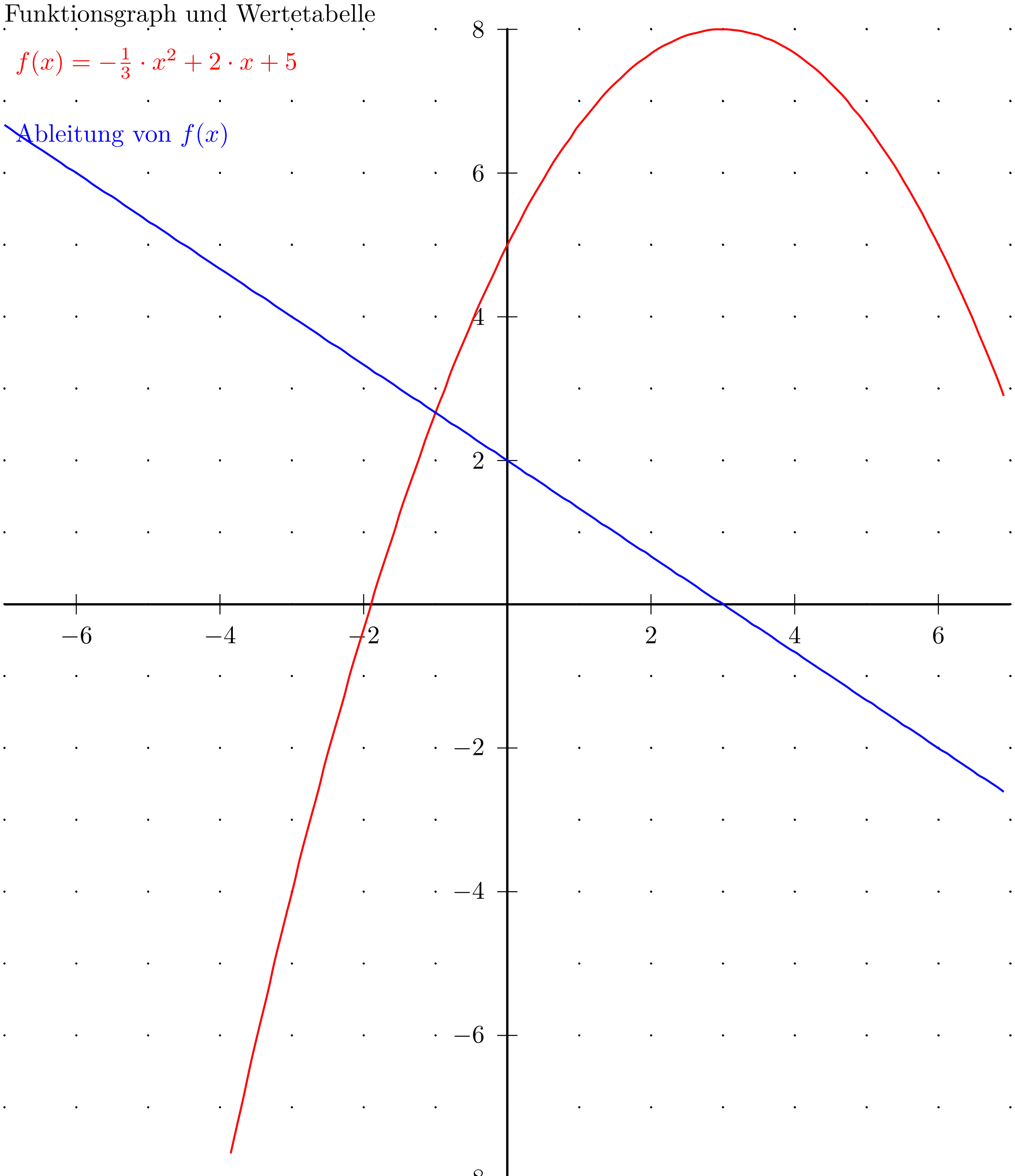
	$x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-1,9}^{7,9} \left(-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 5\right) dx = \left[-\frac{1}{9}x^3 + x^2 + 5x\right]_{-1,9}^{7,9}$
$= \left(-\frac{1}{9} \cdot 7,9^3 + 1 \cdot 7,9^2 + 5 \cdot 7,9\right) - \left(-\frac{1}{9} \cdot (-1,9)^3 + 1 \cdot (-1,9)^2 + 5 \cdot (-1,9)\right)$
$= (47,1) - (-5,13) = 52,3$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-25\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$-22\frac{1}{12}$	$6\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-6	-19	6	$-\frac{2}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{12}$	$5\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-5	$-13\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$-10\frac{3}{4}$	5	$-\frac{2}{3}$
-4	$-8\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{12}$	$4\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-3	-4	4	$-\frac{2}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{12}$	$3\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
-2	$-\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	3	$-\frac{2}{3}$
-1	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
0	5	2	$-\frac{2}{3}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	2	$-\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$1\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
1	$6\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	1	$-\frac{2}{3}$
2	$7\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{11}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
3	8	0	$-\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$7\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
4	$7\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{2}{3}$
5	$6\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{12}$	$-1\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
6	5	-2	$-\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$-2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
7	$2\frac{2}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Aufgabe (18)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49} = -\frac{8}{49}(x+5)(x-2)$
$f'(x) = -\frac{16}{49}x - \frac{24}{49}$
$f''(x) = -\frac{16}{49}$
$F(x) = \int(-\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49})dx = -0,0544x^3 - \frac{12}{49}x^2 + 1\frac{31}{49}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 2[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{8}{49} - \frac{\frac{24}{49}}{x} + \frac{1\frac{31}{49}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{8}{49} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{8}{49} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{8}{49} \cdot (-x)^2 - \frac{24}{49} \cdot (-x) + 1\frac{31}{49}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49} = 0$

$-\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49} = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+\frac{24}{49} \pm \sqrt{\left(-\frac{24}{49}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{8}{49}\right) \cdot 1\frac{31}{49}}}{2 \cdot \left(-\frac{8}{49}\right)}$$
$$x_{1/2} = \frac{+\frac{24}{49} \pm \sqrt{1\frac{15}{49}}}{-\frac{16}{49}}$$
$$x_{1/2} = \frac{\frac{24}{49} \pm 1\frac{1}{7}}{-\frac{16}{49}}$$
$$x_1 = \frac{\frac{24}{49} + 1\frac{1}{7}}{-\frac{16}{49}} \qquad x_2 = \frac{\frac{24}{49} - 1\frac{1}{7}}{-\frac{16}{49}}$$
$x_1 = -5$ $x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -5;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-5	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-5;2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-5[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = -\frac{16}{49}x - \frac{24}{49} = 0$$
$$-\frac{16}{49}x - \frac{24}{49} = 0 \qquad / + \frac{24}{49}$$
$$-\frac{16}{49}x = \frac{24}{49} \qquad / : \left(-\frac{16}{49}\right)$$
$$x = \frac{\frac{24}{49}}{-\frac{16}{49}}$$

$x = -1\frac{1}{2}$

$\underline{x_3 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-1\frac{1}{2}) = -\frac{16}{49}$

$f''(-1\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1\frac{1}{2}/2)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1\frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

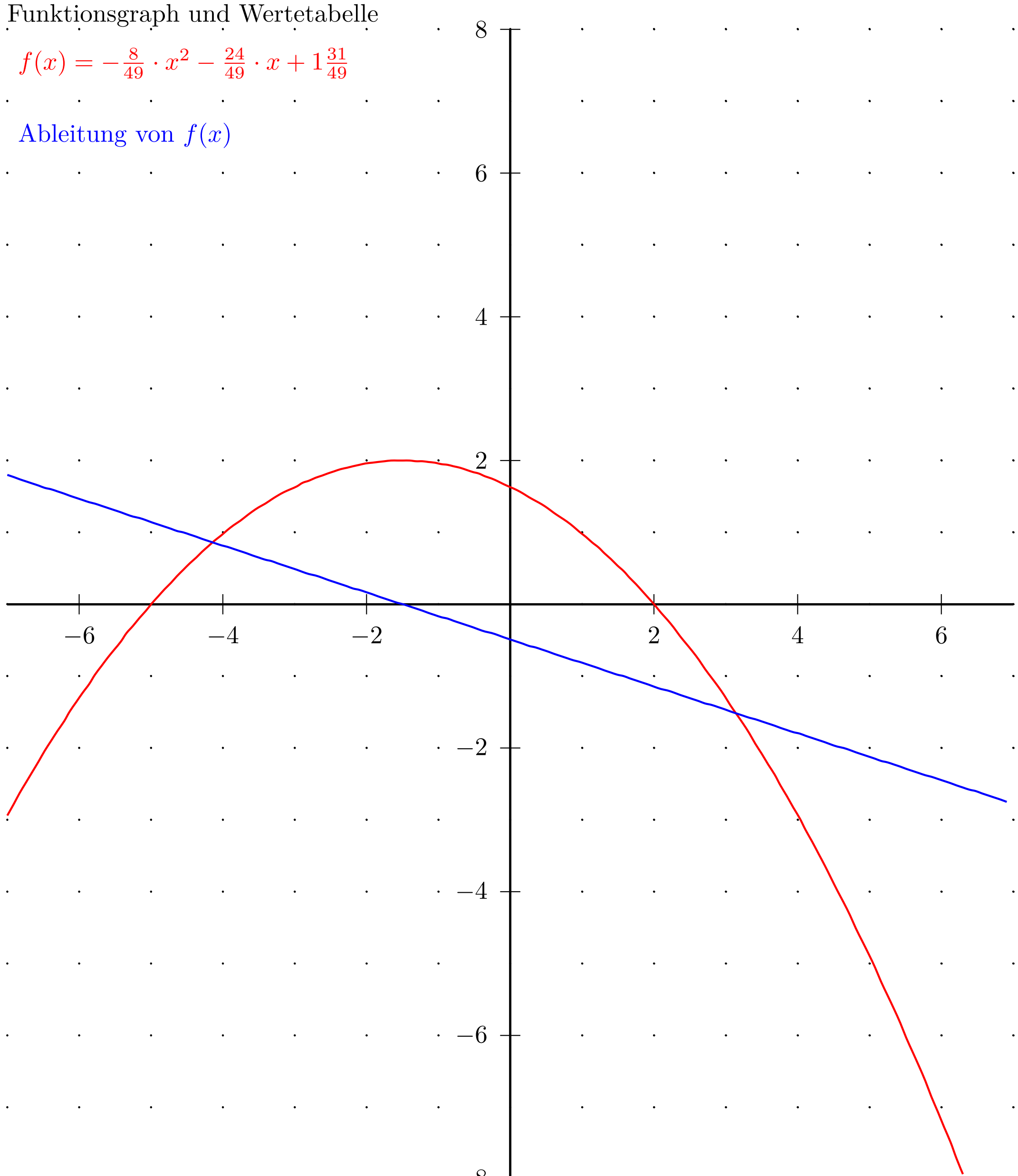
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-5}^{2} \left(-\frac{8}{49}x^2 - \frac{24}{49}x + 1\frac{31}{49}\right) dx = \left[-0,0544x^3 - \frac{12}{49}x^2 + 1\frac{31}{49}x\right]_{-5}^{2}$

$= \left(-0,0544 \cdot 2^3 - \frac{12}{49} \cdot 2^2 + 1\frac{31}{49} \cdot 2\right) - \left(-0,0544 \cdot (-5)^3 - \frac{12}{49} \cdot (-5)^2 + 1\frac{31}{49} \cdot (-5)\right)$

$= (1,85) - (-7,48) = 9\frac{1}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2\frac{46}{49}$	$1\frac{39}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$-6\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{49}$	$1\frac{31}{49}$	$-\frac{16}{49}$
-6	$-1\frac{15}{49}$	$1\frac{23}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{30}{49}$	$1\frac{15}{49}$	$-\frac{16}{49}$
-5	0	$1\frac{1}{7}$	$-\frac{16}{49}$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{26}{49}$	$\frac{48}{49}$	$-\frac{16}{49}$
-4	$\frac{48}{49}$	$\frac{40}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{17}{49}$	$\frac{32}{49}$	$-\frac{16}{49}$
-3	$1\frac{31}{49}$	$\frac{24}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$-2\frac{1}{2}$	$1\frac{41}{49}$	$\frac{16}{49}$	$-\frac{16}{49}$
-2	$1\frac{47}{49}$	$\frac{8}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$-1\frac{1}{2}$	2	0	$-\frac{16}{49}$
-1	$1\frac{47}{49}$	$-\frac{8}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{41}{49}$	$-\frac{16}{49}$	$-\frac{16}{49}$
0	$1\frac{31}{49}$	$-\frac{24}{49}$	$-\frac{16}{49}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$1\frac{31}{49}$	$-\frac{24}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{17}{49}$	$-\frac{32}{49}$	$-\frac{16}{49}$
1	$\frac{48}{49}$	$-\frac{40}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{26}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$-\frac{16}{49}$
2	0	$-1\frac{1}{7}$	$-\frac{16}{49}$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{30}{49}$	$-1\frac{15}{49}$	$-\frac{16}{49}$
3	$-1\frac{15}{49}$	$-1\frac{23}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{49}$	$-1\frac{31}{49}$	$-\frac{16}{49}$
4	$-2\frac{46}{49}$	$-1\frac{39}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$4\frac{1}{2}$	$-3\frac{43}{49}$	$-1\frac{47}{49}$	$-\frac{16}{49}$
5	$-4\frac{44}{49}$	$-2\frac{6}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$5\frac{1}{2}$	-6	$-2\frac{2}{7}$	$-\frac{16}{49}$
6	$-7\frac{9}{49}$	$-2\frac{22}{49}$	$-\frac{16}{49}$
$6\frac{1}{2}$	$-8\frac{22}{49}$	$-2\frac{30}{49}$	$-\frac{16}{49}$
7	$-9\frac{39}{49}$	$-2\frac{38}{49}$	$-\frac{16}{49}$

Aufgabe (19)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81} = -\frac{32}{81}(x+5)(x-4)$
$f'(x) = -\frac{64}{81}x - \frac{32}{81}$
$f''(x) = -\frac{64}{81}$
$F(x) = \int(-\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81})dx = -0,132x^3 - \frac{16}{81}x^2 + 7\frac{73}{81}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 8[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{32}{81} - \frac{\frac{32}{81}}{x} + \frac{7\frac{73}{81}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{32}{81} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{32}{81} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{32}{81} \cdot (-x)^2 - \frac{32}{81} \cdot (-x) + 7\frac{73}{81}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81} = 0$

$-\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{32}{81} \pm \sqrt{\left(-\frac{32}{81}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{32}{81}\right) \cdot 7\frac{73}{81}}}{2 \cdot \left(-\frac{32}{81}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{32}{81} \pm \sqrt{12\frac{52}{81}}}{-\frac{64}{81}}$$

$$x_{1/2} = \frac{\frac{32}{81} \pm 3\frac{5}{9}}{-\frac{64}{81}}$$

$$x_1 = \frac{\frac{32}{81} + 3\frac{5}{9}}{-\frac{64}{81}} \qquad x_2 = \frac{\frac{32}{81} - 3\frac{5}{9}}{-\frac{64}{81}}$$

$x_1 = -5 \qquad x_2 = 4$
$\underline{x_1 = -5;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 4;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-5	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-5; 4[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -5[\quad \cup \quad]4; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{64}{81}x - \frac{32}{81} = 0$$

$$-\frac{64}{81}x - \frac{32}{81} = 0 \qquad / + \frac{32}{81}$$

$$-\frac{64}{81}x = \frac{32}{81} \qquad / : \left(-\frac{64}{81}\right)$$

$$x = \frac{\frac{32}{81}}{-\frac{64}{81}}$$

$x = -\frac{1}{2}$

$x_3 = -\frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle

$f''(-\frac{1}{2}) = -\frac{64}{81}$

$f''(-\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-\frac{1}{2}/8)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\frac{1}{2}; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

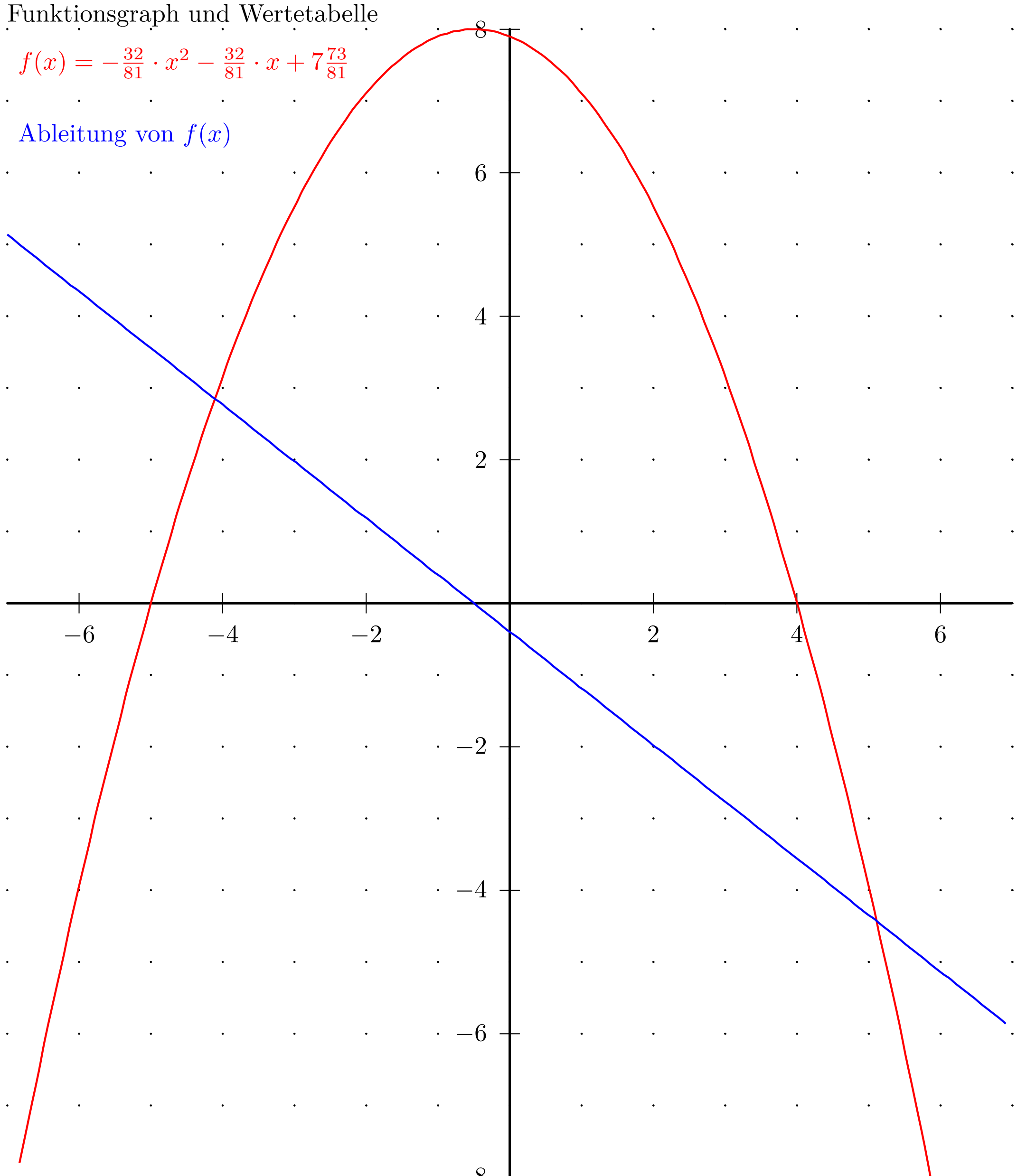
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-5}^{4} \left(-\frac{32}{81}x^2 - \frac{32}{81}x + 7\frac{73}{81}\right) dx = \left[-0,132x^3 - \frac{16}{81}x^2 + 7\frac{73}{81}x\right]_{-5}^{4}$$

$$= \left(-0,132 \cdot 4^3 - \frac{16}{81} \cdot 4^2 + 7\frac{73}{81} \cdot 4\right) - \left(-0,132 \cdot (-5)^3 - \frac{16}{81} \cdot (-5)^2 + 7\frac{73}{81} \cdot (-5)\right)$$

$$= (20) - (-28) = 48$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-8\frac{56}{81}$	$5\frac{11}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$-6\frac{1}{2}$	$-6\frac{2}{9}$	$4\frac{20}{27}$	$-\frac{64}{81}$
-6	$-3\frac{77}{81}$	$4\frac{28}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{71}{81}$	$3\frac{77}{81}$	$-\frac{64}{81}$
-5	0	$3\frac{5}{9}$	$-\frac{64}{81}$
$-4\frac{1}{2}$	$1\frac{55}{81}$	$3\frac{13}{81}$	$-\frac{64}{81}$
-4	$3\frac{13}{81}$	$2\frac{62}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$-3\frac{1}{2}$	$4\frac{4}{9}$	$2\frac{10}{27}$	$-\frac{64}{81}$
-3	$5\frac{43}{81}$	$1\frac{79}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{34}{81}$	$1\frac{47}{81}$	$-\frac{64}{81}$
-2	$7\frac{1}{9}$	$1\frac{5}{27}$	$-\frac{64}{81}$
$-1\frac{1}{2}$	$7\frac{49}{81}$	$\frac{64}{81}$	$-\frac{64}{81}$
-1	$7\frac{73}{81}$	$\frac{32}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$-\frac{1}{2}$	8	0	$-\frac{64}{81}$
0	$7\frac{73}{81}$	$-\frac{32}{81}$	$-\frac{64}{81}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$7\frac{73}{81}$	$-\frac{32}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$\frac{1}{2}$	$7\frac{49}{81}$	$-\frac{64}{81}$	$-\frac{64}{81}$
1	$7\frac{1}{9}$	$-1\frac{5}{27}$	$-\frac{64}{81}$
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{34}{81}$	$-1\frac{47}{81}$	$-\frac{64}{81}$
2	$5\frac{43}{81}$	$-1\frac{79}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{4}{9}$	$-2\frac{10}{27}$	$-\frac{64}{81}$
3	$3\frac{13}{81}$	$-2\frac{62}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{55}{81}$	$-3\frac{13}{81}$	$-\frac{64}{81}$
4	0	$-3\frac{5}{9}$	$-\frac{64}{81}$
$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{71}{81}$	$-3\frac{77}{81}$	$-\frac{64}{81}$
5	$-3\frac{77}{81}$	$-4\frac{28}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$5\frac{1}{2}$	$-6\frac{2}{9}$	$-4\frac{20}{27}$	$-\frac{64}{81}$
6	$-8\frac{56}{81}$	$-5\frac{11}{81}$	$-\frac{64}{81}$
$6\frac{1}{2}$	$-11\frac{29}{81}$	$-5\frac{43}{81}$	$-\frac{64}{81}$
7	$-14\frac{2}{9}$	$-5\frac{25}{27}$	$-\frac{64}{81}$

Aufgabe (20)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$
$f'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$
$f''(x) = -2\frac{1}{2}$
$F(x) = \int(-1\frac{1}{4}x^2 + 5x)dx = -\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 5[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-1\frac{1}{4} + \frac{5}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = 0$
$x(-1\frac{1}{4}x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -1\frac{1}{4}x + 5 = 0$
$-1\frac{1}{4}x + 5 = 0 \qquad / -5$
$-1\frac{1}{4}x = -5 \qquad / : \left(-1\frac{1}{4}\right)$
$x = \frac{-5}{-1\frac{1}{4}}$
$x = 4$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0;4[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5 = 0$

$-2\frac{1}{2}x + 5 = 0 \qquad / -5$
$-2\frac{1}{2}x = -5 \qquad / : \left(-2\frac{1}{2}\right)$
$x = \frac{-5}{-2\frac{1}{2}}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(2) = -2\frac{1}{2}$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/5)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 2[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend

$x \in]2; \infty[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

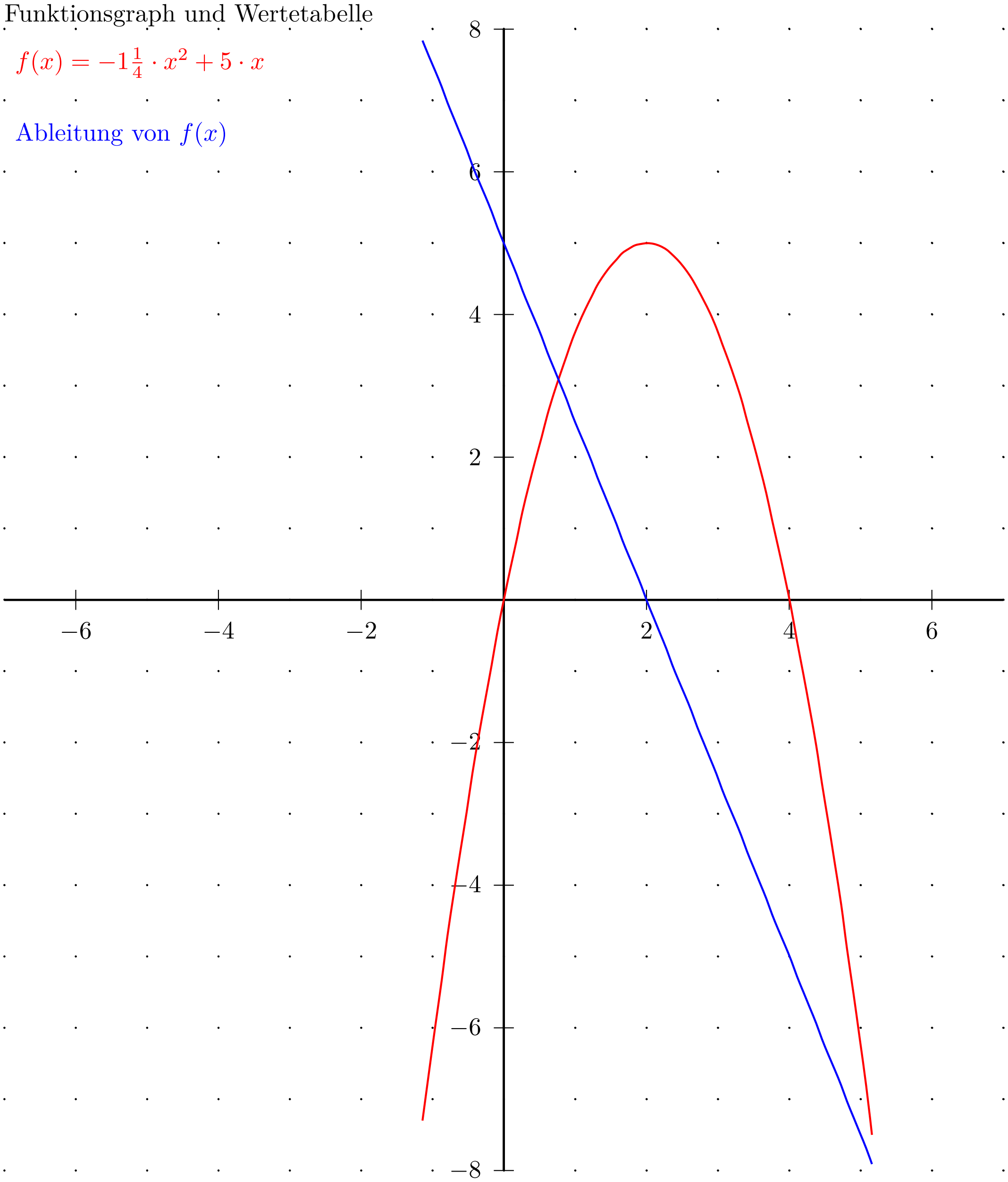
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_0^4 \left(-1\frac{1}{4}x^2 + 5x\right) dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$= \left(-\frac{5}{12} \cdot 4^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 4^2\right) - \left(-\frac{5}{12} \cdot 0^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$$

$$= \left(13\frac{1}{3}\right) - (0) = 13\frac{1}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-96\frac{1}{4}$	$22\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$-6\frac{1}{2}$	$-85\frac{5}{16}$	$21\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-6	-75	20	$-2\frac{1}{2}$
$-5\frac{1}{2}$	$-65\frac{5}{16}$	$18\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-5	$-56\frac{1}{4}$	$17\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$-47\frac{13}{16}$	$16\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-4	-40	15	$-2\frac{1}{2}$
$-3\frac{1}{2}$	$-32\frac{13}{16}$	$13\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-3	$-26\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$-20\frac{5}{16}$	$11\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-2	-15	10	$-2\frac{1}{2}$
$-1\frac{1}{2}$	$-10\frac{5}{16}$	$8\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-1	$-6\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
0	0	5	$-2\frac{1}{2}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	5	$-2\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
1	$3\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
2	5	0	$-2\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$-1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
3	$3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$-3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
4	0	-5	$-2\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$-6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
5	$-6\frac{1}{4}$	$-7\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$-10\frac{5}{16}$	$-8\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
6	-15	-10	$-2\frac{1}{2}$
$6\frac{1}{2}$	$-20\frac{5}{16}$	$-11\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
7	$-26\frac{1}{4}$	$-12\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$

Aufgabe (21)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x = -\frac{3}{4}(x+4)x$
$f'(x) = -1\frac{1}{2}x - 3$
$f''(x) = -1\frac{1}{2}$
$F(x) = \int(-\frac{3}{4}x^2 - 3x)dx = -\frac{1}{4}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 3[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{3}{4} - \frac{3}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{3}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{3}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{3}{4} \cdot (-x)^2 - 3 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x = 0$
$x(-\frac{3}{4}x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{3}{4}x - 3 = 0$
$-\frac{3}{4}x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$-\frac{3}{4}x = 3 \qquad / : (-\frac{3}{4})$
$x = \frac{3}{-\frac{3}{4}}$
$x = -4$
$\underline{x_1 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-4; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -1\frac{1}{2}x - 3 = 0$

$-1\frac{1}{2}x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$-1\frac{1}{2}x = 3 \qquad / : \left(-1\frac{1}{2}\right)$
$x = \frac{3}{-1\frac{1}{2}}$
$x = -2$
$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = -1\frac{1}{2}$
$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2/3)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend

$x \in]-2; \infty[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

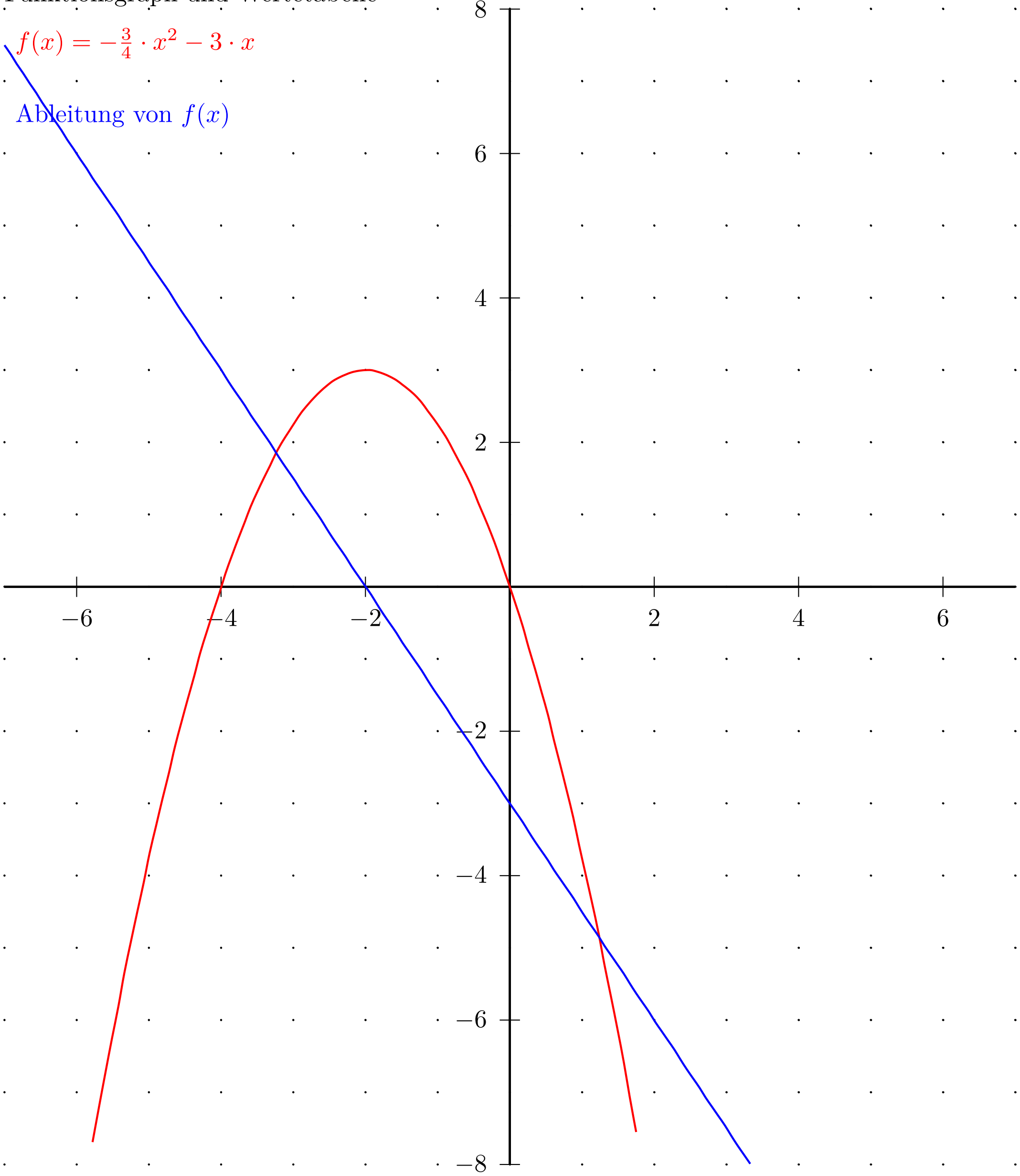
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-4}^{0} \left(-\frac{3}{4}x^2 - 3x\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^{0}$

$= \left(-\frac{1}{4} \cdot 0^3 - 1\frac{1}{2} \cdot 0^2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-4)^3 - 1\frac{1}{2} \cdot (-4)^2\right)$

$= (0) - (-8) = 8$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-15\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
$-6\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{16}$	$6\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
-6	-9	6	$-1\frac{1}{2}$
$-5\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	$5\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
-5	$-3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
-4	0	3	$-1\frac{1}{2}$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{16}$	$2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
-3	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{16}$	$\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
-2	3	0	$-1\frac{1}{2}$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
-1	$2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{16}$	$-2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
0	0	-3	$-1\frac{1}{2}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-3	$-1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{16}$	$-3\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
1	$-3\frac{3}{4}$	$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	$-5\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
2	-9	-6	$-1\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{16}$	$-6\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
3	$-15\frac{3}{4}$	$-7\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-19\frac{11}{16}$	$-8\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
4	-24	-9	$-1\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{2}$	$-28\frac{11}{16}$	$-9\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
5	$-33\frac{3}{4}$	$-10\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$-39\frac{3}{16}$	$-11\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
6	-45	-12	$-1\frac{1}{2}$
$6\frac{1}{2}$	$-51\frac{3}{16}$	$-12\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$
7	$-57\frac{3}{4}$	$-13\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$

Aufgabe (22)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 5 = \frac{5}{9}(x+3)(x-3)$
$f'(x) = 1\frac{1}{9}x$
$f''(x) = 1\frac{1}{9}$
$F(x) = \int(\frac{5}{9}x^2 - 5)dx = \frac{5}{27}x^3 - 5x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-5), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(\frac{5}{9} - \dfrac{5}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{5}{9} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{5}{9} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{5}{9} \cdot (-x)^2 - 5$
$f(-x) = \frac{5}{9} \cdot x^2 - 5$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 5 = 0$

$\frac{5}{9}x^2 - 5 = 0 \quad / + 5$
$\frac{5}{9}x^2 = 5 \quad / : \frac{5}{9}$
$x^2 = \dfrac{5}{\frac{5}{9}}$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$
$x_1 = -3;$ 1-fache Nullstelle
$x_2 = 3;$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3; 3[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 1\dfrac{1}{9}x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_3 = 0;$ 1-fache Nullstelle
$f''(0) = 1\dfrac{1}{9} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(0/-5)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

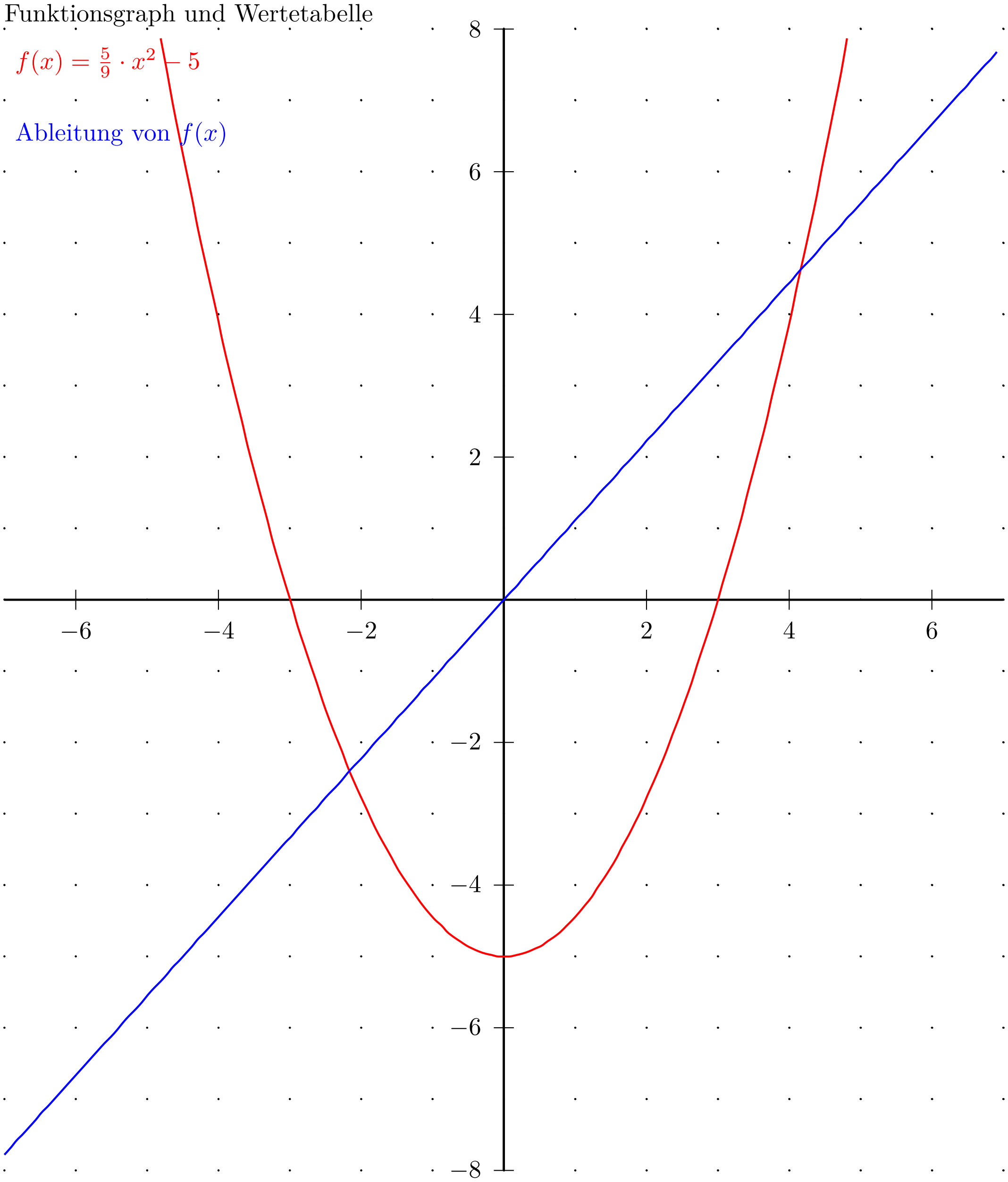
$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-3}^{3} \left(\frac{5}{9}x^2 - 5\right) dx = \left[\frac{5}{27}x^3 - 5x\right]_{-3}^{3}$$
$$= \left(\frac{5}{27} \cdot 3^3 - 5 \cdot 3\right) - \left(\frac{5}{27} \cdot (-3)^3 - 5 \cdot (-3)\right)$$
$$= (-10) - (10) = -20$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$22\frac{2}{9}$	$-7\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-6\frac{1}{2}$	$18\frac{17}{36}$	$-7\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$
-6	15	$-6\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$
$-5\frac{1}{2}$	$11\frac{29}{36}$	$-6\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$
-5	$8\frac{8}{9}$	$-5\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-4\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	-5	$1\frac{1}{9}$
-4	$3\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{36}$	$-3\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$
-3	0	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{36}$	$-2\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$
-2	$-2\frac{7}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$
-1	$-4\frac{4}{9}$	$-1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{2}$	$-4\frac{31}{36}$	$-\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$
0	-5	0	$1\frac{1}{9}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-5	0	$1\frac{1}{9}$
$\frac{1}{2}$	$-4\frac{31}{36}$	$\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$
1	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$
2	$-2\frac{7}{9}$	$2\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{36}$	$2\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$
3	0	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{36}$	$3\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$
4	$3\frac{8}{9}$	$4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	5	$1\frac{1}{9}$
5	$8\frac{8}{9}$	$5\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$5\frac{1}{2}$	$11\frac{29}{36}$	$6\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$
6	15	$6\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$
$6\frac{1}{2}$	$18\frac{17}{36}$	$7\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$
7	$22\frac{2}{9}$	$7\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$

Aufgabe (23)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 12x^2 + 12x = 12(x+1)x$
$f'(x) = 24x + 12$
$f''(x) = 24$
$F(x) = \int(12x^2 + 12x)dx = 4x^3 + 6x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-3), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(12 + \frac{12}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [12 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [12 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 12 \cdot (-x)^2 + 12 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 12x^2 + 12x = 0$
$x(12x + 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 12x + 12 = 0$
$12x + 12 = 0 \qquad / - 12$
$12x = -12 \qquad / : 12$
$x = \frac{-12}{12}$
$x = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 24x + 12 = 0$

$24x + 12 = 0 \qquad / - 12$
$24x = -12 \qquad / : 24$
$x = \frac{-12}{24}$
$x = -\frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-\frac{1}{2}) = 24 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-\frac{1}{2}/-3)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

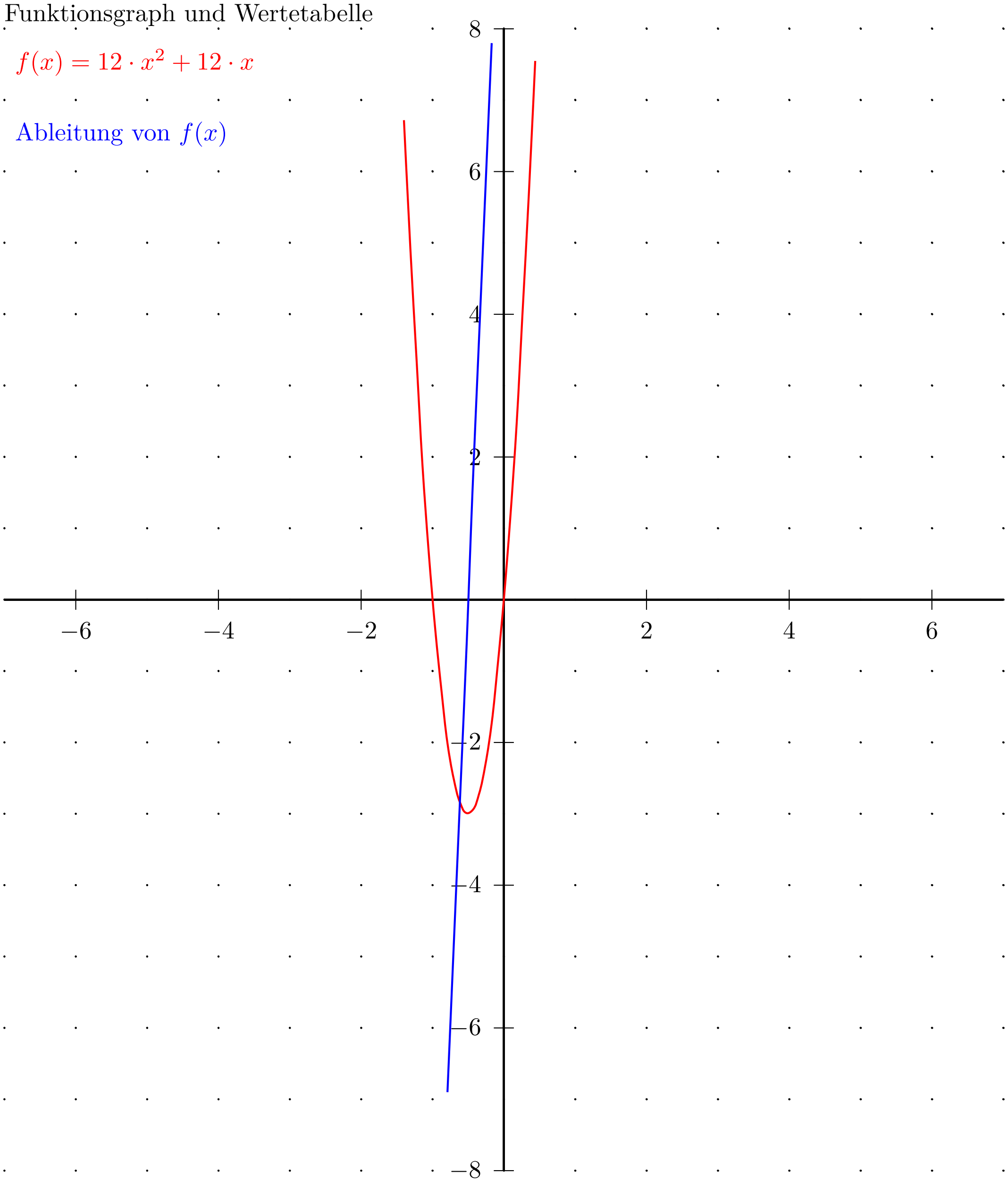
$\underline{x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{0} \left(12x^2 + 12x\right) dx = \left[4x^3 + 6x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$= \left(4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2\right) - \left(4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2\right)$$
$$= (0) - (2) = -2$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	504	-156	24
$-6\frac{1}{2}$	429	-144	24
-6	360	-132	24
$-5\frac{1}{2}$	297	-120	24
-5	240	-108	24
$-4\frac{1}{2}$	189	-96	24
-4	144	-84	24
$-3\frac{1}{2}$	105	-72	24
-3	72	-60	24
$-2\frac{1}{2}$	45	-48	24
-2	24	-36	24
$-1\frac{1}{2}$	9	-24	24
-1	0	-12	24
$-\frac{1}{2}$	-3	0	24
0	0	12	24

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	12	24
$\frac{1}{2}$	9	24	24
1	24	36	24
$1\frac{1}{2}$	45	48	24
2	72	60	24
$2\frac{1}{2}$	105	72	24
3	144	84	24
$3\frac{1}{2}$	189	96	24
4	240	108	24
$4\frac{1}{2}$	297	120	24
5	360	132	24
$5\frac{1}{2}$	429	144	24
6	504	156	24
$6\frac{1}{2}$	585	168	24
7	672	180	24

Aufgabe (24)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25} = -\frac{6}{25}(x+1)(x-9)$
$f'(x) = -\frac{12}{25}x + 1\frac{23}{25}$
$f''(x) = -\frac{12}{25}$
$F(x) = \int(-\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25})dx = -\frac{2}{25}x^3 + \frac{24}{25}x^2 + 2\frac{4}{25}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 6[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{6}{25} + \frac{1\frac{23}{25}}{x} + \frac{2\frac{4}{25}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{6}{25} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{6}{25} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{6}{25} \cdot (-x)^2 + 1\frac{23}{25} \cdot (-x) + 2\frac{4}{25}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25} = 0$

$-\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{23}{25} \pm \sqrt{1\frac{23}{25}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{6}{25}\right) \cdot 2\frac{4}{25}}}{2 \cdot \left(-\frac{6}{25}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{23}{25} \pm \sqrt{5\frac{19}{25}}}{-\frac{12}{25}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{23}{25} \pm 2\frac{2}{5}}{-\frac{12}{25}}$$

$$x_1 = \frac{-1\frac{23}{25} + 2\frac{2}{5}}{-\frac{12}{25}} \qquad x_2 = \frac{-1\frac{23}{25} - 2\frac{2}{5}}{-\frac{12}{25}}$$

$x_1 = -1$ $x_2 = 9$
$\underline{x_1 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 9;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	9	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1; 9[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]9; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -\frac{12}{25}x + 1\frac{23}{25} = 0$

$-\frac{12}{25}x + 1\frac{23}{25} = 0 \qquad / -1\frac{23}{25}$

$-\frac{12}{25}x = -1\frac{23}{25} \qquad / : \left(-\frac{12}{25}\right)$

$x = \frac{-1\frac{23}{25}}{-\frac{12}{25}}$

$x = 4$

$\underline{x_3 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(4) = -\frac{12}{25}$

$f''(4) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(4/6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 4[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]4; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

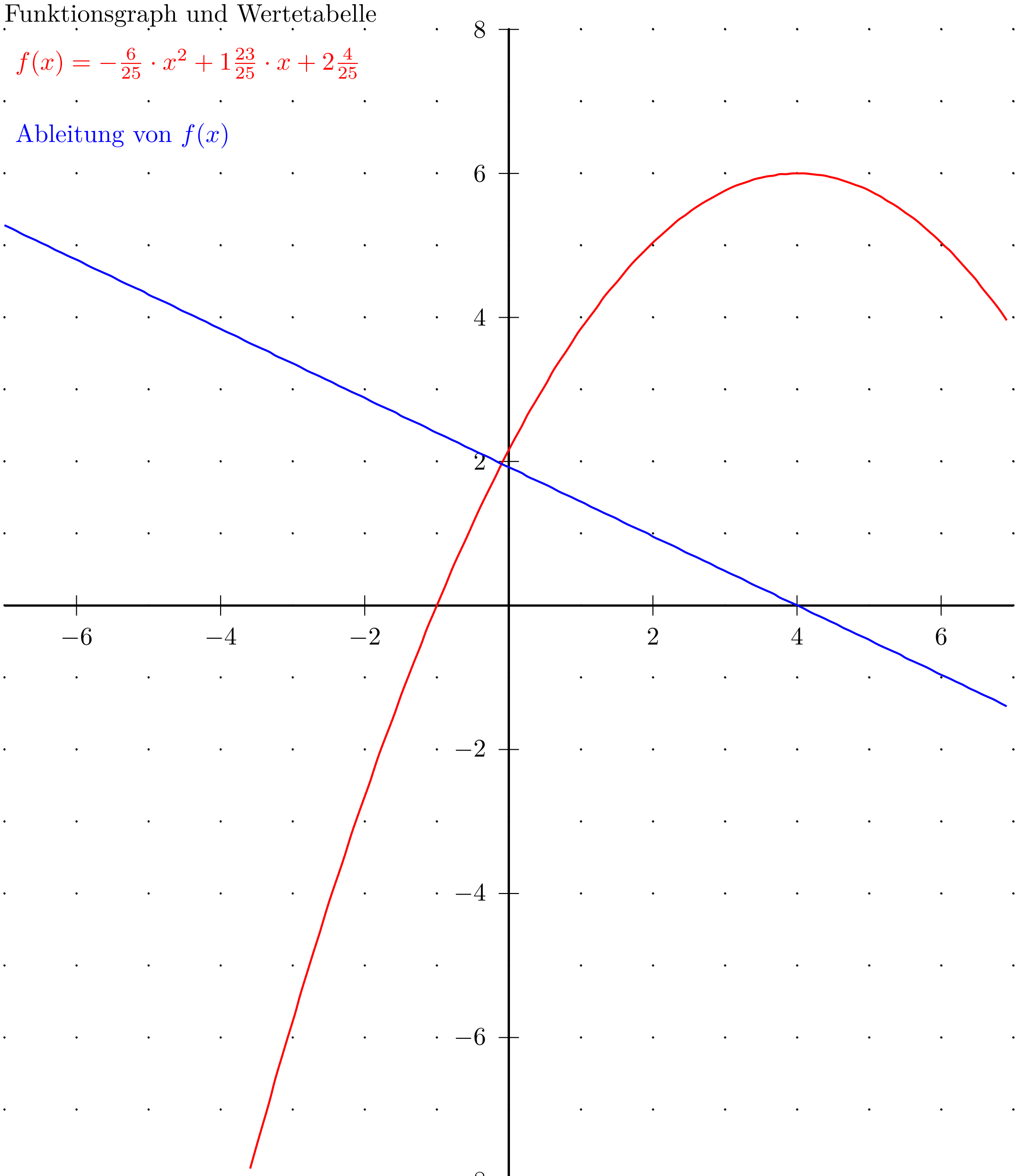
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{9} \left(-\frac{6}{25}x^2 + 1\frac{23}{25}x + 2\frac{4}{25}\right) dx = \left[-\frac{2}{25}x^3 + \frac{24}{25}x^2 + 2\frac{4}{25}x\right]_{-1}^{9}$$

$$= \left(-\frac{2}{25} \cdot 9^3 + \frac{24}{25} \cdot 9^2 + 2\frac{4}{25} \cdot 9\right) - \left(-\frac{2}{25} \cdot (-1)^3 + \frac{24}{25} \cdot (-1)^2 + 2\frac{4}{25} \cdot (-1)\right)$$

$$= \left(38\frac{22}{25}\right) - \left(-1\frac{3}{25}\right) = 40$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-23\frac{1}{25}$	$5\frac{7}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$-6\frac{1}{2}$	$-20\frac{23}{50}$	$5\frac{1}{25}$	$-\frac{12}{25}$
-6	-18	$4\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{25}$
$-5\frac{1}{2}$	$-15\frac{33}{50}$	$4\frac{14}{25}$	$-\frac{12}{25}$
-5	$-13\frac{11}{25}$	$4\frac{8}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$-4\frac{1}{2}$	$-11\frac{17}{50}$	$4\frac{2}{25}$	$-\frac{12}{25}$
-4	$-9\frac{9}{25}$	$3\frac{21}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$-3\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{5}$	$-\frac{12}{25}$
-3	$-5\frac{19}{25}$	$3\frac{9}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{50}$	$3\frac{3}{25}$	$-\frac{12}{25}$
-2	$-2\frac{16}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{50}$	$2\frac{16}{25}$	$-\frac{12}{25}$
-1	0	$2\frac{2}{5}$	$-\frac{12}{25}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{50}$	$2\frac{4}{25}$	$-\frac{12}{25}$
0	$2\frac{4}{25}$	$1\frac{23}{25}$	$-\frac{12}{25}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$2\frac{4}{25}$	$1\frac{23}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{50}$	$1\frac{17}{25}$	$-\frac{12}{25}$
1	$3\frac{21}{25}$	$1\frac{11}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{25}$
2	$5\frac{1}{25}$	$\frac{24}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$2\frac{1}{2}$	$5\frac{23}{50}$	$\frac{18}{25}$	$-\frac{12}{25}$
3	$5\frac{19}{25}$	$\frac{12}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{47}{50}$	$\frac{6}{25}$	$-\frac{12}{25}$
4	6	0	$-\frac{12}{25}$
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{47}{50}$	$-\frac{6}{25}$	$-\frac{12}{25}$
5	$5\frac{19}{25}$	$-\frac{12}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{23}{50}$	$-\frac{18}{25}$	$-\frac{12}{25}$
6	$5\frac{1}{25}$	$-\frac{24}{25}$	$-\frac{12}{25}$
$6\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{25}$
7	$3\frac{21}{25}$	$-1\frac{11}{25}$	$-\frac{12}{25}$

Aufgabe (25)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25} = -\frac{9}{25}(x+9)(x-1)$
$f'(x) = -\frac{18}{25}x - 2\frac{22}{25}$
$f''(x) = -\frac{18}{25}$
$F(x) = \int(-\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25})dx = -\frac{3}{25}x^3 - 1\frac{11}{25}x^2 + 3\frac{6}{25}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 9[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{9}{25} - \frac{2\frac{22}{25}}{x} + \frac{3\frac{6}{25}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{9}{25} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{9}{25} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{9}{25} \cdot (-x)^2 - 2\frac{22}{25} \cdot (-x) + 3\frac{6}{25}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25} = 0$

$-\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+2\frac{22}{25} \pm \sqrt{\left(-2\frac{22}{25}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \cdot 3\frac{6}{25}}}{2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)}$$
$$x_{1/2} = \frac{+2\frac{22}{25} \pm \sqrt{12\frac{24}{25}}}{-\frac{18}{25}}$$
$$x_{1/2} = \frac{2\frac{22}{25} \pm 3\frac{3}{5}}{-\frac{18}{25}}$$
$$x_1 = \frac{2\frac{22}{25} + 3\frac{3}{5}}{-\frac{18}{25}} \qquad x_2 = \frac{2\frac{22}{25} - 3\frac{3}{5}}{-\frac{18}{25}}$$
$x_1 = -9$ $x_2 = 1$
$\underline{x_1 = -9; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-9	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-9; 1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -9[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = -\frac{18}{25}x - 2\frac{22}{25} = 0$$
$$-\frac{18}{25}x - 2\frac{22}{25} = 0 \qquad / + 2\frac{22}{25}$$
$$-\frac{18}{25}x = 2\frac{22}{25} \qquad / : \left(-\frac{18}{25}\right)$$
$$x = \frac{2\frac{22}{25}}{-\frac{18}{25}}$$
$x = -4$

$\underline{x_3 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-4) = -\frac{18}{25}$

$f''(-4) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-4/9)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -4[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-4; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

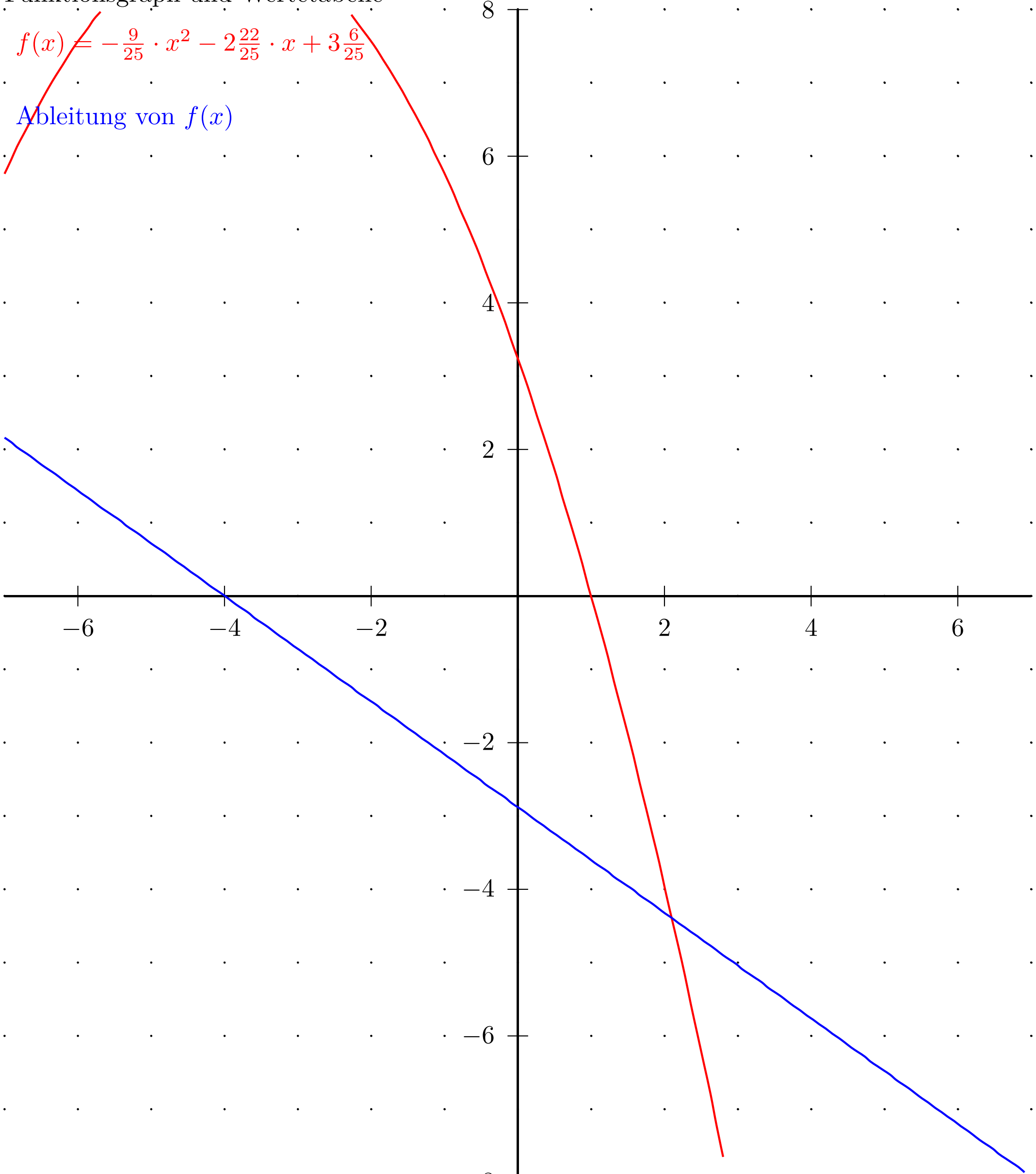
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-9}^{1} \left(-\frac{9}{25}x^2 - 2\frac{22}{25}x + 3\frac{6}{25} \right) dx = \left[-\frac{3}{25}x^3 - 1\frac{11}{25}x^2 + 3\frac{6}{25}x \right]_{-9}^{1}$$

$$= \left(-\frac{3}{25} \cdot 1^3 - 1\frac{11}{25} \cdot 1^2 + 3\frac{6}{25} \cdot 1 \right) - \left(-\frac{3}{25} \cdot (-9)^3 - 1\frac{11}{25} \cdot (-9)^2 + 3\frac{6}{25} \cdot (-9) \right)$$

$$= \left(1\frac{17}{25} \right) - \left(-58\frac{8}{25} \right) = 60$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$5\frac{19}{25}$	$2\frac{4}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$-6\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$1\frac{4}{5}$	$-\frac{18}{25}$
-6	$7\frac{14}{25}$	$1\frac{11}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$-5\frac{1}{2}$	$8,19$	$1\frac{2}{25}$	$-\frac{18}{25}$
-5	$8\frac{16}{25}$	$\frac{18}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$-4\frac{1}{2}$	$8,91$	$\frac{9}{25}$	$-\frac{18}{25}$
-4	9	0	$-\frac{18}{25}$
$-3\frac{1}{2}$	$8,91$	$-\frac{9}{25}$	$-\frac{18}{25}$
-3	$8\frac{16}{25}$	$-\frac{18}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$-2\frac{1}{2}$	$8,19$	$-1\frac{2}{25}$	$-\frac{18}{25}$
-2	$7\frac{14}{25}$	$-1\frac{11}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$-1\frac{4}{5}$	$-\frac{18}{25}$
-1	$5\frac{19}{25}$	$-2\frac{4}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$-\frac{1}{2}$	$4,59$	$-2\frac{13}{25}$	$-\frac{18}{25}$
0	$3\frac{6}{25}$	$-2\frac{22}{25}$	$-\frac{18}{25}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$3\frac{6}{25}$	$-2\frac{22}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$\frac{1}{2}$	$1,71$	$-3\frac{6}{25}$	$-\frac{18}{25}$
1	0	$-3\frac{3}{5}$	$-\frac{18}{25}$
$1\frac{1}{2}$	$-1,89$	$-3\frac{24}{25}$	$-\frac{18}{25}$
2	$-3\frac{24}{25}$	$-4\frac{8}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$2\frac{1}{2}$	$-6,21$	$-4\frac{17}{25}$	$-\frac{18}{25}$
3	$-8\frac{16}{25}$	$-5\frac{1}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$3\frac{1}{2}$	$-11\frac{1}{4}$	$-5\frac{2}{5}$	$-\frac{18}{25}$
4	$-14\frac{1}{25}$	$-5\frac{19}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$4\frac{1}{2}$	-17	$-6\frac{3}{25}$	$-\frac{18}{25}$
5	$-20\frac{4}{25}$	$-6\frac{12}{25}$	$-\frac{18}{25}$
$5\frac{1}{2}$	$-23,5$	$-6\frac{21}{25}$	$-\frac{18}{25}$
6	-27	$-7\frac{1}{5}$	$-\frac{18}{25}$
$6\frac{1}{2}$	$-30,7$	$-7\frac{14}{25}$	$-\frac{18}{25}$
7	$-34\frac{14}{25}$	$-7\frac{23}{25}$	$-\frac{18}{25}$

Aufgabe (26)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8} = -\frac{1}{8}(x+7)(x-9)$
$f'(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
$f''(x) = -\frac{1}{4}$
$F(x) = \int(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8})dx = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + 7\frac{7}{8}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 8[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{7\frac{7}{8}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{8} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{8} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{8} \cdot (-x)^2 + \frac{1}{4} \cdot (-x) + 7\frac{7}{8}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8} = 0$

$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 7\frac{7}{8}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{4}}{-\frac{1}{4}}$
$x_{1/2} = \dfrac{-\frac{1}{4} \pm 2}{-\frac{1}{4}}$
$x_1 = \dfrac{-\frac{1}{4} + 2}{-\frac{1}{4}}$ $x_2 = \dfrac{-\frac{1}{4} - 2}{-\frac{1}{4}}$
$x_1 = -7$ $x_2 = 9$
$\underline{x_1 = -7;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 9;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-7	$< x <$	9	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-7; 9[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -7[\;\cup\;]9; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$
$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \qquad / -\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4} \qquad / : \left(-\frac{1}{4}\right)$
$x = \dfrac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}$
$x = 1$
$\underline{x_3 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(1) = -\frac{1}{4}$
$f''(1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(1/8)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

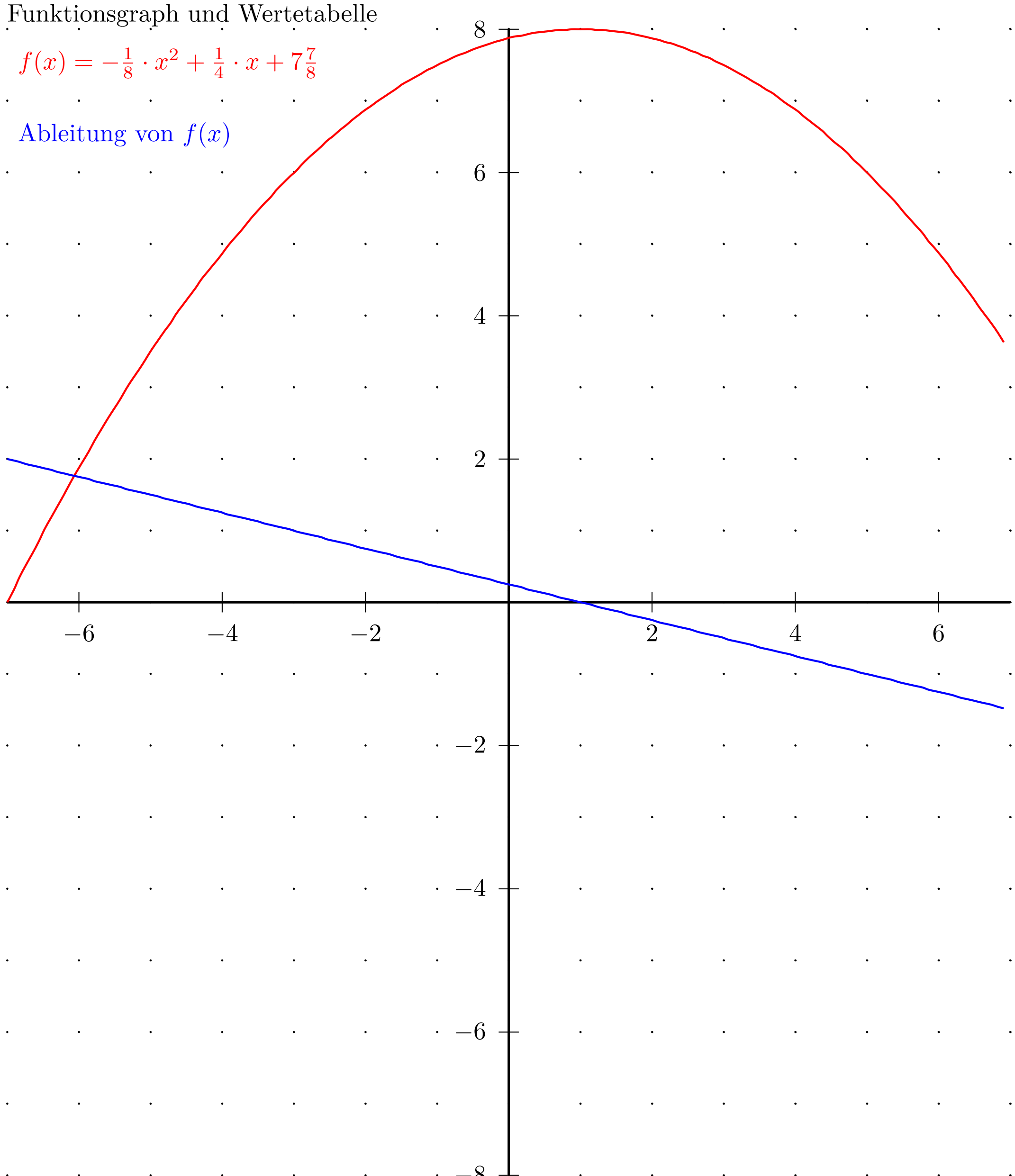
$x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-7}^{9} \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7\frac{7}{8}\right) dx = \left[-\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + 7\frac{7}{8}x\right]_{-7}^{9}$$
$$= \left(-\frac{1}{24} \cdot 9^3 + \frac{1}{8} \cdot 9^2 + 7\frac{7}{8} \cdot 9\right) - \left(-\frac{1}{24} \cdot (-7)^3 + \frac{1}{8} \cdot (-7)^2 + 7\frac{7}{8} \cdot (-7)\right)$$
$$= \left(50\frac{5}{8}\right) - \left(-34\frac{17}{24}\right) = 85\frac{1}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	0	2	$-\frac{1}{4}$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{31}{32}$	$1\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$
-6	$1\frac{7}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-5\frac{1}{2}$	$2\frac{23}{32}$	$1\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$
-5	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
$-4\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{32}$	$1\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
-4	$4\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-3\frac{1}{2}$	$5\frac{15}{32}$	$1\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$
-3	6	1	$-\frac{1}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{15}{32}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$
-2	$6\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$-1\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{32}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$
-1	$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$7\frac{23}{32}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
0	$7\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$7\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$7\frac{31}{32}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$
1	8	0	$-\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$7\frac{31}{32}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$
2	$7\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{23}{32}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
3	$7\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{32}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$
4	$6\frac{7}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$4\frac{1}{2}$	$6\frac{15}{32}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$
5	6	-1	$-\frac{1}{4}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{15}{32}$	$-1\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$
6	$4\frac{7}{8}$	$-1\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$6\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{32}$	$-1\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
7	$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

Aufgabe (27)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49} = \frac{20}{49}(x+8)(x+1)$
$f'(x) = \frac{40}{49}x + 3\frac{33}{49}$
$f''(x) = \frac{40}{49}$
$F(x) = \int(\frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49})dx = 0,136x^3 + 1\frac{41}{49}x^2 + 3\frac{13}{49}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-5), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(\frac{20}{49} + \frac{3\frac{33}{49}}{x} + \frac{3\frac{13}{49}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{20}{49} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{20}{49} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{20}{49} \cdot (-x)^2 + 3\frac{33}{49} \cdot (-x) + 3\frac{13}{49}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49} = 0$

$\frac{20}{49}x^2 + 3\frac{33}{49}x + 3\frac{13}{49} = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3\frac{33}{49} \pm \sqrt{3\frac{33}{49}^2 - 4 \cdot \frac{20}{49} \cdot 3\frac{13}{49}}}{2 \cdot \frac{20}{49}}$
$x_{1/2} = \frac{-3\frac{33}{49} \pm \sqrt{8\frac{8}{49}}}{\frac{40}{49}}$
$x_{1/2} = \frac{-3\frac{33}{49} \pm 2\frac{6}{7}}{\frac{40}{49}}$
$x_1 = \frac{-3\frac{33}{49} + 2\frac{6}{7}}{\frac{40}{49}}$ $\qquad x_2 = \frac{-3\frac{33}{49} - 2\frac{6}{7}}{\frac{40}{49}}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -8$
$\underline{x_1 = -8;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-8	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -8[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-8; -1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{40}{49}x + 3\frac{33}{49} = 0$
$\frac{40}{49}x + 3\frac{33}{49} = 0 \qquad / -3\frac{33}{49}$
$\frac{40}{49}x = -3\frac{33}{49} \qquad / : \frac{40}{49}$
$x = \frac{-3\frac{33}{49}}{\frac{40}{49}}$
$x = -4\frac{1}{2}$

$x_3=-4\frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle

$f''(-4\frac{1}{2})=\frac{40}{49}>0\Rightarrow$ Tiefpunkt:$(-4\frac{1}{2}/-5)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x<$	$-4\frac{1}{2}$	$<x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x\in]-4\frac{1}{2};\infty[\quad f'(x)>0$ streng monoton steigend

$x\in]-\infty;-4\frac{1}{2}[\quad f'(x)<0$ streng monoton fallend

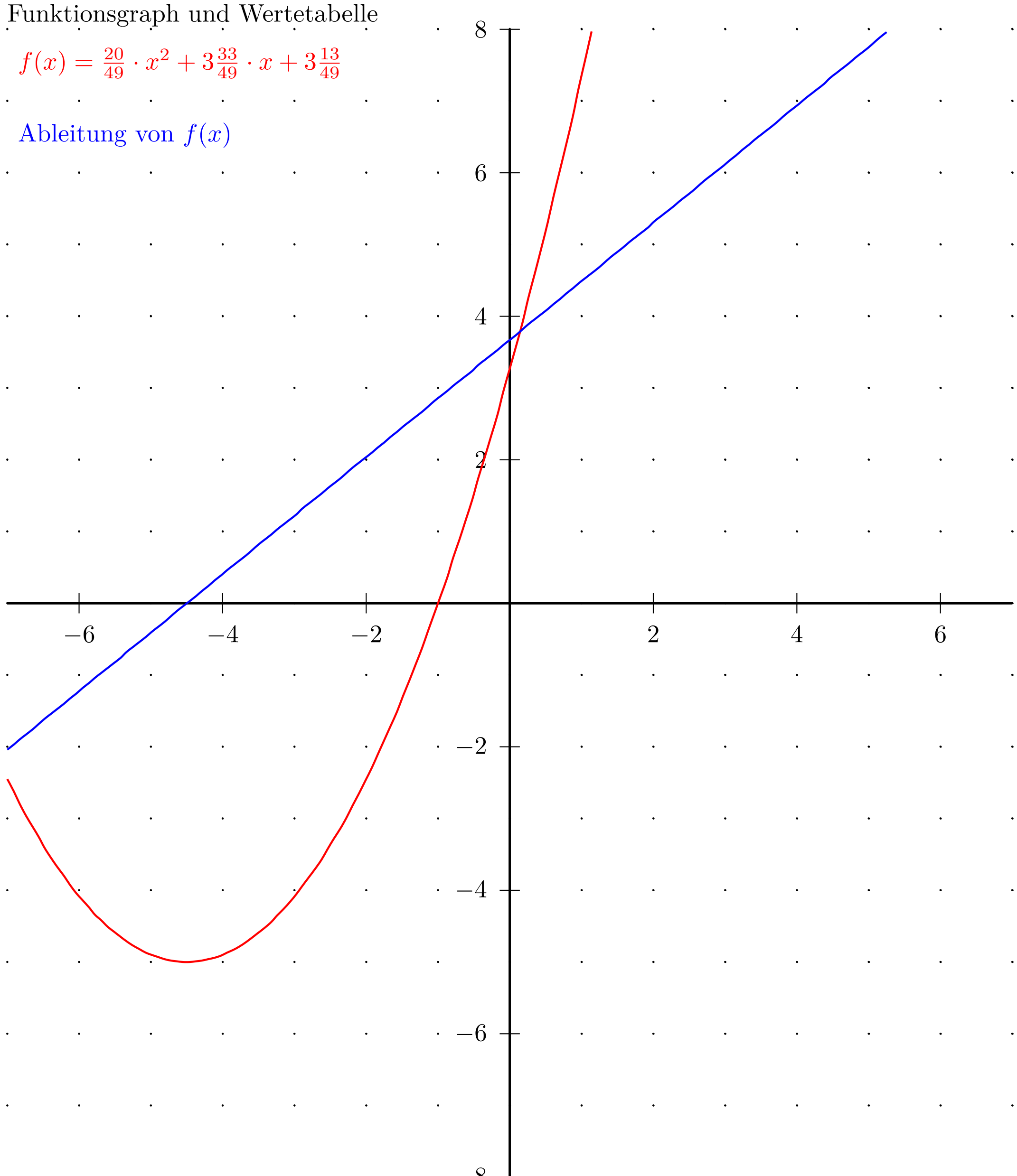
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A=\int_{-8}^{-1}\left(\frac{20}{49}x^2+3\frac{33}{49}x+3\frac{13}{49}\right)dx=\left[0,136x^3+1\frac{41}{49}x^2+3\frac{13}{49}x\right]_{-8}^{-1}$$

$$=\left(0,136\cdot(-1)^3+1\frac{41}{49}\cdot(-1)^2+3\frac{13}{49}\cdot(-1)\right)-\left(0,136\cdot(-8)^3+1\frac{41}{49}\cdot(-8)^2+3\frac{13}{49}\cdot(-8)\right)$$

$$=(-1,56)-(21,8)=-23\frac{1}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2\frac{22}{49}$	$-2\frac{2}{49}$	$\frac{40}{49}$
$-6\frac{1}{2}$	$-3\frac{18}{49}$	$-1\frac{31}{49}$	$\frac{40}{49}$
-6	$-4\frac{4}{49}$	$-1\frac{11}{49}$	$\frac{40}{49}$
$-5\frac{1}{2}$	$-4\frac{29}{49}$	$-\frac{40}{49}$	$\frac{40}{49}$
-5	$-4\frac{44}{49}$	$-\frac{20}{49}$	$\frac{40}{49}$
$-4\frac{1}{2}$	-5	0	$\frac{40}{49}$
-4	$-4\frac{44}{49}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{40}{49}$
$-3\frac{1}{2}$	$-4\frac{29}{49}$	$\frac{40}{49}$	$\frac{40}{49}$
-3	$-4\frac{4}{49}$	$1\frac{11}{49}$	$\frac{40}{49}$
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{18}{49}$	$1\frac{31}{49}$	$\frac{40}{49}$
-2	$-2\frac{22}{49}$	$2\frac{2}{49}$	$\frac{40}{49}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{16}{49}$	$2\frac{22}{49}$	$\frac{40}{49}$
-1	0	$2\frac{6}{7}$	$\frac{40}{49}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{26}{49}$	$3\frac{13}{49}$	$\frac{40}{49}$
0	$3\frac{13}{49}$	$3\frac{33}{49}$	$\frac{40}{49}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$3\frac{13}{49}$	$3\frac{33}{49}$	$\frac{40}{49}$
$\frac{1}{2}$	$5\frac{10}{49}$	$4\frac{4}{49}$	$\frac{40}{49}$
1	$7\frac{17}{49}$	$4\frac{24}{49}$	$\frac{40}{49}$
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{34}{49}$	$4\frac{44}{49}$	$\frac{40}{49}$
2	$12\frac{12}{49}$	$5\frac{15}{49}$	$\frac{40}{49}$
$2\frac{1}{2}$	15	$5\frac{5}{7}$	$\frac{40}{49}$
3	$17\frac{47}{49}$	$6\frac{6}{49}$	$\frac{40}{49}$
$3\frac{1}{2}$	$21\frac{6}{49}$	$6\frac{26}{49}$	$\frac{40}{49}$
4	$24\frac{24}{49}$	$6\frac{46}{49}$	$\frac{40}{49}$
$4\frac{1}{2}$	$28\frac{3}{49}$	$7\frac{17}{49}$	$\frac{40}{49}$
5	$31\frac{41}{49}$	$7\frac{37}{49}$	$\frac{40}{49}$
$5\frac{1}{2}$	$35\frac{40}{49}$	$8\frac{8}{49}$	$\frac{40}{49}$
6	40	$8\frac{4}{7}$	$\frac{40}{49}$
$6\frac{1}{2}$	$44\frac{19}{49}$	$8\frac{48}{49}$	$\frac{40}{49}$
7	$48\frac{48}{49}$	$9\frac{19}{49}$	$\frac{40}{49}$

Aufgabe (28)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}(x+1)(x-2)$
$f'(x) = -\frac{8}{9}x + \frac{4}{9}$
$f''(x) = -\frac{8}{9}$
$F(x) = \int(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9})dx = -\frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 1[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{4}{9} + \frac{\frac{4}{9}}{x} + \frac{\frac{8}{9}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{4}{9} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{4}{9} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{4}{9} \cdot (-x)^2 + \frac{4}{9} \cdot (-x) + \frac{8}{9}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9} = 0$

$-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{4}{9} \pm \sqrt{\frac{4}{9}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \frac{8}{9}}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{4}{9} \pm \sqrt{1\frac{7}{9}}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{4}{9} \pm 1\frac{1}{3}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{4}{9} + 1\frac{1}{3}}{-\frac{8}{9}} \qquad x_2 = \frac{-\frac{4}{9} - 1\frac{1}{3}}{-\frac{8}{9}}$$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = -\frac{8}{9}x + \frac{4}{9} = 0$$

$$-\frac{8}{9}x + \frac{4}{9} = 0 \qquad / -\frac{4}{9}$$

$$-\frac{8}{9}x = -\frac{4}{9} \qquad / : \left(-\frac{8}{9}\right)$$

$$x = \frac{-\frac{4}{9}}{-\frac{8}{9}}$$

$x = \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle

$f''(\frac{1}{2}) = -\frac{8}{9}$

$f''(\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(\frac{1}{2}/1)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$ $f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]\frac{1}{2}; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

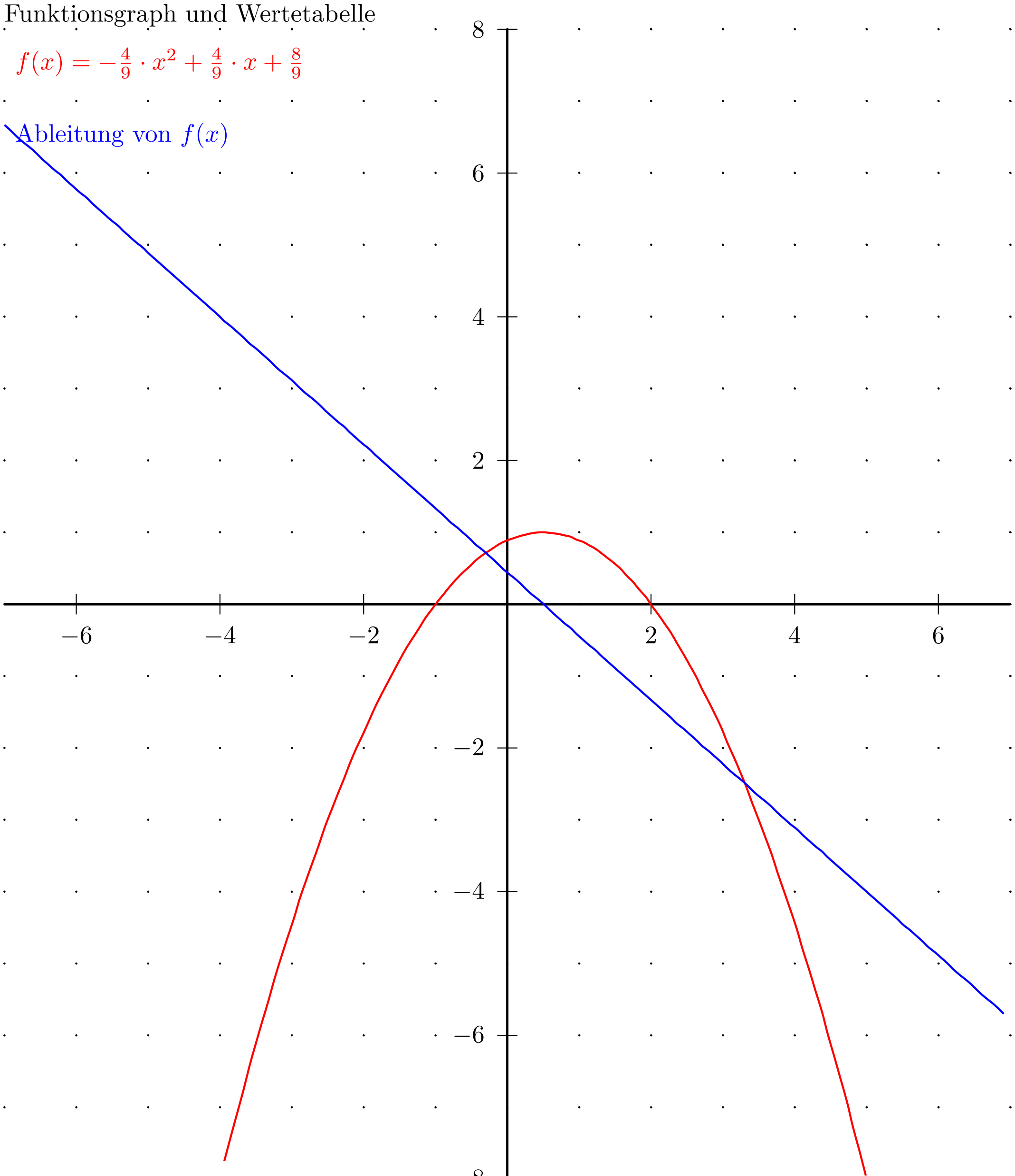
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{2} \left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9}\right) dx = \left[-\frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{4}{27} \cdot 2^3 + \frac{2}{9} \cdot 2^2 + \frac{8}{9} \cdot 2\right) - \left(-\frac{4}{27} \cdot (-1)^3 + \frac{2}{9} \cdot (-1)^2 + \frac{8}{9} \cdot (-1)\right)$$

$$= \left(1\frac{13}{27}\right) - \left(-\frac{14}{27}\right) = 2$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-24	$6\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{9}$
$-6\frac{1}{2}$	$-20\frac{7}{9}$	$6\frac{2}{9}$	$-\frac{8}{9}$
-6	$-17\frac{7}{9}$	$5\frac{7}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$-5\frac{1}{2}$	-15	$5\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{9}$
-5	$-12\frac{4}{9}$	$4\frac{8}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$-4\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{9}$	$4\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{9}$
-4	-8	4	$-\frac{8}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{9}$	$3\frac{5}{9}$	$-\frac{8}{9}$
-3	$-4\frac{4}{9}$	$3\frac{1}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$-2\frac{1}{2}$	-3	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{9}$
-2	$-1\frac{7}{9}$	$2\frac{2}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{9}$	$1\frac{7}{9}$	$-\frac{8}{9}$
-1	0	$1\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{9}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{8}{9}$
0	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{9}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{8}{9}$
1	$\frac{8}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{8}{9}$	$-\frac{8}{9}$
2	0	$-1\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{9}$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{9}$	$-1\frac{7}{9}$	$-\frac{8}{9}$
3	$-1\frac{7}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{9}$
4	$-4\frac{4}{9}$	$-3\frac{1}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{9}$	$-3\frac{5}{9}$	$-\frac{8}{9}$
5	-8	-4	$-\frac{8}{9}$
$5\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{9}$
6	$-12\frac{4}{9}$	$-4\frac{8}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$6\frac{1}{2}$	-15	$-5\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{9}$
7	$-17\frac{7}{9}$	$-5\frac{7}{9}$	$-\frac{8}{9}$

Aufgabe (29)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9} = -2\frac{2}{9}(x+2)(x-1)$
$f'(x) = -4\frac{4}{9}x - 2\frac{2}{9}$
$f''(x) = -4\frac{4}{9}$
$F(x) = \int(-2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9})dx = -\frac{20}{27}x^3 - 1\frac{1}{9}x^2 + 4\frac{4}{9}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 5[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-2\frac{2}{9} - \frac{2\frac{2}{9}}{x} + \frac{4\frac{4}{9}}{x^2})$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = [-2\frac{2}{9} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = [-2\frac{2}{9} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2\frac{2}{9} \cdot (-x)^2 - 2\frac{2}{9} \cdot (-x) + 4\frac{4}{9}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9} = 0$

$-2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9} = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+2\frac{2}{9} \pm \sqrt{\left(-2\frac{2}{9}\right)^2 - 4 \cdot \left(-2\frac{2}{9}\right) \cdot 4\frac{4}{9}}}{2 \cdot \left(-2\frac{2}{9}\right)}$$
$$x_{1/2} = \frac{+2\frac{2}{9} \pm \sqrt{44\frac{4}{9}}}{-4\frac{4}{9}}$$
$$x_{1/2} = \frac{2\frac{2}{9} \pm 6\frac{2}{3}}{-4\frac{4}{9}}$$
$$x_1 = \frac{2\frac{2}{9} + 6\frac{2}{3}}{-4\frac{4}{9}} \qquad x_2 = \frac{2\frac{2}{9} - 6\frac{2}{3}}{-4\frac{4}{9}}$$
$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-2; 1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = -4\frac{4}{9}x - 2\frac{2}{9} = 0$$
$$-4\frac{4}{9}x - 2\frac{2}{9} = 0 \qquad / + 2\frac{2}{9}$$
$$-4\frac{4}{9}x = 2\frac{2}{9} \qquad / : \left(-4\frac{4}{9}\right)$$
$$x = \frac{2\frac{2}{9}}{-4\frac{4}{9}}$$

$x = -\frac{1}{2}$

$\underline{x_3 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-\frac{1}{2}) = -4\frac{4}{9}$

$f''(-\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-\frac{1}{2}/5)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{1} \left(-2\frac{2}{9}x^2 - 2\frac{2}{9}x + 4\frac{4}{9}\right) dx = \left[-\frac{20}{27}x^3 - 1\frac{1}{9}x^2 + 4\frac{4}{9}x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{20}{27} \cdot 1^3 - 1\frac{1}{9} \cdot 1^2 + 4\frac{4}{9} \cdot 1\right) - \left(-\frac{20}{27} \cdot (-2)^3 - 1\frac{1}{9} \cdot (-2)^2 + 4\frac{4}{9} \cdot (-2)\right)$$

$$= \left(2\frac{16}{27}\right) - \left(-7\frac{11}{27}\right) = 10$$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-88\frac{8}{9}$	$28\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$-6\frac{1}{2}$	-75	$26\frac{2}{3}$	$-4\frac{4}{9}$
-6	$-62\frac{2}{9}$	$24\frac{4}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$-5\frac{1}{2}$	$-50\frac{5}{9}$	$22\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
-5	-40	20	$-4\frac{4}{9}$
$-4\frac{1}{2}$	$-30\frac{5}{9}$	$17\frac{7}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
-4	$-22\frac{2}{9}$	$15\frac{5}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	-15	$13\frac{1}{3}$	$-4\frac{4}{9}$
-3	$-8\frac{8}{9}$	$11\frac{1}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{8}{9}$	$8\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
-2	0	$6\frac{2}{3}$	$-4\frac{4}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{9}$	$4\frac{4}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
-1	$4\frac{4}{9}$	$2\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$-\frac{1}{2}$	5	0	$-4\frac{4}{9}$
0	$4\frac{4}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$4\frac{4}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
1	0	$-6\frac{2}{3}$	$-4\frac{4}{9}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{8}{9}$	$-8\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
2	$-8\frac{8}{9}$	$-11\frac{1}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$2\frac{1}{2}$	-15	$-13\frac{1}{3}$	$-4\frac{4}{9}$
3	$-22\frac{2}{9}$	$-15\frac{5}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$3\frac{1}{2}$	$-30\frac{5}{9}$	$-17\frac{7}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
4	-40	-20	$-4\frac{4}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$-50\frac{5}{9}$	$-22\frac{2}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
5	$-62\frac{2}{9}$	$-24\frac{4}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$5\frac{1}{2}$	-75	$-26\frac{2}{3}$	$-4\frac{4}{9}$
6	$-88\frac{8}{9}$	$-28\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
$6\frac{1}{2}$	$-103\frac{8}{9}$	$-31\frac{1}{9}$	$-4\frac{4}{9}$
7	-120	$-33\frac{1}{3}$	$-4\frac{4}{9}$

Aufgabe (30)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x = -\frac{7}{9}x(x-6)$
$f'(x) = -1\frac{5}{9}x + 4\frac{2}{3}$
$f''(x) = -1\frac{5}{9}$
$F(x) = \int(-\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x)dx = -\frac{7}{27}x^3 + 2\frac{1}{3}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 7[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{7}{9} + \frac{4\frac{2}{3}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{7}{9} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{7}{9} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{7}{9} \cdot (-x)^2 + 4\frac{2}{3} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x = 0$
$x(-\frac{7}{9}x + 4\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{7}{9}x + 4\frac{2}{3} = 0$
$-\frac{7}{9}x + 4\frac{2}{3} = 0 \qquad / - 4\frac{2}{3}$
$-\frac{7}{9}x = -4\frac{2}{3} \qquad / : \left(-\frac{7}{9}\right)$
$x = \frac{-4\frac{2}{3}}{-\frac{7}{9}}$
$x = 6$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	6	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0; 6[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]6; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -1\frac{5}{9}x + 4\frac{2}{3} = 0$
$-1\frac{5}{9}x + 4\frac{2}{3} = 0 \qquad / - 4\frac{2}{3}$
$-1\frac{5}{9}x = -4\frac{2}{3} \qquad / : \left(-1\frac{5}{9}\right)$
$x = \frac{-4\frac{2}{3}}{-1\frac{5}{9}}$
$x = 3$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(3) = -1\frac{5}{9}$
$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/7)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend
$x \in]3; \infty[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

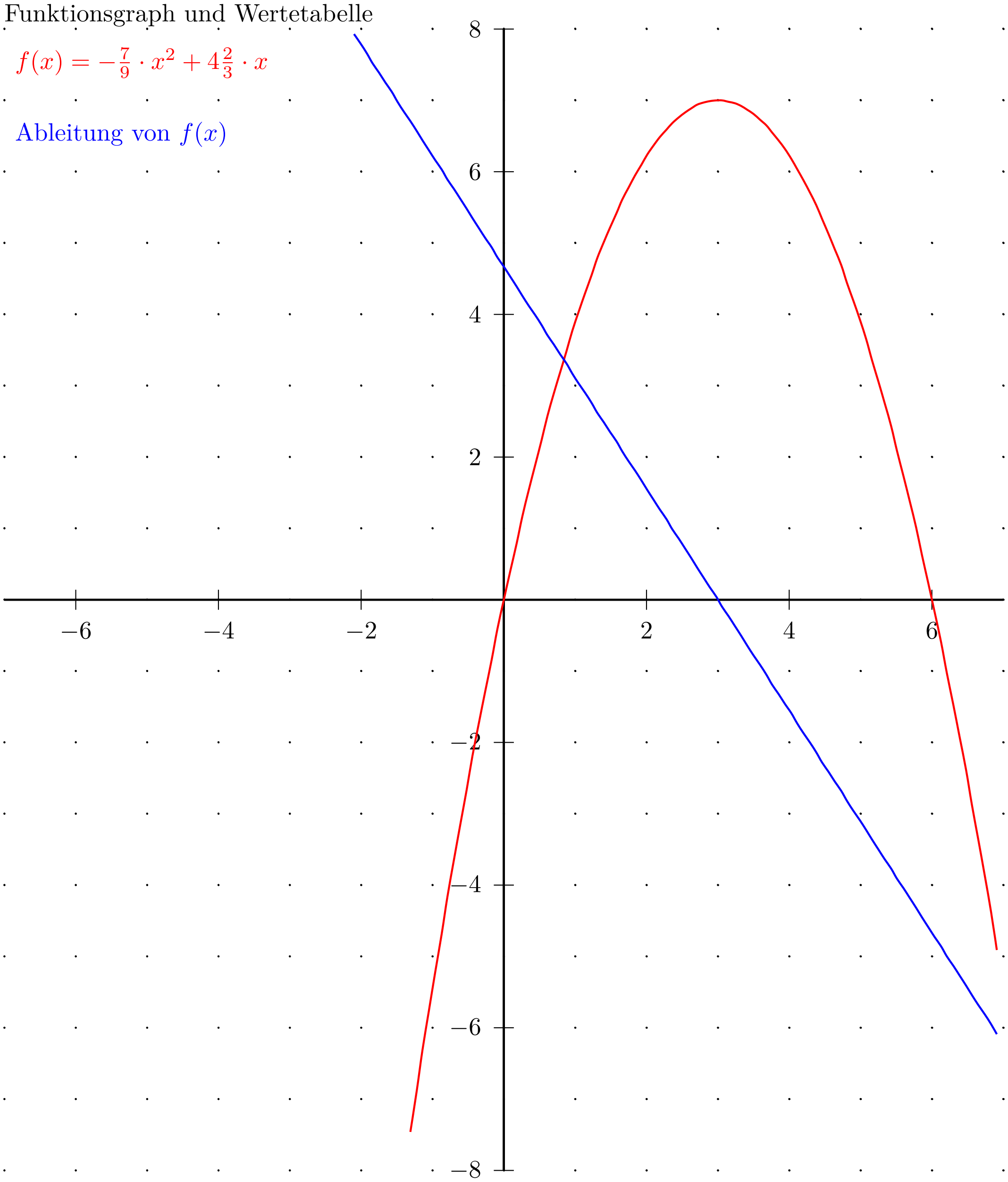
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_0^6 \left(-\frac{7}{9}x^2 + 4\frac{2}{3}x\right) dx = \left[-\frac{7}{27}x^3 + 2\frac{1}{3}x^2\right]_0^6$$

$$= \left(-\frac{7}{27} \cdot 6^3 + 2\frac{1}{3} \cdot 6^2\right) - \left(-\frac{7}{27} \cdot 0^3 + 2\frac{1}{3} \cdot 0^2\right)$$

$$= (28) - (0) = 28$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-70\frac{7}{9}$	$15\frac{5}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$-6\frac{1}{2}$	$-63\frac{7}{36}$	$14\frac{7}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
-6	-56	14	$-1\frac{5}{9}$
$-5\frac{1}{2}$	$-49\frac{7}{36}$	$13\frac{2}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
-5	$-42\frac{7}{9}$	$12\frac{4}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$-4\frac{1}{2}$	$-36\frac{3}{4}$	$11\frac{2}{3}$	$-1\frac{5}{9}$
-4	$-31\frac{1}{9}$	$10\frac{8}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	$-25\frac{31}{36}$	$10\frac{1}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
-3	-21	$9\frac{1}{3}$	$-1\frac{5}{9}$
$-2\frac{1}{2}$	$-16\frac{19}{36}$	$8\frac{5}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
-2	$-12\frac{4}{9}$	$7\frac{7}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	7	$-1\frac{5}{9}$
-1	$-5\frac{4}{9}$	$6\frac{2}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{19}{36}$	$5\frac{4}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
0	0	$4\frac{2}{3}$	$-1\frac{5}{9}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$4\frac{2}{3}$	$-1\frac{5}{9}$
$\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{36}$	$3\frac{8}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
1	$3\frac{8}{9}$	$3\frac{1}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{3}$	$-1\frac{5}{9}$
2	$6\frac{2}{9}$	$1\frac{5}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{29}{36}$	$\frac{7}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
3	7	0	$-1\frac{5}{9}$
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{29}{36}$	$-\frac{7}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
4	$6\frac{2}{9}$	$-1\frac{5}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{3}$	$-1\frac{5}{9}$
5	$3\frac{8}{9}$	$-3\frac{1}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
$5\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{36}$	$-3\frac{8}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
6	0	$-4\frac{2}{3}$	$-1\frac{5}{9}$
$6\frac{1}{2}$	$-2\frac{19}{36}$	$-5\frac{4}{9}$	$-1\frac{5}{9}$
7	$-5\frac{4}{9}$	$-6\frac{2}{9}$	$-1\frac{5}{9}$

Aufgabe (31)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49} = \frac{3}{49}(x+6)(x-8)$
$f'(x) = \frac{6}{49}x - \frac{6}{49}$
$f''(x) = \frac{6}{49}$
$F(x) = \int(\frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49})dx = \frac{1}{49}x^3 - \frac{3}{49}x^2 - 2\frac{46}{49}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-3), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(\frac{3}{49} - \frac{\frac{6}{49}}{x} - \frac{2\frac{46}{49}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{3}{49} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{3}{49} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{3}{49} \cdot (-x)^2 - \frac{6}{49} \cdot (-x) - 2\frac{46}{49}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49} = 0$

$\frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{6}{49} \pm \sqrt{\left(-\frac{6}{49}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{49} \cdot \left(-2\frac{46}{49}\right)}}{2 \cdot \frac{3}{49}}$
$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{6}{49} \pm \sqrt{\frac{36}{49}}}{\frac{6}{49}}$
$x_{1/2} = \dfrac{\frac{6}{49} \pm \frac{6}{7}}{\frac{6}{49}}$
$x_1 = \dfrac{\frac{6}{49} + \frac{6}{7}}{\frac{6}{49}}$ $x_2 = \dfrac{\frac{6}{49} - \frac{6}{7}}{\frac{6}{49}}$
$x_1 = 8$ $x_2 = -6$
$\underline{x_1 = -6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 8; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-6	$< x <$	8	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -6[\quad \cup \quad]8; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-6; 8[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{6}{49}x - \dfrac{6}{49} = 0$
$\dfrac{6}{49}x - \dfrac{6}{49} = 0 \qquad / + \dfrac{6}{49}$
$\dfrac{6}{49}x = \dfrac{6}{49} \qquad / : \dfrac{6}{49}$
$x = \dfrac{\frac{6}{49}}{\frac{6}{49}}$
$x = 1$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(1) = \frac{6}{49} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/-3)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

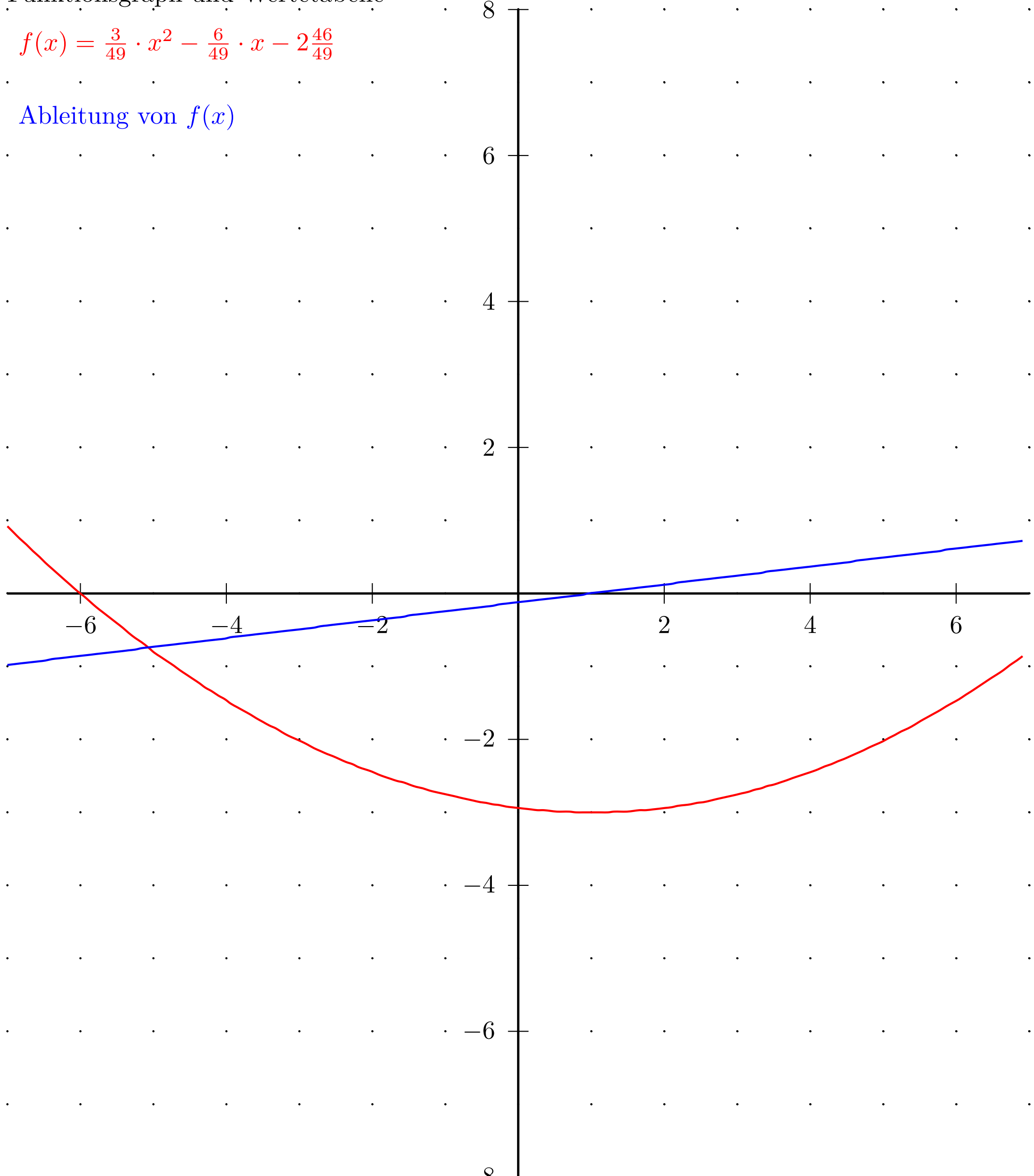
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-6}^{8} \left(\frac{3}{49}x^2 - \frac{6}{49}x - 2\frac{46}{49} \right) dx = \left[\frac{1}{49}x^3 - \frac{3}{49}x^2 - 2\frac{46}{49}x \right]_{-6}^{8}$$

$$= \left(\frac{1}{49} \cdot 8^3 - \frac{3}{49} \cdot 8^2 - 2\frac{46}{49} \cdot 8 \right) - \left(\frac{1}{49} \cdot (-6)^3 - \frac{3}{49} \cdot (-6)^2 - 2\frac{46}{49} \cdot (-6) \right)$$

$$= \left(-16\frac{48}{49} \right) - \left(11\frac{1}{49} \right) = -28$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{45}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$\frac{6}{49}$
$-6\frac{1}{2}$	$0,444$	$-\frac{45}{49}$	$\frac{6}{49}$
-6	0	$-\frac{6}{7}$	$\frac{6}{49}$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,413$	$-\frac{39}{49}$	$\frac{6}{49}$
-5	$-\frac{39}{49}$	$-\frac{36}{49}$	$\frac{6}{49}$
$-4\frac{1}{2}$	$-1,15$	$-\frac{33}{49}$	$\frac{6}{49}$
-4	$-1\frac{23}{49}$	$-\frac{30}{49}$	$\frac{6}{49}$
$-3\frac{1}{2}$	$-1,76$	$-\frac{27}{49}$	$\frac{6}{49}$
-3	$-2\frac{1}{49}$	$-\frac{24}{49}$	$\frac{6}{49}$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{6}{49}$
-2	$-2\frac{22}{49}$	$-\frac{18}{49}$	$\frac{6}{49}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2,62$	$-\frac{15}{49}$	$\frac{6}{49}$
-1	$-2\frac{37}{49}$	$-\frac{12}{49}$	$\frac{6}{49}$
$-\frac{1}{2}$	$-2,86$	$-\frac{9}{49}$	$\frac{6}{49}$
0	$-2\frac{46}{49}$	$-\frac{6}{49}$	$\frac{6}{49}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-2\frac{46}{49}$	$-\frac{6}{49}$	$\frac{6}{49}$
$\frac{1}{2}$	$-2,98$	$-\frac{3}{49}$	$\frac{6}{49}$
1	-3	0	$\frac{6}{49}$
$1\frac{1}{2}$	$-2,98$	$\frac{3}{49}$	$\frac{6}{49}$
2	$-2\frac{46}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{6}{49}$
$2\frac{1}{2}$	$-2,86$	$\frac{9}{49}$	$\frac{6}{49}$
3	$-2\frac{37}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{6}{49}$
$3\frac{1}{2}$	$-2,62$	$\frac{15}{49}$	$\frac{6}{49}$
4	$-2\frac{22}{49}$	$\frac{18}{49}$	$\frac{6}{49}$
$4\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{49}$
5	$-2\frac{1}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{6}{49}$
$5\frac{1}{2}$	$-1,76$	$\frac{27}{49}$	$\frac{6}{49}$
6	$-1\frac{23}{49}$	$\frac{30}{49}$	$\frac{6}{49}$
$6\frac{1}{2}$	$-1,15$	$\frac{33}{49}$	$\frac{6}{49}$
7	$-\frac{39}{49}$	$\frac{36}{49}$	$\frac{6}{49}$

Aufgabe (32)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x = \frac{5}{9}x(x-6)$
$f'(x) = 1\frac{1}{9}x - 3\frac{1}{3}$
$f''(x) = 1\frac{1}{9}$
$F(x) = \int(\frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x)dx = \frac{5}{27}x^3 - 1\frac{2}{3}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-5), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(\frac{5}{9} - \frac{3\frac{1}{3}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{5}{9} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{5}{9} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{5}{9} \cdot (-x)^2 - 3\frac{1}{3} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x = 0$
$x(\frac{5}{9}x - 3\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{5}{9}x - 3\frac{1}{3} = 0$
$\frac{5}{9}x - 3\frac{1}{3} = 0 \qquad / + 3\frac{1}{3}$
$\frac{5}{9}x = 3\frac{1}{3} \qquad / : \frac{5}{9}$
$x = \frac{3\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}$
$x = 6$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	6	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]6; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]0; 6[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 1\frac{1}{9}x - 3\frac{1}{3} = 0$

$1\frac{1}{9}x - 3\frac{1}{3} = 0 \qquad / + 3\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{9}x = 3\frac{1}{3} \qquad / : 1\frac{1}{9}$
$x = \frac{3\frac{1}{3}}{1\frac{1}{9}}$
$x = 3$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(3) = 1\frac{1}{9} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(3/-5)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$x \in]-\infty; 3[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

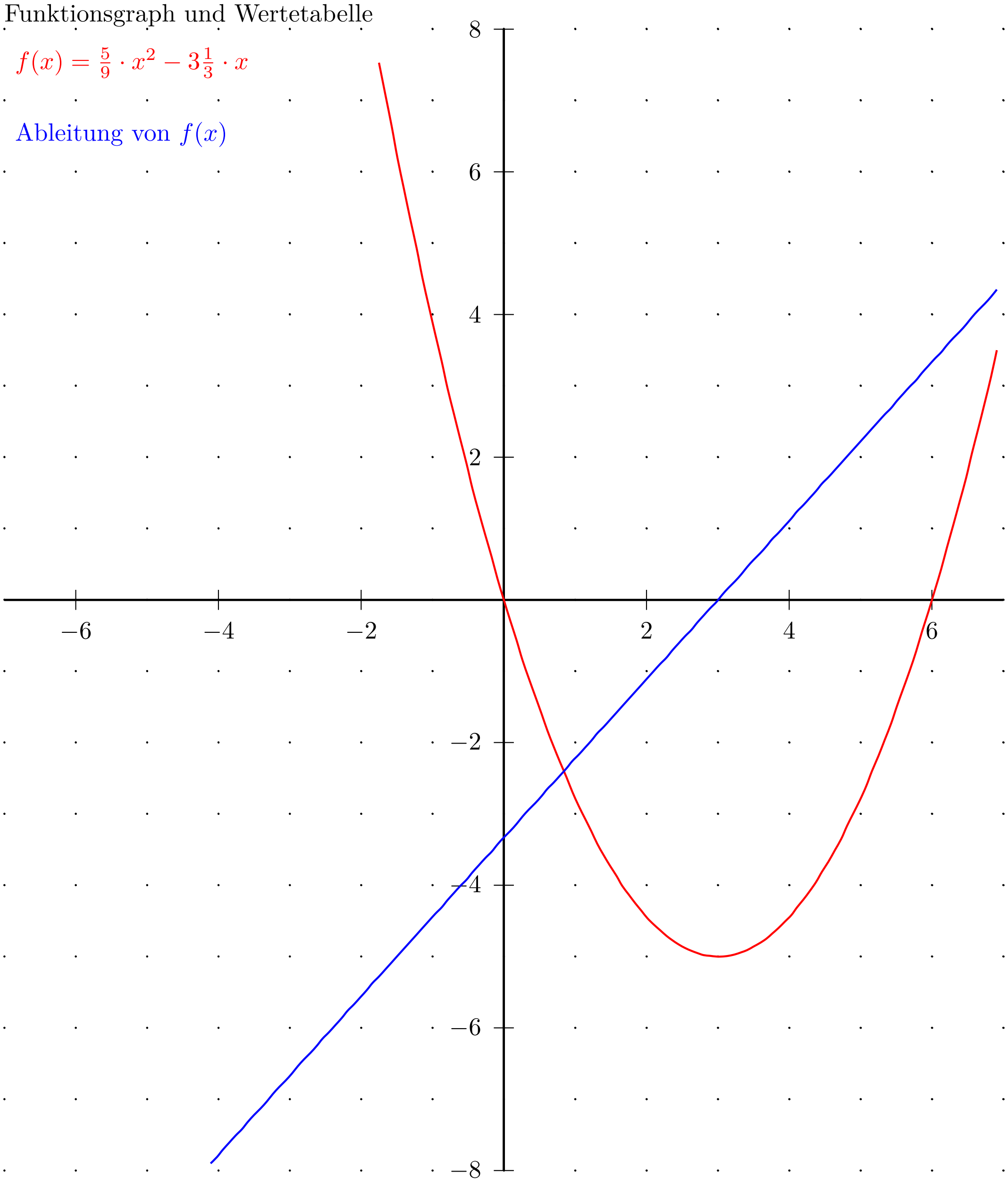
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_0^6 \left(\frac{5}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x\right) dx = \left[\frac{5}{27}x^3 - 1\frac{2}{3}x^2\right]_0^6$$

$$= \left(\frac{5}{27} \cdot 6^3 - 1\frac{2}{3} \cdot 6^2\right) - \left(\frac{5}{27} \cdot 0^3 - 1\frac{2}{3} \cdot 0^2\right)$$

$$= (-20) - (0) = -20$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$50\frac{5}{9}$	$-11\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-6\frac{1}{2}$	$45\frac{5}{36}$	$-10\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$
-6	40	-10	$1\frac{1}{9}$
$-5\frac{1}{2}$	$35\frac{5}{36}$	$-9\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$
-5	$30\frac{5}{9}$	$-8\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-4\frac{1}{2}$	$26\frac{1}{4}$	$-8\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$
-4	$22\frac{2}{9}$	$-7\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-3\frac{1}{2}$	$18\frac{17}{36}$	$-7\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$
-3	15	$-6\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$
$-2\frac{1}{2}$	$11\frac{29}{36}$	$-6\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$
-2	$8\frac{8}{9}$	$-5\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	-5	$1\frac{1}{9}$
-1	$3\frac{8}{9}$	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{36}$	$-3\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$
0	0	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{36}$	$-2\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$
1	$-2\frac{7}{9}$	$-2\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$
2	$-4\frac{4}{9}$	$-1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$2\frac{1}{2}$	$-4\frac{31}{36}$	$-\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$
3	-5	0	$1\frac{1}{9}$
$3\frac{1}{2}$	$-4\frac{31}{36}$	$\frac{5}{9}$	$1\frac{1}{9}$
4	$-4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$4\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{9}$
5	$-2\frac{7}{9}$	$2\frac{2}{9}$	$1\frac{1}{9}$
$5\frac{1}{2}$	$-1\frac{19}{36}$	$2\frac{7}{9}$	$1\frac{1}{9}$
6	0	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{9}$
$6\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{36}$	$3\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$
7	$3\frac{8}{9}$	$4\frac{4}{9}$	$1\frac{1}{9}$

Aufgabe (33)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15 = -1\frac{1}{4}(x+6)(x+2)$
$f'(x) = -2\frac{1}{2}x - 10$
$f''(x) = -2\frac{1}{2}$
$F(x) = \int(-1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15)dx = -\frac{5}{12}x^3 - 5x^2 - 15x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 5[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-1\frac{1}{4} - \dfrac{10}{x} - \dfrac{15}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 - 10 \cdot (-x) - 15$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15 = 0$

$-1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot \left(-1\frac{1}{4}\right) \cdot (-15)}}{2 \cdot \left(-1\frac{1}{4}\right)}$$
$$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{25}}{-2\frac{1}{2}}$$
$$x_{1/2} = \frac{10 \pm 5}{-2\frac{1}{2}}$$
$$x_1 = \frac{10+5}{-2\frac{1}{2}} \qquad x_2 = \frac{10-5}{-2\frac{1}{2}}$$
$x_1 = -6 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-6	$< x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-6; -2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -6[\quad \cup \quad]-2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -2\dfrac{1}{2}x - 10 = 0$

$-2\dfrac{1}{2}x - 10 = 0 \qquad / + 10$
$-2\dfrac{1}{2}x = 10 \qquad / : \left(-2\dfrac{1}{2}\right)$
$$x = \frac{10}{-2\frac{1}{2}}$$
$x = -4$
$\underline{x_3 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-4) = -2\frac{1}{2}$
$f''(-4) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-4/5)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

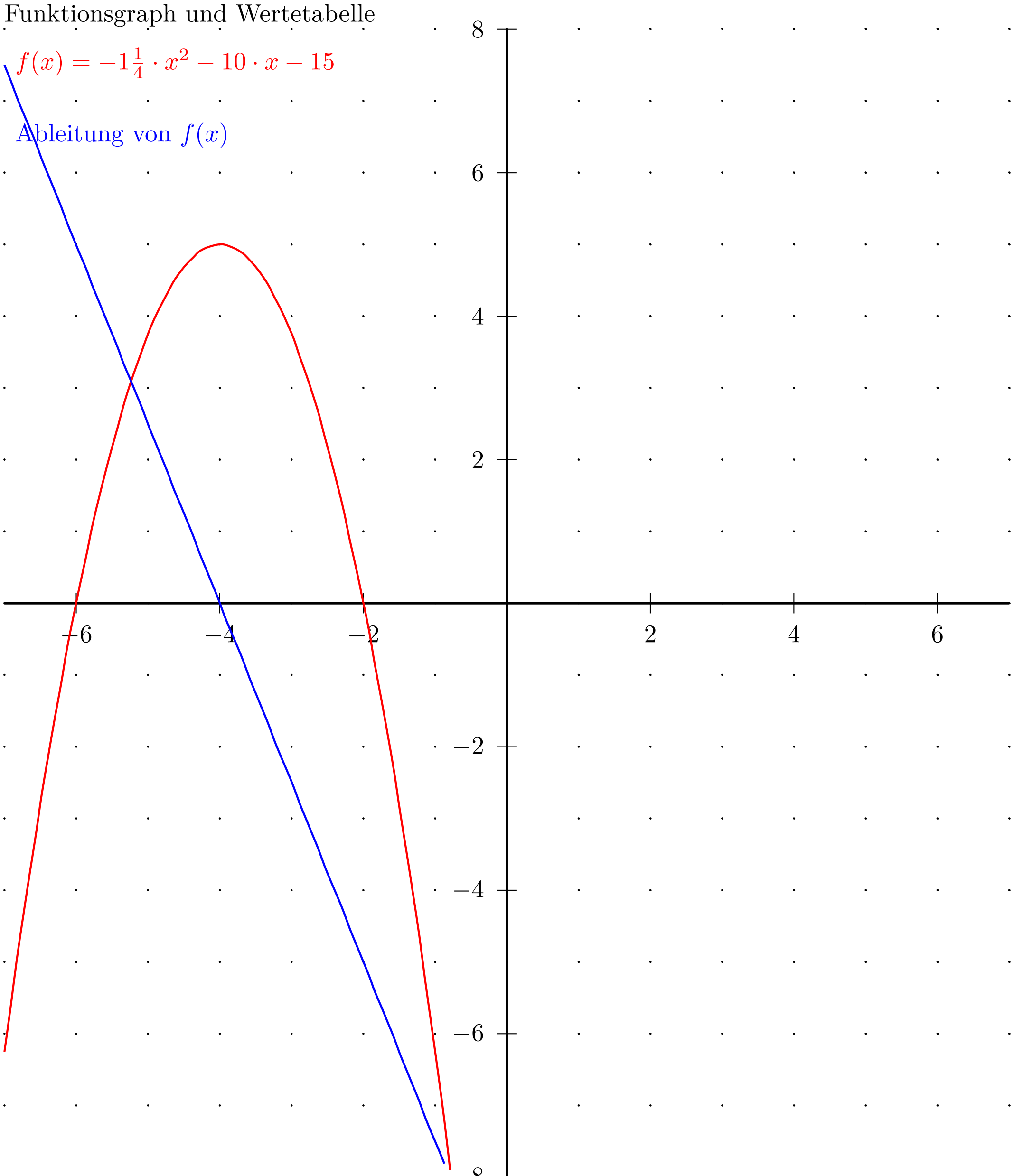
$x \in]-\infty; -4[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-4; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-6}^{-2} \left(-1\frac{1}{4}x^2 - 10x - 15\right) dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 - 5x^2 - 15x\right]_{-6}^{-2}$$
$$= \left(-\frac{5}{12} \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 15 \cdot (-2)\right) - \left(-\frac{5}{12} \cdot (-6)^3 - 5 \cdot (-6)^2 - 15 \cdot (-6)\right)$$
$$= \left(13\frac{1}{3}\right) - (0) = 13\frac{1}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-6\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$-6\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-6	0	5	$-2\frac{1}{2}$
$-5\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-5	$3\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-4	5	0	$-2\frac{1}{2}$
$-3\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$-1\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-3	$3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$-3\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-2	0	-5	$-2\frac{1}{2}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$-6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
-1	$-6\frac{1}{4}$	$-7\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-10\frac{5}{16}$	$-8\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
0	-15	-10	$-2\frac{1}{2}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-15	-10	$-2\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-20\frac{5}{16}$	$-11\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
1	$-26\frac{1}{4}$	$-12\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$-32\frac{13}{16}$	$-13\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
2	-40	-15	$-2\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$-47\frac{13}{16}$	$-16\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
3	$-56\frac{1}{4}$	$-17\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-65\frac{5}{16}$	$-18\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
4	-75	-20	$-2\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{2}$	$-85\frac{5}{16}$	$-21\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
5	$-96\frac{1}{4}$	$-22\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$-107\frac{13}{16}$	$-23\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
6	-120	-25	$-2\frac{1}{2}$
$6\frac{1}{2}$	$-132\frac{13}{16}$	$-26\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$
7	$-146\frac{1}{4}$	$-27\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$

Aufgabe (34)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 4x^2 - 8x = 4x(x-2)$
$f'(x) = 8x - 8$
$f''(x) = 8$
$F(x) = \int (4x^2 - 8x)dx = 1\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-4), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(4 - \frac{8}{x})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [4 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 4 \cdot (-x)^2 - 8 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 4x^2 - 8x = 0$
$x(4x - 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x - 8 = 0$
$4x - 8 = 0 \qquad / + 8$
$4x = 8 \qquad / : 4$
$x = \frac{8}{4}$
$x = 2$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]0; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 8x - 8 = 0$

$8x - 8 = 0 \qquad / + 8$
$8x = 8 \qquad / : 8$
$x = \frac{8}{8}$
$x = 1$
$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/-4)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

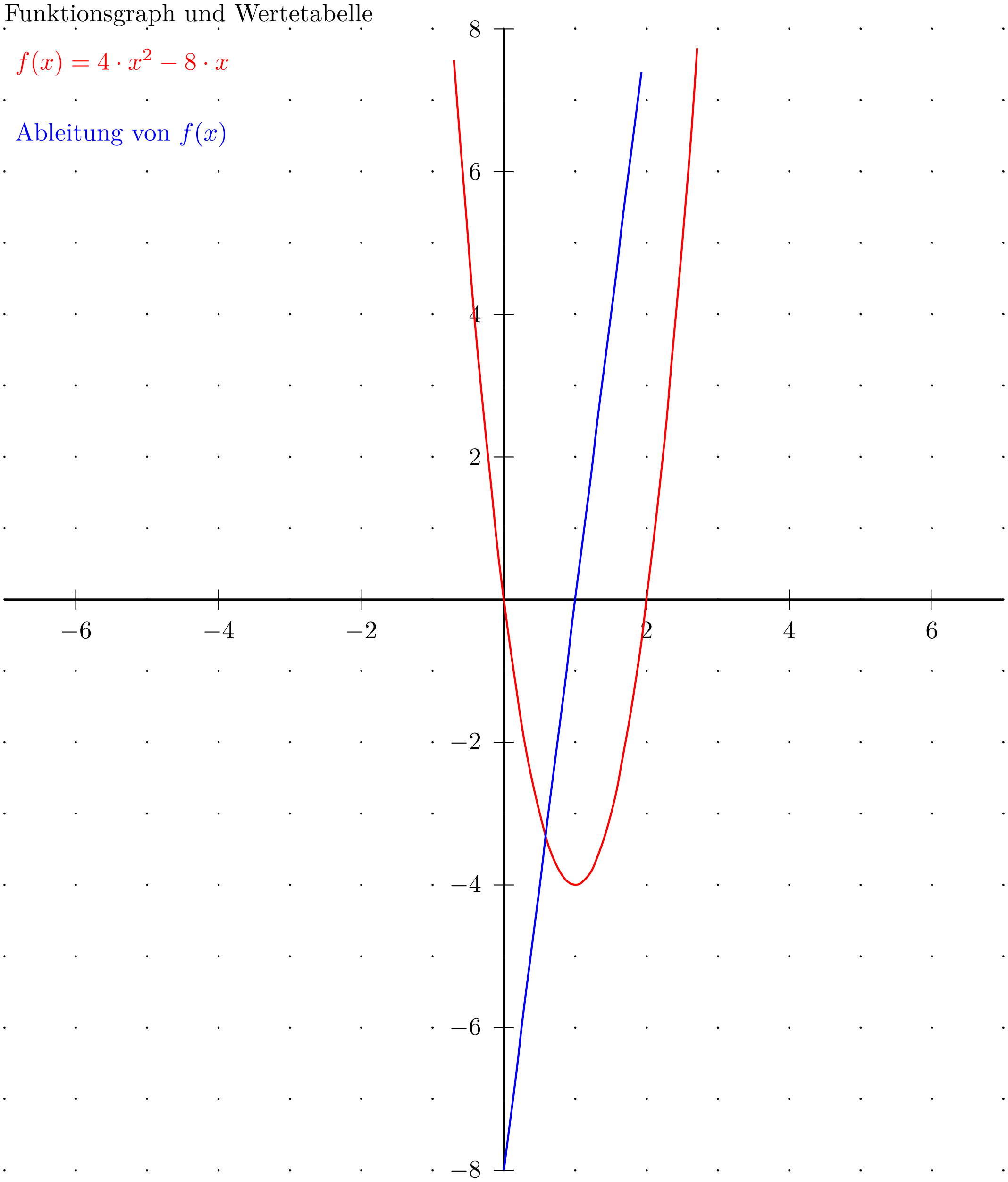
$\underline{x \in]1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_0^2 \left(4x^2 - 8x\right) dx = \left[1\frac{1}{3}x^3 - 4x^2\right]_0^2$
$= \left(1\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2\right) - \left(1\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2\right)$
$= \left(-5\frac{1}{3}\right) - (0) = -5\frac{1}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	252	-64	8
$-6\frac{1}{2}$	221	-60	8
-6	192	-56	8
$-5\frac{1}{2}$	165	-52	8
-5	140	-48	8
$-4\frac{1}{2}$	117	-44	8
-4	96	-40	8
$-3\frac{1}{2}$	77	-36	8
-3	60	-32	8
$-2\frac{1}{2}$	45	-28	8
-2	32	-24	8
$-1\frac{1}{2}$	21	-20	8
-1	12	-16	8
$-\frac{1}{2}$	5	-12	8
0	0	-8	8

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-8	8
$\frac{1}{2}$	-3	-4	8
1	-4	0	8
$1\frac{1}{2}$	-3	4	8
2	0	8	8
$2\frac{1}{2}$	5	12	8
3	12	16	8
$3\frac{1}{2}$	21	20	8
4	32	24	8
$4\frac{1}{2}$	45	28	8
5	60	32	8
$5\frac{1}{2}$	77	36	8
6	96	40	8
$6\frac{1}{2}$	117	44	8
7	140	48	8

Aufgabe (35)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49} = -\frac{24}{49}(x+1)(x-6)$
$f'(x) = -\frac{48}{49}x + 2\frac{22}{49}$
$f''(x) = -\frac{48}{49}$
$F(x) = \int(-\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49})dx = -\frac{8}{49}x^3 + 1\frac{11}{49}x^2 + 2\frac{46}{49}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 6[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(-\frac{24}{49} + \frac{2\frac{22}{49}}{x} + \frac{2\frac{46}{49}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{24}{49} \cdot \infty^2] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{24}{49} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{24}{49} \cdot (-x)^2 + 2\frac{22}{49} \cdot (-x) + 2\frac{46}{49}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49} = 0$

$-\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-2\frac{22}{49} \pm \sqrt{2\frac{22}{49}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{24}{49}\right) \cdot 2\frac{46}{49}}}{2 \cdot \left(-\frac{24}{49}\right)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2\frac{22}{49} \pm \sqrt{11\frac{37}{49}}}{-\frac{48}{49}}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2\frac{22}{49} \pm 3\frac{3}{7}}{-\frac{48}{49}}$
$x_1 = \dfrac{-2\frac{22}{49} + 3\frac{3}{7}}{-\frac{48}{49}}$ $x_2 = \dfrac{-2\frac{22}{49} - 3\frac{3}{7}}{-\frac{48}{49}}$
$x_1 = -1$ $x_2 = 6$
$\underline{x_1 = -1;\ \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 6;\ \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	6	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1; 6[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]6; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -\frac{48}{49}x + 2\frac{22}{49} = 0$
$-\frac{48}{49}x + 2\frac{22}{49} = 0 \qquad / -2\frac{22}{49}$
$-\frac{48}{49}x = -2\frac{22}{49} \qquad / : \left(-\frac{48}{49}\right)$
$x = \dfrac{-2\frac{22}{49}}{-\frac{48}{49}}$

$x = 2\frac{1}{2}$

$\underline{x_3 = 2\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(2\frac{1}{2}) = -\frac{48}{49}$

$f''(2\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2\frac{1}{2}/6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$2\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 2\frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]2\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{6} \left(-\frac{24}{49}x^2 + 2\frac{22}{49}x + 2\frac{46}{49}\right) dx = \left[-\frac{8}{49}x^3 + 1\frac{11}{49}x^2 + 2\frac{46}{49}x\right]_{-1}^{6}$$

$$= \left(-\frac{8}{49} \cdot 6^3 + 1\frac{11}{49} \cdot 6^2 + 2\frac{46}{49} \cdot 6\right) - \left(-\frac{8}{49} \cdot (-1)^3 + 1\frac{11}{49} \cdot (-1)^2 + 2\frac{46}{49} \cdot (-1)\right)$$

$$= \left(26\frac{22}{49}\right) - \left(-1\frac{27}{49}\right) = 28$$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-38\frac{10}{49}$	$9\frac{15}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$-6\frac{1}{2}$	$-33\frac{33}{49}$	$8\frac{40}{49}$	$-\frac{48}{49}$
-6	$-29\frac{19}{49}$	$8\frac{16}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$-5\frac{1}{2}$	$-25\frac{17}{49}$	$7\frac{41}{49}$	$-\frac{48}{49}$
-5	$-21\frac{27}{49}$	$7\frac{17}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$-4\frac{1}{2}$	-18	$6\frac{6}{7}$	$-\frac{48}{49}$
-4	$-14\frac{34}{49}$	$6\frac{18}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$-3\frac{1}{2}$	$-11\frac{31}{49}$	$5\frac{43}{49}$	$-\frac{48}{49}$
-3	$-8\frac{40}{49}$	$5\frac{19}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$-2\frac{1}{2}$	$-6\frac{12}{49}$	$4\frac{44}{49}$	$-\frac{48}{49}$
-2	$-3\frac{45}{49}$	$4\frac{20}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{41}{49}$	$3\frac{45}{49}$	$-\frac{48}{49}$
-1	0	$3\frac{3}{7}$	$-\frac{48}{49}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{49}$	$2\frac{46}{49}$	$-\frac{48}{49}$
0	$2\frac{46}{49}$	$2\frac{22}{49}$	$-\frac{48}{49}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$2\frac{46}{49}$	$2\frac{22}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{49}$	$1\frac{47}{49}$	$-\frac{48}{49}$
1	$4\frac{44}{49}$	$1\frac{23}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{25}{49}$	$\frac{48}{49}$	$-\frac{48}{49}$
2	$5\frac{43}{49}$	$\frac{24}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$2\frac{1}{2}$	6	0	$-\frac{48}{49}$
3	$5\frac{43}{49}$	$-\frac{24}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{25}{49}$	$-\frac{48}{49}$	$-\frac{48}{49}$
4	$4\frac{44}{49}$	$-1\frac{23}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{49}$	$-1\frac{47}{49}$	$-\frac{48}{49}$
5	$2\frac{46}{49}$	$-2\frac{22}{49}$	$-\frac{48}{49}$
$5\frac{1}{2}$	$1\frac{29}{49}$	$-2\frac{46}{49}$	$-\frac{48}{49}$
6	0	$-3\frac{3}{7}$	$-\frac{48}{49}$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{41}{49}$	$-3\frac{45}{49}$	$-\frac{48}{49}$
7	$-3\frac{45}{49}$	$-4\frac{20}{49}$	$-\frac{48}{49}$

Aufgabe (36)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{8}{27}x^2 + 2\frac{2}{3}x = \frac{8}{27}(x+9)x$
$f'(x) = \frac{16}{27}x + 2\frac{2}{3}$
$f''(x) = \frac{16}{27}$
$F(x) = \int(\frac{8}{27}x^2 + 2\frac{2}{3}x)dx = \frac{8}{81}x^3 + 1\frac{1}{3}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-6), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(\frac{8}{27} + \frac{2\frac{2}{3}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{8}{27} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{8}{27} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{8}{27} \cdot (-x)^2 + 2\frac{2}{3} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{8}{27}x^2 + 2\frac{2}{3}x = 0$
$x(\frac{8}{27}x + 2\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{8}{27}x + 2\frac{2}{3} = 0$
$\frac{8}{27}x + 2\frac{2}{3} = 0 \qquad / - 2\frac{2}{3}$
$\frac{8}{27}x = -2\frac{2}{3} \qquad / : \frac{8}{27}$
$x = \frac{-2\frac{2}{3}}{\frac{8}{27}}$
$x = -9$
$\underline{x_1 = -9; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-9	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -9[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-9; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{16}{27}x + 2\frac{2}{3} = 0$
$\frac{16}{27}x + 2\frac{2}{3} = 0 \qquad / - 2\frac{2}{3}$
$\frac{16}{27}x = -2\frac{2}{3} \qquad / : \frac{16}{27}$
$x = \frac{-2\frac{2}{3}}{\frac{16}{27}}$
$x = -4\frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -4\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-4\frac{1}{2}) = \frac{16}{27} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-4\frac{1}{2}/-6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-4\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-4\frac{1}{2}; \infty[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend
$x \in]-\infty; -4\frac{1}{2}[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

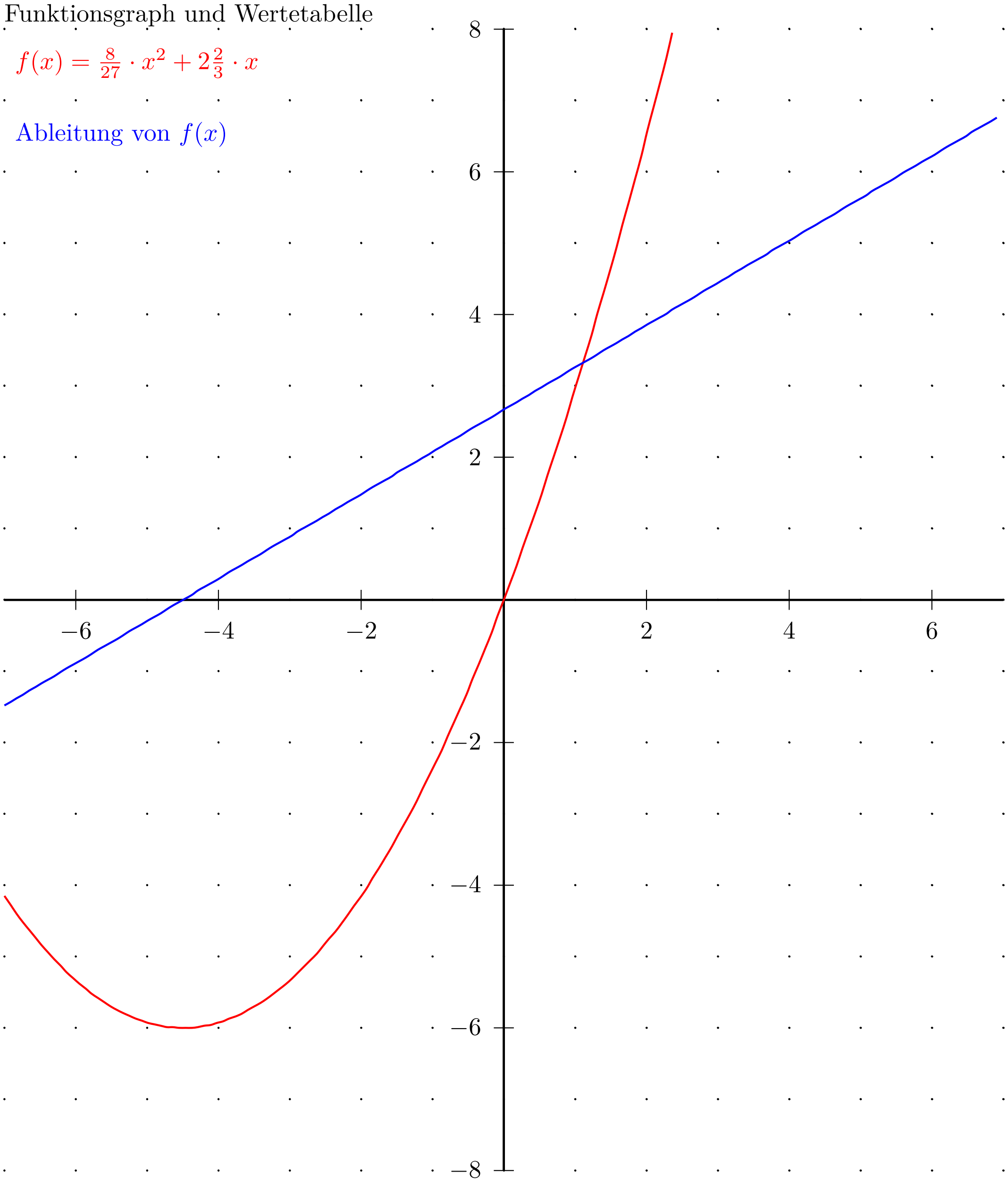
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-9}^{0} \left(\frac{8}{27}x^2 + 2\frac{2}{3}x\right) dx = \left[\frac{8}{81}x^3 + 1\frac{1}{3}x^2\right]_{-9}^{0}$$

$$= \left(\frac{8}{81} \cdot 0^3 + 1\frac{1}{3} \cdot 0^2\right) - \left(\frac{8}{81} \cdot (-9)^3 + 1\frac{1}{3} \cdot (-9)^2\right)$$

$$= (0) - (36) = -36$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{4}{27}$	$-1\frac{13}{27}$	$\frac{16}{27}$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{22}{27}$	$-1\frac{5}{27}$	$\frac{16}{27}$
-6	$-5\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$
$-5\frac{1}{2}$	$-5\frac{19}{27}$	$-\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$
-5	$-5\frac{25}{27}$	$-\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$
$-4\frac{1}{2}$	-6	0	$\frac{16}{27}$
-4	$-5\frac{25}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$
$-3\frac{1}{2}$	$-5\frac{19}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$
-3	$-5\frac{1}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$
$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{22}{27}$	$1\frac{5}{27}$	$\frac{16}{27}$
-2	$-4\frac{4}{27}$	$1\frac{13}{27}$	$\frac{16}{27}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{7}{9}$	$\frac{16}{27}$
-1	$-2\frac{10}{27}$	$2\frac{2}{27}$	$\frac{16}{27}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{27}$	$2\frac{10}{27}$	$\frac{16}{27}$
0	0	$2\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$2\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{27}$	$2\frac{26}{27}$	$\frac{16}{27}$
1	$2\frac{26}{27}$	$3\frac{7}{27}$	$\frac{16}{27}$
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{3}$	$3\frac{5}{9}$	$\frac{16}{27}$
2	$6\frac{14}{27}$	$3\frac{23}{27}$	$\frac{16}{27}$
$2\frac{1}{2}$	$8\frac{14}{27}$	$4\frac{4}{27}$	$\frac{16}{27}$
3	$10\frac{2}{3}$	$4\frac{4}{9}$	$\frac{16}{27}$
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{26}{27}$	$4\frac{20}{27}$	$\frac{16}{27}$
4	$15\frac{11}{27}$	$5\frac{1}{27}$	$\frac{16}{27}$
$4\frac{1}{2}$	18	$5\frac{1}{3}$	$\frac{16}{27}$
5	$20\frac{20}{27}$	$5\frac{17}{27}$	$\frac{16}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$23\frac{17}{27}$	$5\frac{25}{27}$	$\frac{16}{27}$
6	$26\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{9}$	$\frac{16}{27}$
$6\frac{1}{2}$	$29\frac{23}{27}$	$6\frac{14}{27}$	$\frac{16}{27}$
7	$33\frac{5}{27}$	$6\frac{22}{27}$	$\frac{16}{27}$

Aufgabe (37)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{20}{81}x^2 + 2\frac{2}{9}x = \frac{20}{81}(x+9)x$
$f'(x) = \frac{40}{81}x + 2\frac{2}{9}$
$f''(x) = \frac{40}{81}$
$F(x) = \int(\frac{20}{81}x^2 + 2\frac{2}{9}x)dx = 0,0823x^3 + 1\frac{1}{9}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-5), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(\frac{20}{81} + \frac{2\frac{2}{9}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{20}{81} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{20}{81} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{20}{81} \cdot (-x)^2 + 2\frac{2}{9} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{20}{81}x^2 + 2\frac{2}{9}x = 0$
$x(\frac{20}{81}x + 2\frac{2}{9}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{20}{81}x + 2\frac{2}{9} = 0$
$\frac{20}{81}x + 2\frac{2}{9} = 0 \qquad / - 2\frac{2}{9}$
$\frac{20}{81}x = -2\frac{2}{9} \qquad / : \frac{20}{81}$
$x = \frac{-2\frac{2}{9}}{\frac{20}{81}}$
$x = -9$
$\underline{x_1 = -9; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-9	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -9[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-9; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{40}{81}x + 2\frac{2}{9} = 0$
$\frac{40}{81}x + 2\frac{2}{9} = 0 \qquad / - 2\frac{2}{9}$
$\frac{40}{81}x = -2\frac{2}{9} \qquad / : \frac{40}{81}$
$x = \frac{-2\frac{2}{9}}{\frac{40}{81}}$
$x = -4\frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -4\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-4\frac{1}{2}) = \frac{40}{81} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-4\frac{1}{2}/-5)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-4\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-4\frac{1}{2}; \infty[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend
$x \in]-\infty; -4\frac{1}{2}[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

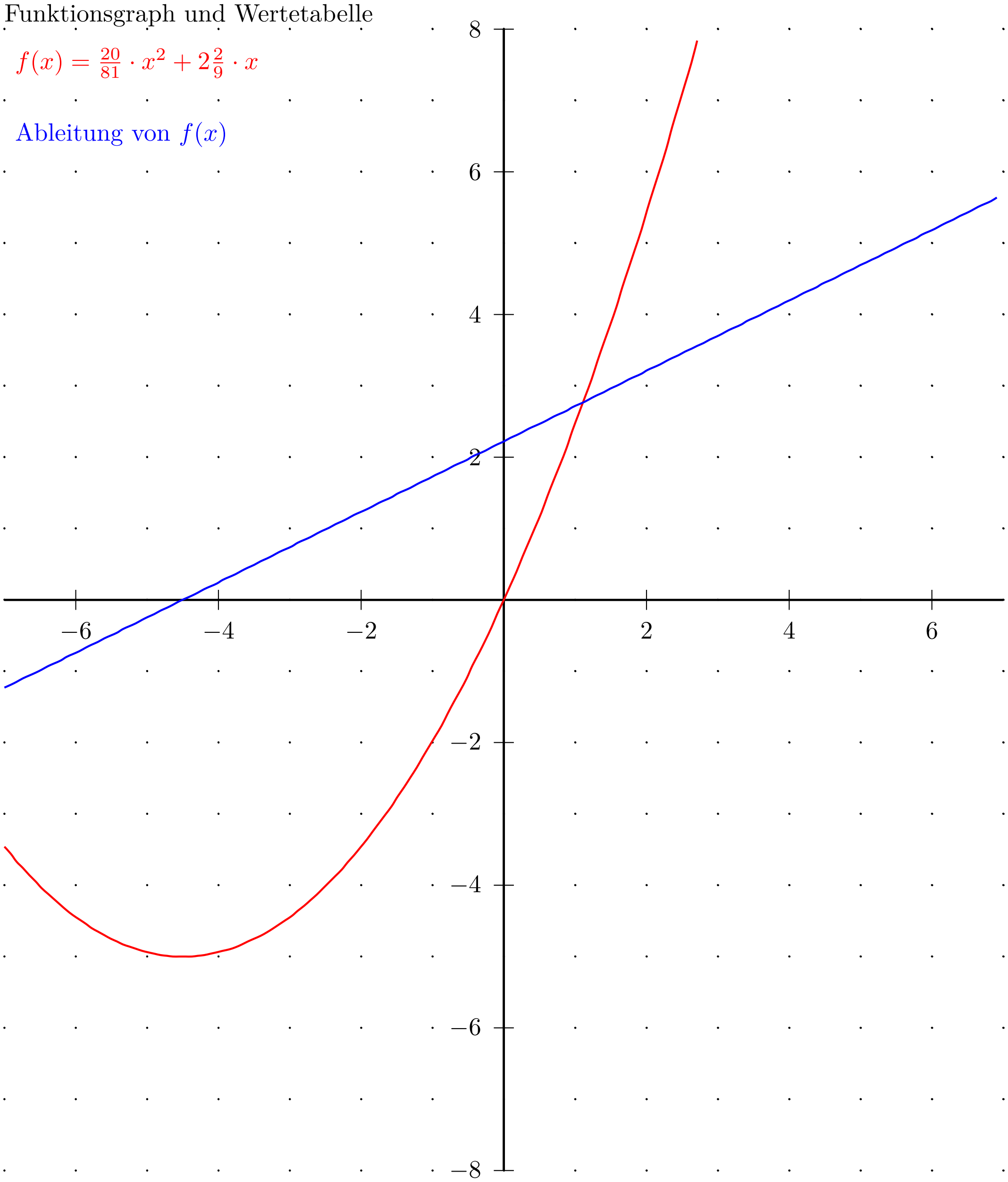
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-9}^{0} \left(\frac{20}{81}x^2 + 2\frac{2}{9}x\right) dx = \left[0,0823x^3 + 1\frac{1}{9}x^2\right]_{-9}^{0}$$

$$= \left(0,0823 \cdot 0^3 + 1\frac{1}{9} \cdot 0^2\right) - \left(0,0823 \cdot (-9)^3 + 1\frac{1}{9} \cdot (-9)^2\right)$$

$$= (0) - (30) = -30$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-3\frac{37}{81}$	$-1\frac{19}{81}$	$\frac{40}{81}$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{81}$	$-\frac{80}{81}$	$\frac{40}{81}$
-6	$-4\frac{4}{9}$	$-\frac{20}{27}$	$\frac{40}{81}$
$-5\frac{1}{2}$	$-4\frac{61}{81}$	$-\frac{40}{81}$	$\frac{40}{81}$
-5	$-4\frac{76}{81}$	$-\frac{20}{81}$	$\frac{40}{81}$
$-4\frac{1}{2}$	-5	0	$\frac{40}{81}$
-4	$-4\frac{76}{81}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{40}{81}$
$-3\frac{1}{2}$	$-4\frac{61}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{40}{81}$
-3	$-4\frac{4}{9}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{40}{81}$
$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{81}$	$\frac{80}{81}$	$\frac{40}{81}$
-2	$-3\frac{37}{81}$	$1\frac{19}{81}$	$\frac{40}{81}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{9}$	$1\frac{13}{27}$	$\frac{40}{81}$
-1	$-1\frac{79}{81}$	$1\frac{59}{81}$	$\frac{40}{81}$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{4}{81}$	$1\frac{79}{81}$	$\frac{40}{81}$
0	0	$2\frac{2}{9}$	$\frac{40}{81}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$2\frac{2}{9}$	$\frac{40}{81}$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{14}{81}$	$2\frac{38}{81}$	$\frac{40}{81}$
1	$2\frac{38}{81}$	$2\frac{58}{81}$	$\frac{40}{81}$
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{8}{9}$	$2\frac{26}{27}$	$\frac{40}{81}$
2	$5\frac{35}{81}$	$3\frac{17}{81}$	$\frac{40}{81}$
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{8}{81}$	$3\frac{37}{81}$	$\frac{40}{81}$
3	$8\frac{8}{9}$	$3\frac{19}{27}$	$\frac{40}{81}$
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{65}{81}$	$3\frac{77}{81}$	$\frac{40}{81}$
4	$12\frac{68}{81}$	$4\frac{16}{81}$	$\frac{40}{81}$
$4\frac{1}{2}$	15	$4\frac{4}{9}$	$\frac{40}{81}$
5	$17\frac{23}{81}$	$4\frac{56}{81}$	$\frac{40}{81}$
$5\frac{1}{2}$	$19\frac{56}{81}$	$4\frac{76}{81}$	$\frac{40}{81}$
6	$22\frac{2}{9}$	$5\frac{5}{27}$	$\frac{40}{81}$
$6\frac{1}{2}$	$24\frac{71}{81}$	$5\frac{35}{81}$	$\frac{40}{81}$
7	$27\frac{53}{81}$	$5\frac{55}{81}$	$\frac{40}{81}$

Aufgabe (38)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25} = 1\frac{11}{25}(x+6)(x+1)$
$f'(x) = 2\frac{22}{25}x + 10\frac{2}{25}$
$f''(x) = 2\frac{22}{25}$
$F(x) = \int(1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25})dx = \frac{12}{25}x^3 + 5\frac{1}{25}x^2 + 8\frac{16}{25}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-9), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1\frac{11}{25} + \frac{10\frac{2}{25}}{x} + \frac{8\frac{16}{25}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1\frac{11}{25} \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1\frac{11}{25} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1\frac{11}{25} \cdot (-x)^2 + 10\frac{2}{25} \cdot (-x) + 8\frac{16}{25}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25} = 0$

$1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25} = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-10\frac{2}{25} \pm \sqrt{10\frac{2}{25}^2 - 4 \cdot 1\frac{11}{25} \cdot 8\frac{16}{25}}}{2 \cdot 1\frac{11}{25}}$$
$$x_{1/2} = \frac{-10\frac{2}{25} \pm \sqrt{51\frac{21}{25}}}{2\frac{22}{25}}$$
$$x_{1/2} = \frac{-10\frac{2}{25} \pm 7\frac{1}{5}}{2\frac{22}{25}}$$
$$x_1 = \frac{-10\frac{2}{25} + 7\frac{1}{5}}{2\frac{22}{25}} \qquad x_2 = \frac{-10\frac{2}{25} - 7\frac{1}{5}}{2\frac{22}{25}}$$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -6$
$\underline{x_1 = -6;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-6	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -6[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-6; -1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2\frac{22}{25}x + 10\frac{2}{25} = 0$
$2\frac{22}{25}x + 10\frac{2}{25} = 0 \qquad / - 10\frac{2}{25}$
$2\frac{22}{25}x = -10\frac{2}{25} \qquad / : 2\frac{22}{25}$
$$x = \frac{-10\frac{2}{25}}{2\frac{22}{25}}$$
$x = -3\frac{1}{2}$

$x_3 = -3\frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle

$f''(-3\frac{1}{2}) = 2\frac{22}{25} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(-3\frac{1}{2}/-9)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-3\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

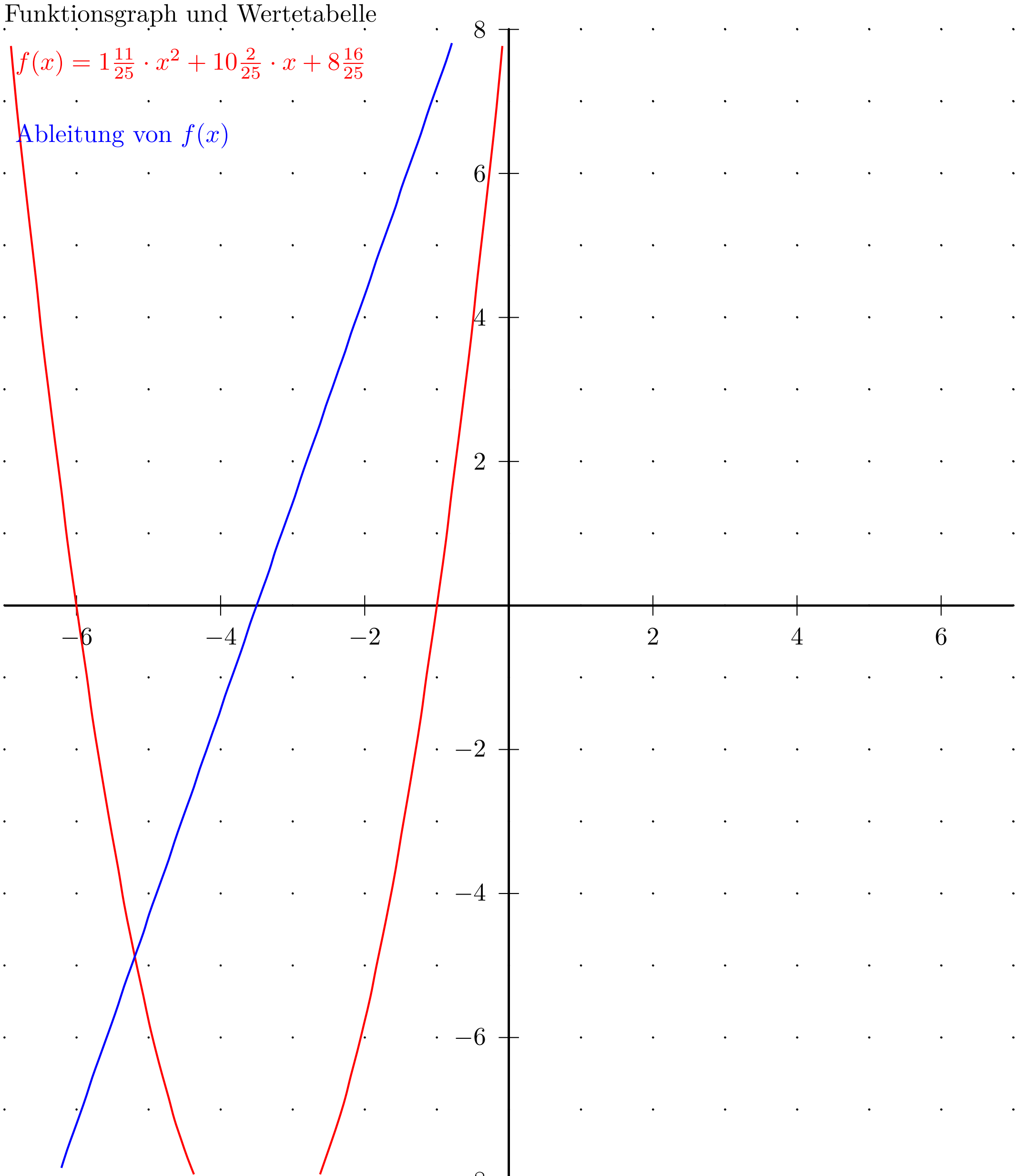
$x \in]-3\frac{1}{2};\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;-3\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-6}^{-1}\left(1\frac{11}{25}x^2 + 10\frac{2}{25}x + 8\frac{16}{25}\right)dx = \left[\frac{12}{25}x^3 + 5\frac{1}{25}x^2 + 8\frac{16}{25}x\right]_{-6}^{-1}$$
$$= \left(\frac{12}{25}\cdot(-1)^3 + 5\frac{1}{25}\cdot(-1)^2 + 8\frac{16}{25}\cdot(-1)\right) - \left(\frac{12}{25}\cdot(-6)^3 + 5\frac{1}{25}\cdot(-6)^2 + 8\frac{16}{25}\cdot(-6)\right)$$
$$= \left(-4\frac{2}{25}\right) - \left(25\frac{23}{25}\right) = -30$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$8\frac{16}{25}$	$-10\frac{2}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$-6\frac{1}{2}$	$3\frac{24}{25}$	$-8\frac{16}{25}$	$2\frac{22}{25}$
-6	0	$-7\frac{1}{5}$	$2\frac{22}{25}$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{6}{25}$	$-5\frac{19}{25}$	$2\frac{22}{25}$
-5	$-5\frac{19}{25}$	$-4\frac{8}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$-4\frac{1}{2}$	$-7\frac{14}{25}$	$-2\frac{22}{25}$	$2\frac{22}{25}$
-4	$-8\frac{16}{25}$	$-1\frac{11}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$-3\frac{1}{2}$	-9	0	$2\frac{22}{25}$
-3	$-8\frac{16}{25}$	$1\frac{11}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$-2\frac{1}{2}$	$-7\frac{14}{25}$	$2\frac{22}{25}$	$2\frac{22}{25}$
-2	$-5\frac{19}{25}$	$4\frac{8}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{6}{25}$	$5\frac{19}{25}$	$2\frac{22}{25}$
-1	0	$7\frac{1}{5}$	$2\frac{22}{25}$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{24}{25}$	$8\frac{16}{25}$	$2\frac{22}{25}$
0	$8\frac{16}{25}$	$10\frac{2}{25}$	$2\frac{22}{25}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$8\frac{16}{25}$	$10\frac{2}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{25}$	$11\frac{13}{25}$	$2\frac{22}{25}$
1	$20\frac{4}{25}$	$12\frac{24}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$1\frac{1}{2}$	27	$14\frac{2}{5}$	$2\frac{22}{25}$
2	$34\frac{14}{25}$	$15\frac{21}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$2\frac{1}{2}$	$42\frac{21}{25}$	$17\frac{7}{25}$	$2\frac{22}{25}$
3	$51\frac{21}{25}$	$18\frac{18}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$3\frac{1}{2}$	$61\frac{14}{25}$	$20\frac{4}{25}$	$2\frac{22}{25}$
4	72	$21\frac{3}{5}$	$2\frac{22}{25}$
$4\frac{1}{2}$	$83\frac{4}{25}$	$23\frac{1}{25}$	$2\frac{22}{25}$
5	$95\frac{1}{25}$	$24\frac{12}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$5\frac{1}{2}$	$107\frac{16}{25}$	$25\frac{23}{25}$	$2\frac{22}{25}$
6	$120\frac{24}{25}$	$27\frac{9}{25}$	$2\frac{22}{25}$
$6\frac{1}{2}$	135	$28\frac{4}{5}$	$2\frac{22}{25}$
7	$149\frac{19}{25}$	$30\frac{6}{25}$	$2\frac{22}{25}$

3 Kubische Funktionen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3.1 Aufgaben

(1) $f(x) = -2x^3$
(2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2$
(3) $f(x) = x^3 - 3x^2$
(4) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4$
(5) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x$
(6) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x$
(7) $f(x) = -x^3 + 3x + 2$
(8) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$
(9) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x$
(10) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$
(11) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
(12) $f(x) = -\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55}$
(13) $f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5}$
(14) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2$
(15) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x$
(16) $f(x) = 3x^3 - 22x^2 + 43x + 12$
(17) $f(x) = -5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5}$
(18) $f(x) = -6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2$
(19) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8$
(20) $f(x) = -\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x$
(21) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
(22) $f(x) = -5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2$
(23) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4$
(24) $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$
(25) $f(x) = 40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x$
(26) $f(x) = 54x^3 - 270x^2 + 432x - 216$
(27) $f(x) = 1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x$
(28) $f(x) = -2x^3 + 6x^2$
(29) $f(x) = -2x^3 + 6x^2$
(30) $f(x) = 5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x$
(31) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x$
(32) $f(x) = -0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35}$
(33) $f(x) = -\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28}$
(34) $f(x) = -13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54$
(35) $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$
(36) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2x^3$
$f'(x) = -6x^2$
$f''(x) = -12x$
$f'''(x) = -12$
$F(x) = \int (-2x^3)dx = -\frac{1}{2}x^4 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-2)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^3$
$f(-x) = -\left(-2 \cdot x^3\right)$
$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2x^3 = 0$
$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_1 = 0;$ 3-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -6x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_2 = 0;$ 2-fache Nullstelle
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
Terrassenpukt:(0/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[$ $\cup$ $]0; \infty[$ $f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -12x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_3 = 0;$ 1-fache Nullstelle
$f'''(0) = 0$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:(0/0)
• Kruemmung

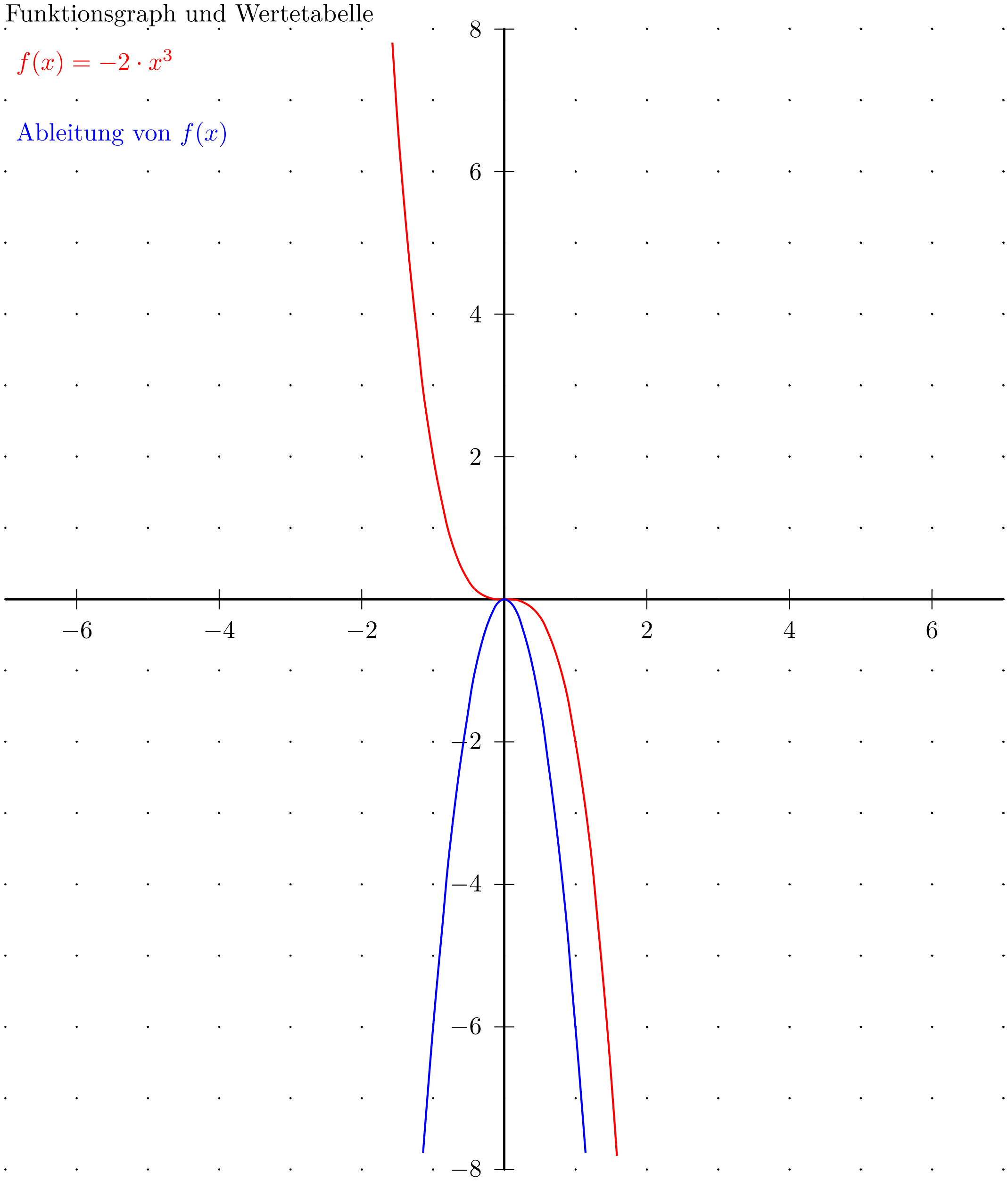
	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	686	-294	84
$-6\frac{1}{2}$	$549\frac{1}{4}$	-254	78
-6	432	-216	72
$-5\frac{1}{2}$	$332\frac{3}{4}$	-182	66
-5	250	-150	60
$-4\frac{1}{2}$	$182\frac{1}{4}$	-122	54
-4	128	-96	48
$-3\frac{1}{2}$	$85\frac{3}{4}$	$-73,5$	42
-3	54	-54	36
$-2\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	$-37,5$	30
-2	16	-24	24
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$-13,5$	18
-1	2	-6	12
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-1,5$	6
0	0	$-0,000613$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,000613$	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-1,5$	-6
1	-2	-6	-12
$1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	$-13,5$	-18
2	-16	-24	-24
$2\frac{1}{2}$	$-31\frac{1}{4}$	$-37,5$	-30
3	-54	-54	-36
$3\frac{1}{2}$	$-85\frac{3}{4}$	$-73,5$	-42
4	-128	-96	-48
$4\frac{1}{2}$	$-182\frac{1}{4}$	-122	-54
5	-250	-150	-60
$5\frac{1}{2}$	$-332\frac{3}{4}$	-182	-66
6	-432	-216	-72
$6\frac{1}{2}$	$-549\frac{1}{4}$	-254	-78
7	-686	-294	-84

Aufgabe (2)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 = -\frac{1}{4}x^2(x - 2\frac{2}{3})$
$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{3}x = -\frac{3}{4}x(x - 1\frac{7}{9})$
$f''(x) = -1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3} = -1\frac{1}{2}(x - \frac{8}{9})$
$f'''(x) = -1\frac{1}{2}$
$F(x) = \int(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2)dx = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{2}{9}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-\frac{1}{4} + \frac{\frac{2}{3}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^3 + \frac{2}{3} \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 = 0$
$x^2(-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0$
$-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0 \qquad / -\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3} \qquad / : (-\frac{1}{4})$
$x = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{4}}$
$x = 2\frac{2}{3}$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	$2\frac{2}{3}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 2\frac{2}{3}[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$
$\underline{x \in]2\frac{2}{3}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{3}x = 0$
$x(-\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{3} = 0$
$-\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{3} = 0 \qquad / -1\frac{1}{3}$
$-\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{3} \qquad / : \left(-\frac{3}{4}\right)$
$x = \frac{-1\frac{1}{3}}{-\frac{3}{4}}$
$x = 1\frac{7}{9}$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1\frac{7}{9}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(0) = 1\frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(0/0)
$f''(1\frac{7}{9}) = -1\frac{1}{3}$
$f''(1\frac{7}{9}) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(1\frac{7}{9}/0,702)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{7}{9}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0; 1\frac{7}{9}[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]1\frac{7}{9}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3} = 0$
$-1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3} = 0 \qquad / -1\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{3} \qquad / : \left(-1\frac{1}{2}\right)$
$x = \frac{-1\frac{1}{3}}{-1\frac{1}{2}}$
$x = \frac{8}{9}$
$x_5 = \frac{8}{9}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f'''(\frac{8}{9}) = 0,351$
$f'''(\frac{8}{9}) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(\frac{8}{9}/0,351)$

• Kruemmung

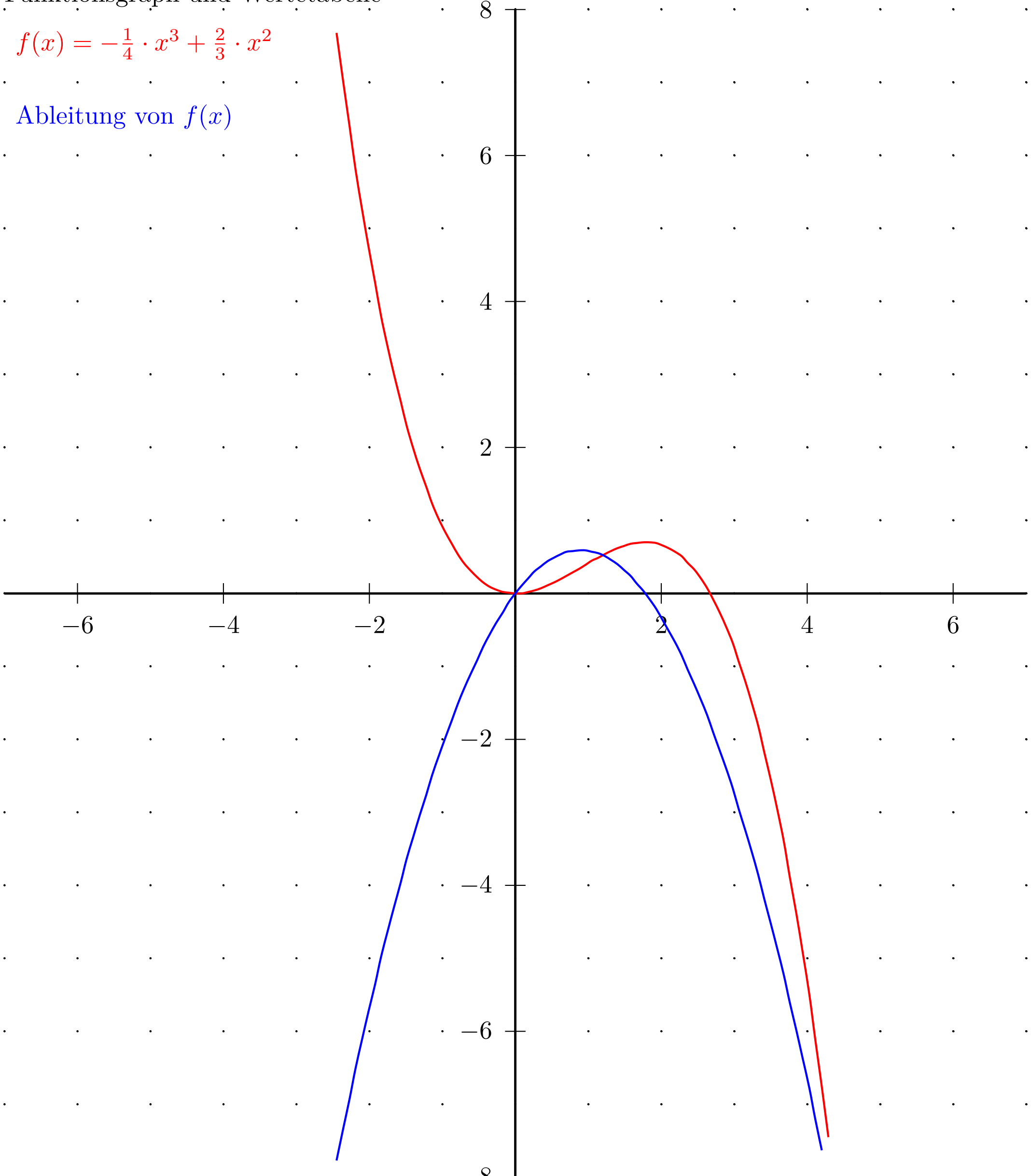
	$x <$	$\frac{8}{9}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; \frac{8}{9}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]\frac{8}{9}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_0^{2\frac{2}{3}} \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{2}{9}x^3\right]_0^{2\frac{2}{3}}$
$= \left(-\frac{1}{16} \cdot 2\frac{2}{3}^4 + \frac{2}{9} \cdot 2\frac{2}{3}^3\right) - \left(-\frac{1}{16} \cdot 0^4 + \frac{2}{9} \cdot 0^3\right)$
$= (1,05) - (0) = 1,05$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$118\frac{5}{12}$	$-46,1$	$11\frac{5}{6}$
$-6\frac{1}{2}$	$96\frac{79}{96}$	$-40,4$	$11\frac{1}{12}$
-6	78	-35	$10\frac{1}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$61\frac{73}{96}$	-30	$9\frac{7}{12}$
-5	$47\frac{11}{12}$	$-25,4$	$8\frac{5}{6}$
$-4\frac{1}{2}$	$36\frac{9}{32}$	$-21,2$	$8\frac{1}{12}$
-4	$26\frac{2}{3}$	$-17,3$	$7\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$18\frac{85}{96}$	$-13,9$	$6\frac{7}{12}$
-3	$12\frac{3}{4}$	$-10,8$	$5\frac{5}{6}$
$-2\frac{1}{2}$	$8\frac{7}{96}$	$-8,02$	$5\frac{1}{12}$
-2	$4\frac{2}{3}$	$-5,67$	$4\frac{1}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{32}$	$-3,69$	$3\frac{7}{12}$
-1	$\frac{11}{12}$	$-2,08$	$2\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{19}{96}$	$-0,854$	$2\frac{1}{12}$
0	0	$-7,66 \cdot 10^{-5}$	$1\frac{1}{3}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-7,66 \cdot 10^{-5}$	$1\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{96}$	$0,479$	$\frac{7}{12}$
1	$\frac{5}{12}$	$0,583$	$-\frac{1}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{21}{32}$	$0,312$	$-\frac{11}{12}$
2	$\frac{2}{3}$	$-0,333$	$-1\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{25}{96}$	$-1,35$	$-2\frac{5}{12}$
3	$-\frac{3}{4}$	$-2,75$	$-3\frac{1}{6}$
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{53}{96}$	$-4,52$	$-3\frac{11}{12}$
4	$-5\frac{1}{3}$	$-6,67$	$-4\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$-9\frac{9}{32}$	$-9,19$	$-5\frac{5}{12}$
5	$-14\frac{7}{12}$	$-12,1$	$-6\frac{1}{6}$
$5\frac{1}{2}$	$-21\frac{41}{96}$	$-15,4$	$-6\frac{11}{12}$
6	-30	-19	$-7\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$-40\frac{47}{96}$	-23	$-8\frac{5}{12}$
7	$-53\frac{1}{12}$	$-27,4$	$-9\frac{1}{6}$

Aufgabe (3)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$
$f'''(x) = 6$
$F(x) = \int (x^3 - 3x^2)dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(1 - \dfrac{3}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^3 - 3x^2 = 0$
$x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x - 3 = 0$
$x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$x = 3$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]3;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$
$x(3x-6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 3x - 6 = 0$
$3x - 6 = 0 \qquad / + 6$
$3x = 6 \qquad / : 3$
$x = \dfrac{6}{3}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -6$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/0)}$
$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/-4)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]0;2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 6x - 6 = 0$

$6x - 6 = 0 \qquad / + 6$
$6x = 6 \qquad / : 6$
$x = \frac{6}{6}$
$x = 1$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(1) = -2$
$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1/-2)}$
• Kruemmung

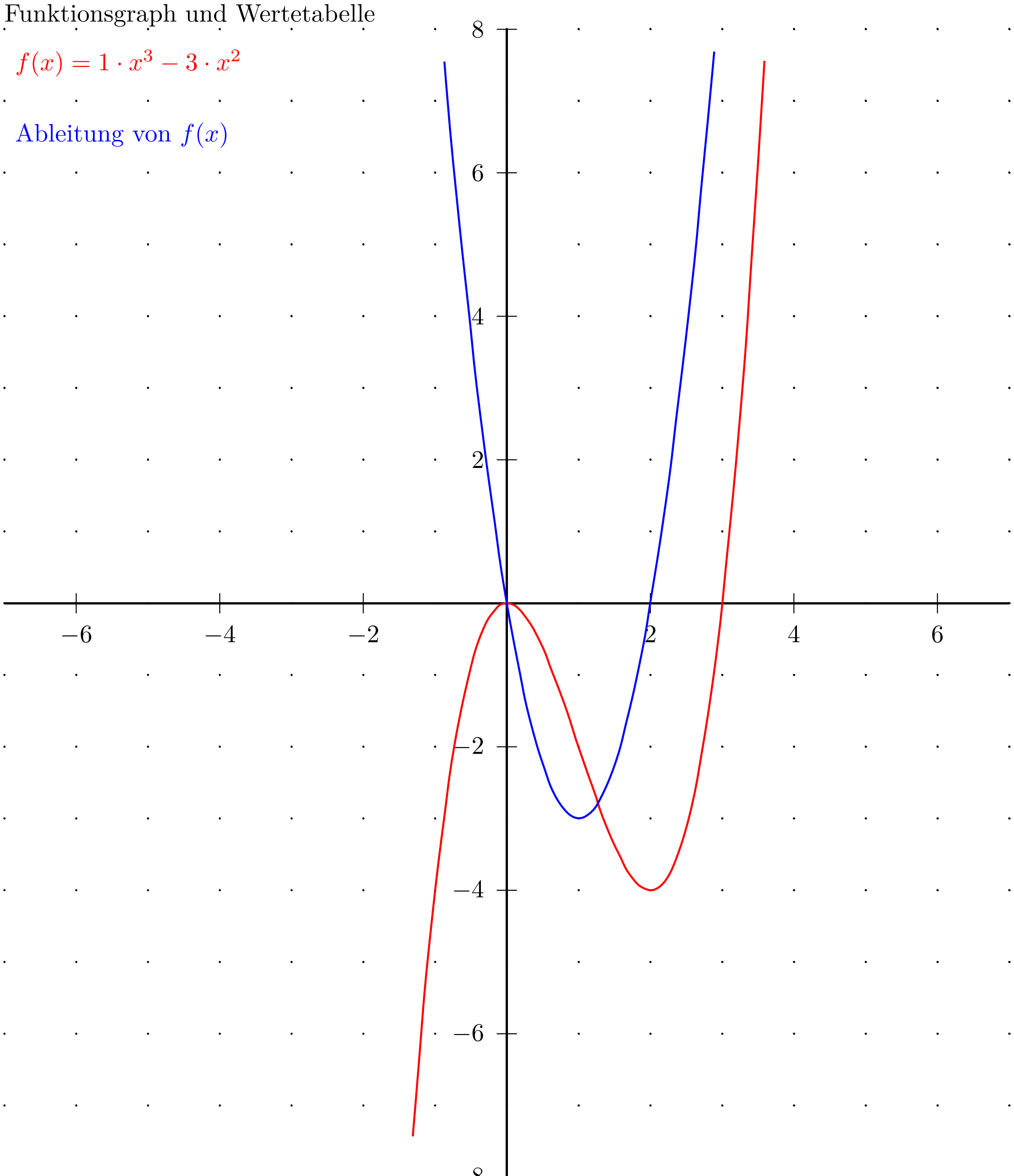
	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_0^3 \left(x^3 - 3x^2\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_0^3$
$= \left(\frac{1}{4} \cdot 3^4 - 1 \cdot 3^3\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 1 \cdot 0^3\right)$
$= \left(-6\frac{3}{4}\right) - (0) = -6\frac{3}{4}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-490	189	-48
$-6\frac{1}{2}$	$-401\frac{3}{8}$	166	-45
-6	-324	144	-42
$-5\frac{1}{2}$	$-257\frac{1}{8}$	124	-39
-5	-200	105	-36
$-4\frac{1}{2}$	$-151\frac{7}{8}$	$87,8$	-33
-4	-112	72	-30
$-3\frac{1}{2}$	$-79\frac{5}{8}$	$57,8$	-27
-3	-54	45	-24
$-2\frac{1}{2}$	$-34\frac{3}{8}$	$33,8$	-21
-2	-20	24	-18
$-1\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$15,8$	-15
-1	-4	9	-12
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	$3,75$	-9
0	0	$0,000306$	-6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,000306$	-6
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$-2,25$	-3
1	-2	-3	0
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{8}$	$-2,25$	3
2	-4	$0,000306$	6
$2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$3,75$	9
3	0	9	12
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	$15,8$	15
4	16	24	18
$4\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{8}$	$33,8$	21
5	50	45	24
$5\frac{1}{2}$	$75\frac{5}{8}$	$57,8$	27
6	108	72	30
$6\frac{1}{2}$	$147\frac{7}{8}$	$87,8$	33
7	196	105	36

Aufgabe (4)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4 = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 4)(x + 2)$
$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2$
$f''(x) = 3x$
$f'''(x) = 3$
$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^3 + 4)dx = \frac{1}{8}x^4 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{1}{2} + \dfrac{4}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4 = 0$

$\frac{1}{2}x^3 + 4 = 0\frac{1}{2}x^3 + 4 = 0 \qquad / - 4$
$\frac{1}{2}x^3 = -4 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x^3 = \dfrac{-4}{\frac{1}{2}}$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$
Polynomdivision:(-2)

$$\begin{array}{llllll}
(\frac{1}{2}x^3 & & & +4 &) : (x+2) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 \\
-(\frac{1}{2}x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
& -x^2 & & +4 & \\
& -(-x^2 & -2x) & & \\
\hline
& & 2x & +4 & \\
& & -(2x & +4) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$\dfrac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-3}}{1}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$x_1 = -2;$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 1\dfrac{1}{2}x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 4$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/4)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 3x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(0) = 4$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/4)}$
• Kruemmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-167\frac{1}{2}$	$73,5$	-21
$-6\frac{1}{2}$	$-133\frac{5}{16}$	$63,4$	$-19\frac{1}{2}$
-6	-104	54	-18
$-5\frac{1}{2}$	$-79\frac{3}{16}$	$45,4$	$-16\frac{1}{2}$
-5	$-58\frac{1}{2}$	$37,5$	-15
$-4\frac{1}{2}$	$-41\frac{9}{16}$	$30,4$	$-13\frac{1}{2}$
-4	-28	24	-12
$-3\frac{1}{2}$	$-17\frac{7}{16}$	$18,4$	$-10\frac{1}{2}$
-3	$-9\frac{1}{2}$	$13,5$	-9
$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{13}{16}$	$9,38$	$-7\frac{1}{2}$
-2	0	6	-6
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{16}$	$3,38$	$-4\frac{1}{2}$
-1	$3\frac{1}{2}$	$1,5$	-3
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{15}{16}$	$0,375$	$-1\frac{1}{2}$
0	4	$0,000153$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	$0,000153$	0
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{16}$	$0,375$	$1\frac{1}{2}$
1	$4\frac{1}{2}$	$1,5$	3
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{16}$	$3,38$	$4\frac{1}{2}$
2	8	6	6
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{13}{16}$	$9,38$	$7\frac{1}{2}$
3	$17\frac{1}{2}$	$13,5$	9
$3\frac{1}{2}$	$25\frac{7}{16}$	$18,4$	$10\frac{1}{2}$
4	36	24	12
$4\frac{1}{2}$	$49\frac{9}{16}$	$30,4$	$13\frac{1}{2}$
5	$66\frac{1}{2}$	$37,5$	15
$5\frac{1}{2}$	$87\frac{3}{16}$	$45,4$	$16\frac{1}{2}$
6	112	54	18
$6\frac{1}{2}$	$141\frac{5}{16}$	$63,4$	$19\frac{1}{2}$
7	$175\frac{1}{2}$	$73,5$	21

Aufgabe (5)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x = -\frac{1}{6}(x+3,46)x(x-3,46)$
$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x+2)(x-2)$
$f''(x) = -x = -x$
$f'''(x) = -1$
$F(x) = \int(-\frac{1}{6}x^3 + 2x)dx = -\frac{1}{24}x^4 + x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-\frac{1}{6} + \dfrac{2}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{6} \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{6} \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{6} \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)$
$f(-x) = -\left(-\frac{1}{6} \cdot x^3 + 2 \cdot x\right)$
$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x = 0$
$x(-\frac{1}{6}x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0$
$-\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0 \qquad / -2$
$-\frac{1}{6}x^2 = -2 \qquad / : \left(-\frac{1}{6}\right)$
$x^2 = \dfrac{-2}{-\frac{1}{6}}$
$x = \pm\sqrt{12}$
$x_1 = 3,46 \qquad x_2 = -3,46$
$\underline{x_1 = -3,46;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 3,46;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,46$	$< x <$	0	$< x <$	$3,46$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -3,46[\quad \cup \quad]0; 3,46[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-3,46; 0[\quad \cup \quad]3,46; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2 = 0$

$-\dfrac{1}{2}x^2 + 2 = 0 \qquad / -2$
$-\dfrac{1}{2}x^2 = -2 \qquad / : \left(-\dfrac{1}{2}\right)$
$x^2 = \dfrac{-2}{-\frac{1}{2}}$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_4 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2/-2\frac{2}{3})}$
$f''(2) = -2$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/2\frac{2}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-2;2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_6 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(0) = 0$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/0)}$
• Kruemmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]0;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-3,46}^{0} \left(-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right) dx = \left[-\frac{1}{24}x^4 + x^2\right]_{-3,46}^{0}$$
$$= \left(-\frac{1}{24} \cdot 0^4 + 1 \cdot 0^2\right) - \left(-\frac{1}{24} \cdot (-3,46)^4 + 1 \cdot (-3,46)^2\right)$$
$$= (0) - (6) = -6$$
$$A = \int_{0}^{3,46} \left(-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right) dx = \left[-\frac{1}{24}x^4 + x^2\right]_{0}^{3,46}$$
$$= \left(-\frac{1}{24} \cdot 3,46^4 + 1 \cdot 3,46^2\right) - \left(-\frac{1}{24} \cdot 0^4 + 1 \cdot 0^2\right)$$
$$= (6) - (0) = 6$$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$43\frac{1}{6}$	$-22,5$	7
$-6\frac{1}{2}$	$32\frac{37}{48}$	$-19,1$	$6\frac{1}{2}$
-6	24	-16	6
$-5\frac{1}{2}$	$16\frac{35}{48}$	$-13,1$	$5\frac{1}{2}$
-5	$10\frac{5}{6}$	$-10,5$	5
$-4\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{16}$	$-8,13$	$4\frac{1}{2}$
-4	$2\frac{2}{3}$	-6	4
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{48}$	$-4,13$	$3\frac{1}{2}$
-3	$-1\frac{1}{2}$	$-2,5$	3
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{19}{48}$	$-1,13$	$2\frac{1}{2}$
-2	$-2\frac{2}{3}$	$-5,1 \cdot 10^{-5}$	2
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{16}$	$0,875$	$1\frac{1}{2}$
-1	$-1\frac{5}{6}$	$1,5$	1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{47}{48}$	$1,87$	$\frac{1}{2}$
0	0	2	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	2	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{48}$	$1,87$	$-\frac{1}{2}$
1	$1\frac{5}{6}$	$1,5$	-1
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{16}$	$0,875$	$-1\frac{1}{2}$
2	$2\frac{2}{3}$	$-5,1 \cdot 10^{-5}$	-2
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{19}{48}$	$-1,13$	$-2\frac{1}{2}$
3	$1\frac{1}{2}$	$-2,5$	-3
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{48}$	$-4,13$	$-3\frac{1}{2}$
4	$-2\frac{2}{3}$	-6	-4
$4\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	$-8,13$	$-4\frac{1}{2}$
5	$-10\frac{5}{6}$	$-10,5$	-5
$5\frac{1}{2}$	$-16\frac{35}{48}$	$-13,1$	$-5\frac{1}{2}$
6	-24	-16	-6
$6\frac{1}{2}$	$-32\frac{37}{48}$	$-19,1$	$-6\frac{1}{2}$
7	$-43\frac{1}{6}$	$-22,5$	-7

Aufgabe (6)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 10)x$
$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 5 = 1\frac{1}{2}(x - 1,18)(x - 2,82)$
$f''(x) = 3x - 6 = 3(x - 2)$
$f'''(x) = 3$
$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x)dx = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{1}{2} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x = 0$
$x(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$
$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-1}}{1}$$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 1\dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 5 = 0$

$1\dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 5 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$
$$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{6}}{3}$$
$$x_{1/2} = \frac{6 \pm 2,45}{3}$$
$$x_1 = \frac{6 + 2,45}{3} \qquad x_2 = \frac{6 - 2,45}{3}$$
$x_1 = 2,82 \qquad x_2 = 1,18$
$\underline{x_2 = 1,18; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2,82; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(1,18) = -2,45$
$f''(1,18) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,18/2,54)}$
$f''(2,82) = 2,45 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2,82/1,46)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$1,18$	$< x <$	$2,82$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 1,18[\quad \cup \quad]2,82; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]1,18; 2,82[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 3x - 6 = 0$

$3x - 6 = 0 \qquad / + 6$
$3x = 6 \qquad / : 3$
$x = \frac{6}{3}$
$x = 2$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(2) = 2$
$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(2/2)}$
• Kruemmung

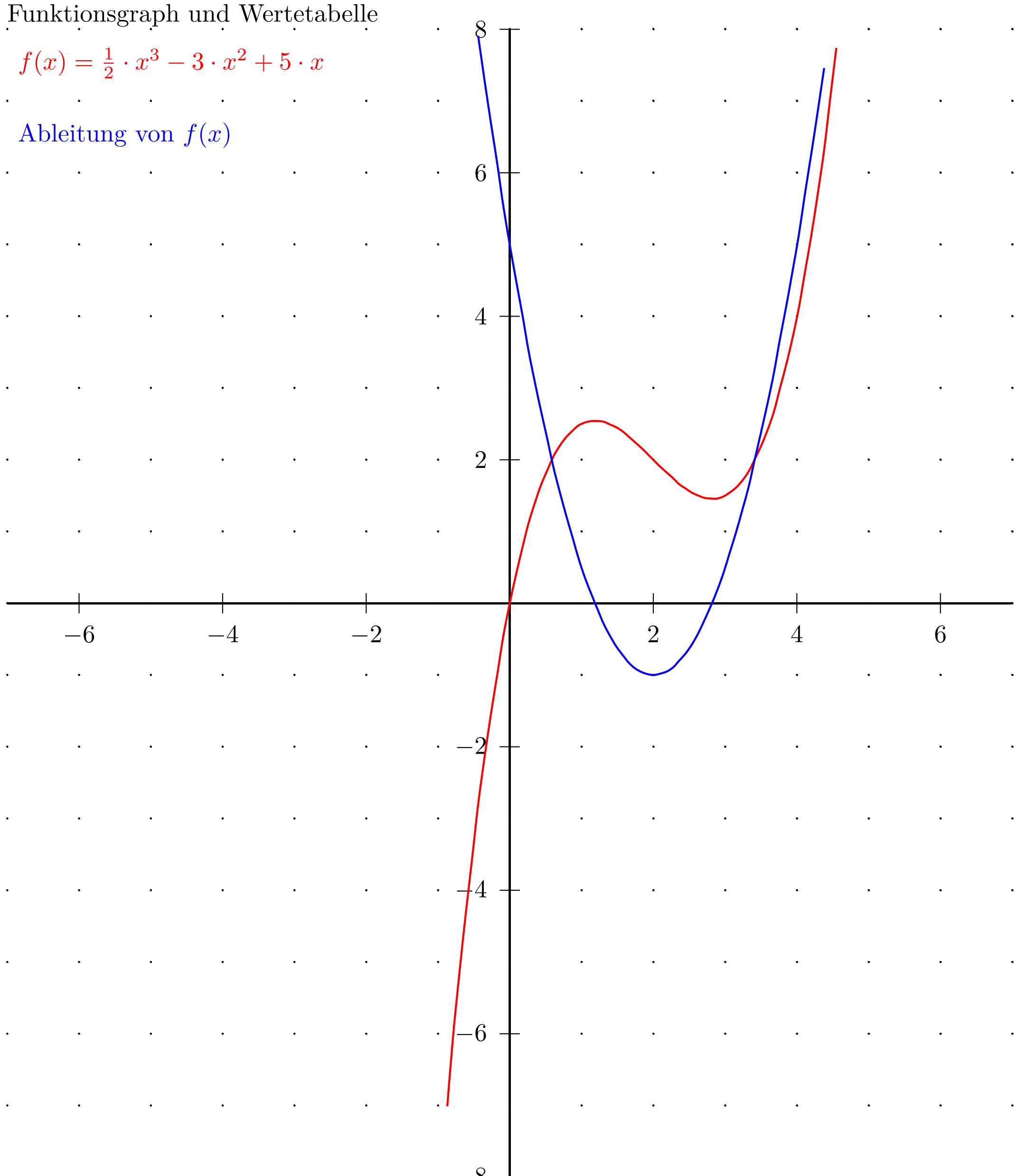
	$x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-353\frac{1}{2}$	121	-27
$-6\frac{1}{2}$	$-296\frac{9}{16}$	107	$-25\frac{1}{2}$
-6	-246	95	-24
$-5\frac{1}{2}$	$-201\frac{7}{16}$	$83,4$	$-22\frac{1}{2}$
-5	$-162\frac{1}{2}$	$72,5$	-21
$-4\frac{1}{2}$	$-128\frac{13}{16}$	$62,4$	$-19\frac{1}{2}$
-4	-100	53	-18
$-3\frac{1}{2}$	$-75\frac{11}{16}$	$44,4$	$-16\frac{1}{2}$
-3	$-55\frac{1}{2}$	$36,5$	-15
$-2\frac{1}{2}$	$-39\frac{1}{16}$	$29,4$	$-13\frac{1}{2}$
-2	-26	23	-12
$-1\frac{1}{2}$	$-15\frac{15}{16}$	$17,4$	$-10\frac{1}{2}$
-1	$-8\frac{1}{2}$	$12,5$	-9
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{5}{16}$	$8,38$	$-7\frac{1}{2}$
0	0	5	-6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	5	-6
$\frac{1}{2}$	$1\frac{13}{16}$	$2,38$	$-4\frac{1}{2}$
1	$2\frac{1}{2}$	$0,5$	-3
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{16}$	$-0,625$	$-1\frac{1}{2}$
2	2	-1	0
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$-0,625$	$1\frac{1}{2}$
3	$1\frac{1}{2}$	$0,5$	3
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{16}$	$2,38$	$4\frac{1}{2}$
4	4	5	6
$4\frac{1}{2}$	$7\frac{5}{16}$	$8,38$	$7\frac{1}{2}$
5	$12\frac{1}{2}$	$12,5$	9
$5\frac{1}{2}$	$19\frac{15}{16}$	$17,4$	$10\frac{1}{2}$
6	30	23	12
$6\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{16}$	$29,4$	$13\frac{1}{2}$
7	$59\frac{1}{2}$	$36,5$	15

Aufgabe (7)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -x^3 + 3x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$
$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$
$f''(x) = -6x = -6x$
$f'''(x) = -6$
$F(x) = \int(-x^3 + 3x + 2)dx = -\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-1 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1 \cdot (-x)^3 + 3 \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -x^3 + 3x + 2 = 0$

$-x^3 + 3x + 2 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llll}
(-x^3 & & +3x & +2 \quad) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & x^2 & +3x & +2 \\
 & -(x^2 & +x) & \\
\hline
 & & 2x & +2 \\
 & & -(2x & +2) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-x^2 + x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$
$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$
$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} \quad x_2 = \frac{-1 - 3}{-2}$
$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -3x^2 + 3 = 0$

$-3x^2 + 3 = 0 \qquad / -3$
$-3x^2 = -3 \qquad / : (-3)$
$x^2 = \frac{-3}{-3}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1/0)}$
$f''(1) = -6$
$f''(1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1/4)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-1; 1[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -6x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(0) = 2$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/2)}$
• Kruemmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-1}^{2} \left(-x^3 + 3x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 1\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right)$$
$$= (6) - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6\frac{3}{4}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	324	-144	42
$-6\frac{1}{2}$	$257\frac{1}{8}$	-124	39
-6	200	-105	36
$-5\frac{1}{2}$	$151\frac{7}{8}$	$-87,8$	33
-5	112	-72	30
$-4\frac{1}{2}$	$79\frac{5}{8}$	$-57,8$	27
-4	54	-45	24
$-3\frac{1}{2}$	$34\frac{3}{8}$	$-33,8$	21
-3	20	-24	18
$-2\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{8}$	$-15,8$	15
-2	4	-9	12
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$-3,75$	9
-1	0	$-0,000306$	6
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$2,25$	3
0	2	3	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	3	0
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$2,25$	-3
1	4	$-0,000306$	-6
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{8}$	$-3,75$	-9
2	0	-9	-12
$2\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{8}$	$-15,8$	-15
3	-16	-24	-18
$3\frac{1}{2}$	$-30\frac{3}{8}$	$-33,8$	-21
4	-50	-45	-24
$4\frac{1}{2}$	$-75\frac{5}{8}$	$-57,8$	-27
5	-108	-72	-30
$5\frac{1}{2}$	$-147\frac{7}{8}$	$-87,8$	-33
6	-196	-105	-36
$6\frac{1}{2}$	$-253\frac{1}{8}$	-124	-39
7	-320	-144	-42

Aufgabe (8)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4 = -(x+1)(x-2)^2$
$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$
$f''(x) = -6x + 6 = -6(x-1)$
$f'''(x) = -6$
$F(x) = \int (-x^3 + 3x^2 - 4)dx = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1 \cdot (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 - 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{lllll}
(-x^3 & +3x^2 & & -4 &) : (x+1) = -x^2 + 4x - 4 \\
-(-x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 & \\
 & -(4x^2 & +4x) & & \\
\hline
 & & -4x & -4 & \\
 & & -(-4x & -4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$-x^2 + 4x - 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-4 + 0}{-2}$ $x_2 = \dfrac{-4 - 0}{-2}$
$x_1 = 2$ $x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$
$x(-3x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3x + 6 = 0$

$-3x + 6 = 0 \qquad / -6$
$-3x = -6 \qquad / : (-3)$
$x = \frac{-6}{-3}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-4)}$
$f''(2) = -6$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]0; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -6x + 6 = 0$

$-6x + 6 = 0 \qquad / -6$
$-6x = -6 \qquad / : (-6)$
$x = \frac{-6}{-6}$
$x = 1$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(1) = -2$
$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1/-2)}$
• Kruemmung

	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]1; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-1}^{2} \left(-x^3 + 3x^2 - 4\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 1 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)\right)$$
$$= (-4) - \left(2\frac{3}{4}\right) = -6\frac{3}{4}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	486	-189	48
$-6\frac{1}{2}$	$397\frac{3}{8}$	-166	45
-6	320	-144	42
$-5\frac{1}{2}$	$253\frac{1}{8}$	-124	39
-5	196	-105	36
$-4\frac{1}{2}$	$147\frac{7}{8}$	$-87,8$	33
-4	108	-72	30
$-3\frac{1}{2}$	$75\frac{5}{8}$	$-57,8$	27
-3	50	-45	24
$-2\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{8}$	$-33,8$	21
-2	16	-24	18
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	$-15,8$	15
-1	0	-9	12
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$-3,75$	9
0	-4	$-0,000306$	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-4	$-0,000306$	6
$\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{8}$	$2,25$	3
1	-2	3	0
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$2,25$	-3
2	0	$-0,000306$	-6
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	$-3,75$	-9
3	-4	-9	-12
$3\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$-15,8$	-15
4	-20	-24	-18
$4\frac{1}{2}$	$-34\frac{3}{8}$	$-33,8$	-21
5	-54	-45	-24
$5\frac{1}{2}$	$-79\frac{5}{8}$	$-57,8$	-27
6	-112	-72	-30
$6\frac{1}{2}$	$-151\frac{7}{8}$	$-87,8$	-33
7	-200	-105	-36

Aufgabe (9)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x = 4(x+2)x(x-\frac{3}{4})$
$f'(x) = 12x^2 + 10x - 6 = 12(x+1,24)(x-0,404)$
$f''(x) = 24x + 10 = 24(x+\frac{5}{12})$
$f'''(x) = 24$
$F(x) = \int(4x^3 + 5x^2 - 6x)dx = x^4 + 1\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(4 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [4 \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 4 \cdot (-x)^3 + 5 \cdot (-x)^2 - 6 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x = 0$
$x(4x^2 + 5x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 5x - 6 = 0$

$4x^2 + 5x - 6 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4}$
$x_{1/2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{121}}{8}$
$x_{1/2} = \dfrac{-5 \pm 11}{8}$
$x_1 = \dfrac{-5 + 11}{8} \qquad x_2 = \dfrac{-5 - 11}{8}$
$x_1 = \dfrac{3}{4} \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = \frac{3}{4};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{3}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2;0[\quad \cup \quad]\frac{3}{4};\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]0;\frac{3}{4}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 12x^2 + 10x - 6 = 0$

$12x^2 + 10x - 6 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-6)}}{2 \cdot 12}$
$x_{1/2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{388}}{24}$

$x_{1/2} = \frac{-10 \pm 19,7}{24}$

$x_1 = \frac{-10 + 19,7}{24} \qquad x_2 = \frac{-10 - 19,7}{24}$

$x_1 = 0,404 \qquad x_2 = -1,24$

$\underline{x_4 = -1,24; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 0,404; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-1,24) = -19,7$

$f''(-1,24) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1,24/7,5)}$

$f''(0,404) = 19,7 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,404/-1,34)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,24$	$< x <$	$0,404$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1,24[\quad \cup \quad]0,404; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1,24; 0,404[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = 24x + 10 = 0$

$24x + 10 = 0 \qquad / - 10$

$24x = -10 \qquad / : 24$

$x = \frac{-10}{24}$

$x = -\frac{5}{12}$

$\underline{x_6 = -\frac{5}{12}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-\frac{5}{12}) = 3,08$

$f'''(-\frac{5}{12}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-\frac{5}{12}/3,08)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-\frac{5}{12}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{5}{12}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{5}{12}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{0} \left(4x^3 + 5x^2 - 6x\right) dx = \left[x^4 + 1\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= \left(1 \cdot 0^4 + 1\frac{2}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2\right) - \left(1 \cdot (-2)^4 + 1\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2\right)$$

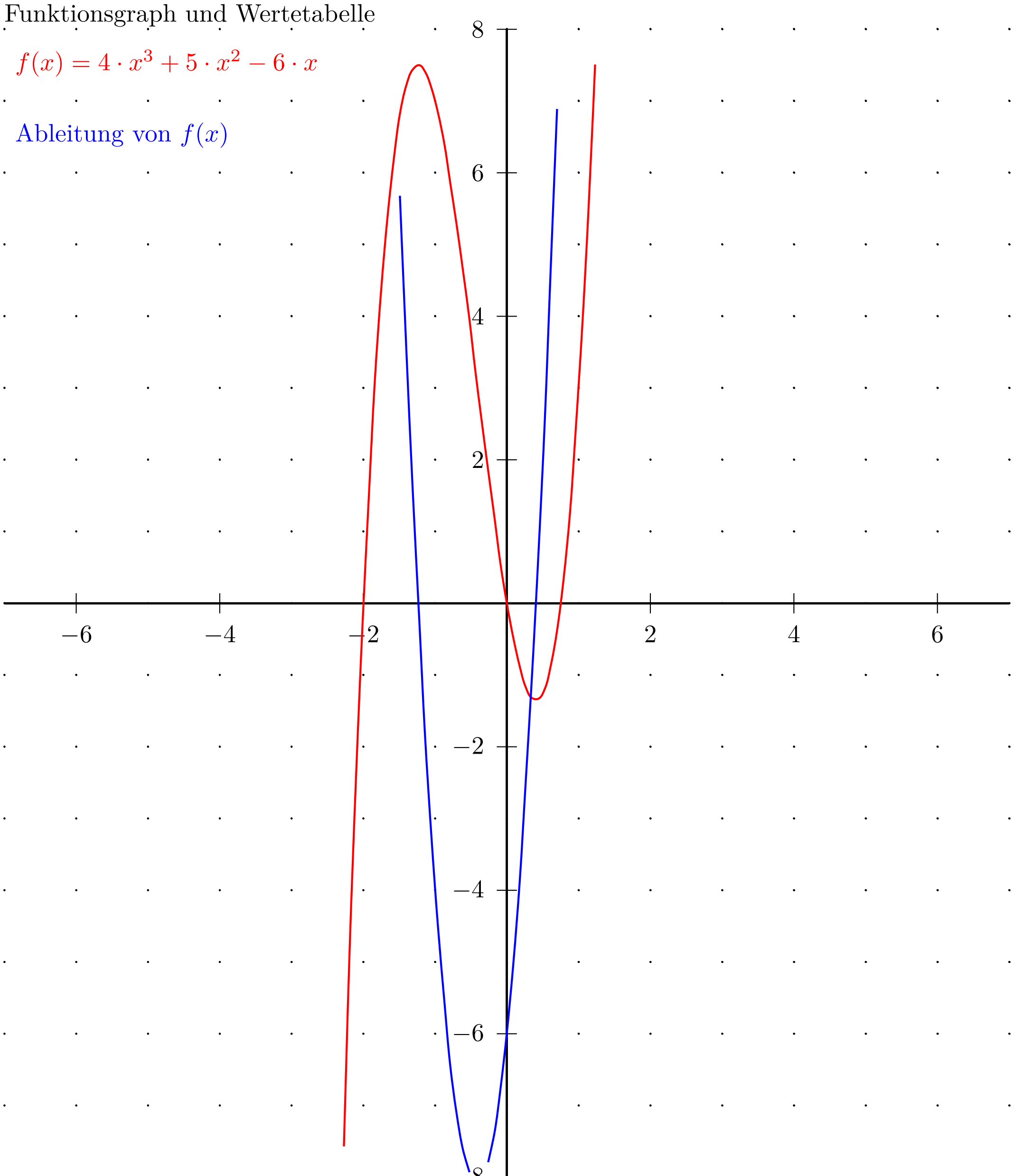
$$= (0) - \left(-9\frac{1}{3}\right) = 9\frac{1}{3}$$

$$A = \int_{0}^{\frac{3}{4}} \left(4x^3 + 5x^2 - 6x\right) dx = \left[x^4 + 1\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_{0}^{\frac{3}{4}}$$

$$= \left(1 \cdot \frac{3}{4}^4 + 1\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}^3 - 3 \cdot \frac{3}{4}^2\right) - \left(1 \cdot 0^4 + 1\frac{2}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2\right)$$

$$= (-0,668) - (0) = -0,668$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1,09 \cdot 10^3$	512	-158
$-6\frac{1}{2}$	$-848\frac{1}{4}$	436	-146
-6	-648	366	-134
$-5\frac{1}{2}$	$-481\frac{1}{4}$	302	-122
-5	-345	244	-110
$-4\frac{1}{2}$	$-236\frac{1}{4}$	192	-98
-4	-152	146	-86
$-3\frac{1}{2}$	$-89\frac{1}{4}$	106	-74
-3	-45	72	-62
$-2\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{4}$	44	-50
-2	0	22	-38
$-1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	6	-26
-1	7	-4	-14
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	-8	-2
0	0	-6	10

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-6	10
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	2	22
1	3	16	34
$1\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	36	46
2	40	62	58
$2\frac{1}{2}$	$78\frac{3}{4}$	94	70
3	135	132	82
$3\frac{1}{2}$	$211\frac{3}{4}$	176	94
4	312	226	106
$4\frac{1}{2}$	$438\frac{3}{4}$	282	118
5	595	344	130
$5\frac{1}{2}$	$783\frac{3}{4}$	412	142
6	$1,01 \cdot 10^3$	486	154
$6\frac{1}{2}$	$1270\frac{3}{4}$	566	166
7	$1,58 \cdot 10^3$	652	178

Aufgabe (10)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = -\frac{1}{2}(x+2)^2(x-3)$
$f'(x) = -1\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = -1\frac{1}{2}(x+2)(x-1\frac{1}{3})$
$f''(x) = -3x - 1 = -3(x+\frac{1}{3})$
$f'''(x) = -3$
$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6)dx = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 6$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$

$-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -2

$$\begin{array}{llll}
(-\frac{1}{2}x^3 & -\frac{1}{2}x^2 & +4x & +6 \quad) : (x+2) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \\
-(-\frac{1}{2}x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & \frac{1}{2}x^2 & +4x & +6 \\
 & -(\frac{1}{2}x^2 & +x) & \\
\hline
 & & 3x & +6 \\
 & & -(3x & +6) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}}}{-1}$$
$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}}{-1}$$
$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{-1} \qquad x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}}{-1}$$
$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_1 = -2;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 3[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = -1\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$

$-1\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot 4}}{2 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)}$

$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{25}}{-3}$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm 5}{-3}$

$x_1 = \frac{1+5}{-3} \qquad x_2 = \frac{1-5}{-3}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1\frac{1}{3}$

$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-2) = 5 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2/0)}$

$f''(1\frac{1}{3}) = -5$

$f''(1\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1\frac{1}{3}/9\frac{7}{27})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-2; 1\frac{1}{3}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = -3x - 1 = 0$

$-3x - 1 = 0 \qquad / + 1$

$-3x = 1 \qquad / : (-3)$

$x = \frac{1}{-3}$

$x = -\frac{1}{3}$

$\underline{x_5 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-\frac{1}{3}) = 4\frac{17}{27}$

$f'''(-\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-\frac{1}{3}/4\frac{17}{27})}$

• Kruemmung

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{3} \left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6\right) dx = \left[-\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left(-\frac{1}{8} \cdot 3^4 - \frac{1}{6} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3\right) - \left(-\frac{1}{8} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(21\frac{3}{8}\right) - \left(-4\frac{2}{3}\right) = 26\frac{1}{24}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	125	$-62,5$	20
$-6\frac{1}{2}$	$96\frac{3}{16}$	$-52,9$	$18\frac{1}{2}$
-6	72	-44	17
$-5\frac{1}{2}$	$52\frac{1}{16}$	$-35,9$	$15\frac{1}{2}$
-5	36	$-28,5$	14
$-4\frac{1}{2}$	$23\frac{7}{16}$	$-21,9$	$12\frac{1}{2}$
-4	14	-16	11
$-3\frac{1}{2}$	$7\frac{5}{16}$	$-10,9$	$9\frac{1}{2}$
-3	3	$-6,5$	8
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	$-2,88$	$6\frac{1}{2}$
-2	0	$-0,000153$	5
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$2,12$	$3\frac{1}{2}$
-1	2	$3,5$	2
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{15}{16}$	$4,12$	$\frac{1}{2}$
0	6	4	-1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	6	4	-1
$\frac{1}{2}$	$7\frac{13}{16}$	$3,12$	$-2\frac{1}{2}$
1	9	$1,5$	-4
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{16}$	$-0,875$	$-5\frac{1}{2}$
2	8	-4	-7
$2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{16}$	$-7,88$	$-8\frac{1}{2}$
3	0	$-12,5$	-10
$3\frac{1}{2}$	$-7\frac{9}{16}$	$-17,9$	$-11\frac{1}{2}$
4	-18	-24	-13
$4\frac{1}{2}$	$-31\frac{11}{16}$	$-30,9$	$-14\frac{1}{2}$
5	-49	$-38,5$	-16
$5\frac{1}{2}$	$-70\frac{5}{16}$	$-46,9$	$-17\frac{1}{2}$
6	-96	-56	-19
$6\frac{1}{2}$	$-126\frac{7}{16}$	$-65,9$	$-20\frac{1}{2}$
7	-162	$-76,5$	-22

Aufgabe (11)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3)$
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 3(x-0,451)(x-2,22)$
$f''(x) = 6x - 8 = 6(x - 1\frac{1}{3})$
$f'''(x) = 6$
$F(x) = \int(x^3 - 4x^2 + 3x)dx = \frac{1}{4}x^4 - 1\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^3 - 4 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = 0$
$x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$1x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{4}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$
$x_1 = \dfrac{4+2}{2} \qquad x_2 = \dfrac{4-2}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$
$\underline{x_1 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0;1[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]1;3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0$

$3x^2 - 8x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \dfrac{+8 \pm \sqrt{28}}{6}$
$x_{1/2} = \dfrac{8 \pm 5,29}{6}$

$x_1 = \frac{8 + 5,29}{6} \qquad x_2 = \frac{8 - 5,29}{6}$
$x_1 = 2,22 \qquad x_2 = 0,451$
$\underline{x_4 = 0,451; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 2,22; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0,451) = -5,29$
$f''(0,451) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0,451/0,631)}$
$f''(2,22) = 5,29 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2,22/-2,11)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$0,451$	$< x <$	$2,22$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0,451[\quad \cup \quad]2,22; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]0,451; 2,22[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 6x - 8 = 0$

$6x - 8 = 0 \qquad / + 8$
$6x = 8 \qquad / : 6$
$x = \frac{8}{6}$
$x = 1\frac{1}{3}$
$\underline{x_6 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(1\frac{1}{3}) = -\frac{20}{27}$
$f'''(1\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1\frac{1}{3}/-\frac{20}{27})}$

• Kruemmung

	$x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

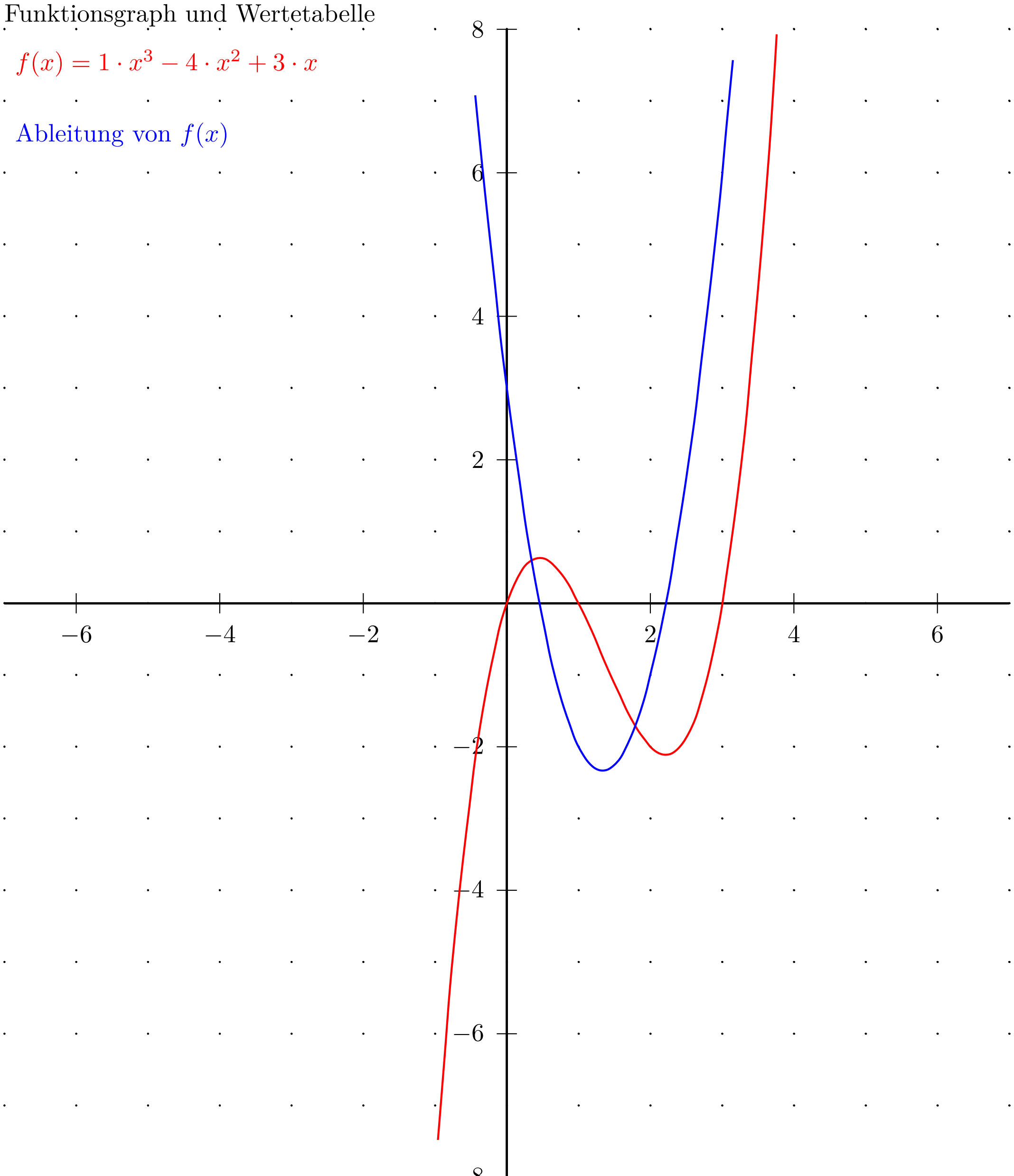
$\underline{\quad x \in]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1\frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_0^1 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 1\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1\frac{1}{2} \cdot 1^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 1\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 1\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$$
$$= \left(\frac{5}{12}\right) - (0) = \frac{5}{12}$$
$$A = \int_1^3 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 1\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 3^4 - 1\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 1\frac{1}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1\frac{1}{2} \cdot 1^2\right)$$
$$= \left(-2\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{5}{12}\right) = -2\frac{2}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-560	206	-50
$-6\frac{1}{2}$	$-463\frac{1}{8}$	182	-47
-6	-378	159	-44
$-5\frac{1}{2}$	$-303\frac{7}{8}$	138	-41
-5	-240	118	-38
$-4\frac{1}{2}$	$-185\frac{5}{8}$	$99,8$	-35
-4	-140	83	-32
$-3\frac{1}{2}$	$-102\frac{3}{8}$	$67,8$	-29
-3	-72	54	-26
$-2\frac{1}{2}$	$-48\frac{1}{8}$	$41,8$	-23
-2	-30	31	-20
$-1\frac{1}{2}$	$-16\frac{7}{8}$	$21,8$	-17
-1	-8	14	-14
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{5}{8}$	$7,75$	-11
0	0	3	-8

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	3	-8
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$-0,25$	-5
1	0	-2	-2
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{8}$	$-2,25$	1
2	-2	-1	4
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{8}$	$1,75$	7
3	0	6	10
$3\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{8}$	$11,8$	13
4	12	19	16
$4\frac{1}{2}$	$23\frac{5}{8}$	$27,8$	19
5	40	38	22
$5\frac{1}{2}$	$61\frac{7}{8}$	$49,8$	25
6	90	63	28
$6\frac{1}{2}$	$125\frac{1}{8}$	$77,8$	31
7	168	94	34

Aufgabe (12)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55} = -\frac{27}{55}(x+4)(x+1)(x-3)$
$f'(x) = -1\frac{26}{55}x^2 - 1\frac{53}{55}x + 5\frac{2}{5} = -1\frac{26}{55}(x+2,69)(x-1,36)$
$f''(x) = -2\frac{52}{55}x - 1\frac{53}{55} = -2\frac{52}{55}(x+\frac{2}{3})$
$f'''(x) = -2\frac{52}{55}$
$F(x) = \int(-\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55})dx = -0,123x^4 - \frac{18}{55}x^3 + 2\frac{7}{10}x^2 + 5\frac{49}{55}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-\frac{27}{55} - \frac{\frac{54}{55}}{x} + \frac{5\frac{2}{5}}{x^2} + \frac{5\frac{49}{55}}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{27}{55} \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{27}{55} \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{27}{55} \cdot (-x)^3 - \frac{54}{55} \cdot (-x)^2 + 5\frac{2}{5} \cdot (-x) + 5\frac{49}{55}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55} = 0$

$-\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55} = 0$
$Numerische Suche:$
$\underline{x_1 = -4;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty;-4[\quad \cup\quad]-1;3[\quad f(x) > 0\quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-4;-1[\quad \cup\quad]3;\infty[\quad f(x) < 0\quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -1\frac{26}{55}x^2 - 1\frac{53}{55}x + 5\frac{2}{5} = 0$

$-1\frac{26}{55}x^2 - 1\frac{53}{55}x + 5\frac{2}{5} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{53}{55} \pm \sqrt{\left(-1\frac{53}{55}\right)^2 - 4\cdot\left(-1\frac{26}{55}\right)\cdot 5\frac{2}{5}}}{2\cdot\left(-1\frac{26}{55}\right)}$$
$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{53}{55} \pm \sqrt{35,7}}{-2\frac{52}{55}}$$
$$x_{1/2} = \frac{1\frac{53}{55} \pm 5,97}{-2\frac{52}{55}}$$
$$x_1 = \frac{1\frac{53}{55} + 5,97}{-2\frac{52}{55}} \qquad x_2 = \frac{1\frac{53}{55} - 5,97}{-2\frac{52}{55}}$$
$x_1 = -2,69 \qquad x_2 = 1,36$
$\underline{x_4 = -2,69;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1,36;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,69) = 5,97 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2,69/-6,18)}$
$f''(1,36) = -5,97$

$f''(1,36) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(1,36/10,2)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,69$	$< x <$	$1,36$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2,69;1,36[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;-2,69[\quad \cup \quad]1,36;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = -2\frac{52}{55}x - 1\frac{53}{55} = 0$

$-2\frac{52}{55}x - 1\frac{53}{55} = 0 \qquad / + 1\frac{53}{55}$

$-2\frac{52}{55}x = 1\frac{53}{55} \qquad / : \left(-2\frac{52}{55}\right)$

$x = \frac{1\frac{53}{55}}{-2\frac{52}{55}}$

$x = -\frac{2}{3}$

$x_6 = -\frac{2}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f'''(-\frac{2}{3}) = 2$

$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(-\frac{2}{3}/2)$

• Kruemmung

	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;-\frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\frac{2}{3};\infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-4}^{-1} \left(-\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55}\right) dx = \left[-0,123x^4 - \frac{18}{55}x^3 + 2\frac{7}{10}x^2 + 5\frac{49}{55}x\right]_{-4}^{-1}$$

$$= \left(-0,123 \cdot (-1)^4 - \frac{18}{55} \cdot (-1)^3 + 2\frac{7}{10} \cdot (-1)^2 + 5\frac{49}{55} \cdot (-1)\right) - \left(-0,123 \cdot (-4)^4 - \frac{18}{55} \cdot (-4)^3 + 2\frac{7}{10} \cdot (-4)^2 + 5\frac{49}{55} \cdot (-4)\right)$$

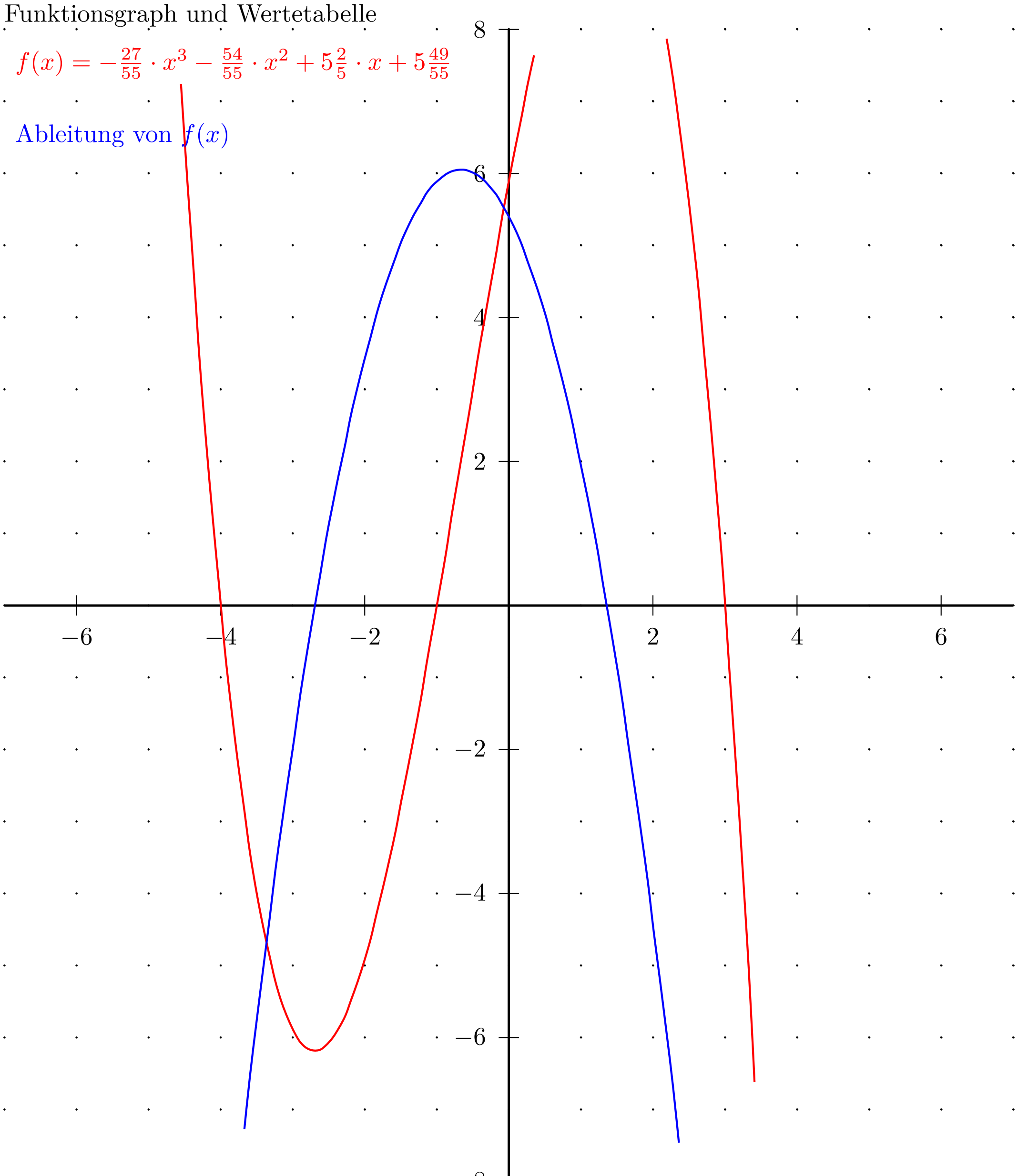
$$= (-2,99) - \left(9\frac{9}{55}\right) = -12\frac{3}{20}$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(-\frac{27}{55}x^3 - \frac{54}{55}x^2 + 5\frac{2}{5}x + 5\frac{49}{55}\right) dx = \left[-0,123x^4 - \frac{18}{55}x^3 + 2\frac{7}{10}x^2 + 5\frac{49}{55}x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left(-0,123 \cdot 3^4 - \frac{18}{55} \cdot 3^3 + 2\frac{7}{10} \cdot 3^2 + 5\frac{49}{55} \cdot 3\right) - \left(-0,123 \cdot (-1)^4 - \frac{18}{55} \cdot (-1)^3 + 2\frac{7}{10} \cdot (-1)^2 + 5\frac{49}{55} \cdot (-1)\right)$$

$$= (23,2) - (-2,99) = 26\frac{2}{11}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$88\frac{4}{11}$	-53	$18\frac{36}{55}$
$-6\frac{1}{2}$	$64\frac{1}{8}$	$-44,1$	$17\frac{2}{11}$
-6	$44\frac{2}{11}$	$-35,8$	$15\frac{39}{55}$
$-5\frac{1}{2}$	$28,2$	$-28,4$	$14\frac{13}{55}$
-5	$15\frac{39}{55}$	$-21,6$	$12\frac{42}{55}$
$-4\frac{1}{2}$	$6\frac{39}{88}$	$-15,6$	$11\frac{16}{55}$
-4	0	$-10,3$	$9\frac{9}{11}$
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{87}{88}$	$-5,77$	$8\frac{19}{55}$
-3	$-5\frac{49}{55}$	$-1,96$	$6\frac{48}{55}$
$-2\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{40}$	$1,1$	$5\frac{2}{5}$
-2	$-4\frac{10}{11}$	$3,44$	$3\frac{51}{55}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{67}{88}$	$5,03$	$2\frac{5}{11}$
-1	0	$5,89$	$\frac{54}{55}$
$-\frac{1}{2}$	$3,01$	$6,01$	$-\frac{27}{55}$
0	$5\frac{49}{55}$	$5,4$	$-1\frac{53}{55}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$5\frac{49}{55}$	$5,4$	$-1\frac{53}{55}$
$\frac{1}{2}$	$8\frac{25}{88}$	$4,05$	$-3\frac{24}{55}$
1	$9\frac{9}{11}$	$1,96$	$-4\frac{10}{11}$
$1\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{8}$	$-0,859$	$-6\frac{21}{55}$
2	$8\frac{46}{55}$	$-4,42$	$-7\frac{47}{55}$
$2\frac{1}{2}$	$5,58$	$-8,71$	$-9\frac{18}{55}$
3	0	$-13,7$	$-10\frac{4}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$-8\frac{25}{88}$	$-19,5$	$-12\frac{3}{11}$
4	$-19\frac{7}{11}$	-26	$-13\frac{41}{55}$
$4\frac{1}{2}$	$-34\frac{17}{40}$	$-33,3$	$-15\frac{12}{55}$
5	$-53\frac{1}{55}$	$-41,2$	$-16\frac{38}{55}$
$5\frac{1}{2}$	$-75\frac{69}{88}$	-50	$-18\frac{9}{55}$
6	$-103\frac{1}{11}$	$-59,4$	$-19\frac{7}{11}$
$6\frac{1}{2}$	$-135\frac{27}{88}$	$-69,6$	$-21\frac{6}{55}$
7	$-172\frac{4}{5}$	$-80,5$	$-22\frac{32}{55}$

Aufgabe (13)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5} = \frac{1}{10}(x+4)(x+3)(x-4)$
$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{5}x - 1\frac{3}{5} = \frac{3}{10}(x+3,52)(x-1,52)$
$f''(x) = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}(x+1)$
$f'''(x) = \frac{3}{5}$
$F(x) = \int(\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5})dx = \frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{4}{5}x^2 - 4\frac{4}{5}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{1}{10} + \frac{\frac{3}{10}}{x} - \frac{1\frac{3}{5}}{x^2} - \frac{4\frac{4}{5}}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{10} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{10} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{10} \cdot (-x)^3 + \frac{3}{10} \cdot (-x)^2 - 1\frac{3}{5} \cdot (-x) - 4\frac{4}{5}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5} = 0$

$\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5} = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -3

$$
\begin{array}{llllll}
(\frac{1}{10}x^3 & +\frac{3}{10}x^2 & -1\frac{3}{5}x & -4\frac{4}{5} &) : (x+3) = \frac{1}{10}x^2 - 0x - 1\frac{3}{5} \\
-(\frac{1}{10}x^3 & +\frac{3}{10}x^2) & & & \\
\hline
 & -0x^2 & -1\frac{3}{5}x & -4\frac{4}{5} & \\
 & -(-0x^2 & -0x) & & \\
\hline
 & & -1\frac{3}{5}x & -4\frac{4}{5} & \\
 & & -(-1\frac{3}{5}x & -4\frac{4}{5}) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$\frac{1}{10}x^2 - 0x - 1\frac{3}{5} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(-1\frac{3}{5}\right)}}{2 \cdot \frac{1}{10}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+0 \pm \sqrt{\frac{16}{25}}}{\frac{1}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{0 \pm \frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}$$

$$x_1 = \frac{0 + \frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} \qquad x_2 = \frac{0 - \frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}$$

$x_1 = 4$ $x_2 = -4$
$\underline{x_1 = -4;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 4;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	-3	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-4; -3[\quad \cup \quad]4; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]-3; 4[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{5}x - 1\frac{3}{5} = 0$

$\frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{5}x - 1\frac{3}{5} = 0$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{3}{5}^2 - 4 \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(-1\frac{3}{5}\right)}}{2 \cdot \frac{3}{10}}$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{3}{5} \pm \sqrt{2\frac{7}{25}}}{\frac{3}{5}}$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{3}{5} \pm 1,51}{\frac{3}{5}}$

$x_1 = \frac{-\frac{3}{5} + 1,51}{\frac{3}{5}} \qquad x_2 = \frac{-\frac{3}{5} - 1,51}{\frac{3}{5}}$

$x_1 = 1,52 \qquad x_2 = -3,52$

$\underline{x_4 = -3,52; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 1,52; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-3,52) = -1,51$

$f''(-3,52) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-3,52/0,188)}$

$f''(1,52) = 1,51 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1,52/-6,19)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-3,52$	$< x <$	$1,52$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -3,52[\quad \cup \quad]1,52; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-3,52; 1,52[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5} = 0$

$\frac{3}{5}x + \frac{3}{5} = 0 \qquad / -\frac{3}{5}$

$\frac{3}{5}x = -\frac{3}{5} \qquad / : \frac{3}{5}$

$x = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}}$

$x = -1$

$\underline{x_6 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-1) = -3$

$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1/-3)}$

• Kruemmung

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-4}^{-3} \left(\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5}\right) dx = \left[\frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{4}{5}x^2 - 4\frac{4}{5}x\right]_{-4}^{-3}$

$= \left(\frac{1}{40}\cdot(-3)^4 + \frac{1}{10}\cdot(-3)^3 - \frac{4}{5}\cdot(-3)^2 - 4\frac{4}{5}\cdot(-3)\right) - \left(\frac{1}{40}\cdot(-4)^4 + \frac{1}{10}\cdot(-4)^3 - \frac{4}{5}\cdot(-4)^2 - 4\frac{4}{5}\cdot(-4)\right)$
$= \left(6\frac{21}{40}\right) - \left(6\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{8}$
$A = \int_{-3}^{4}\left(\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}x - 4\frac{4}{5}\right)dx = \left[\frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{4}{5}x^2 - 4\frac{4}{5}x\right]_{-3}^{4}$
$= \left(\frac{1}{40}\cdot 4^4 + \frac{1}{10}\cdot 4^3 - \frac{4}{5}\cdot 4^2 - 4\frac{4}{5}\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{40}\cdot(-3)^4 + \frac{1}{10}\cdot(-3)^3 - \frac{4}{5}\cdot(-3)^2 - 4\frac{4}{5}\cdot(-3)\right)$
$= \left(-19\frac{1}{5}\right) - \left(6\frac{21}{40}\right) = -25\frac{29}{40}$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-13\frac{1}{5}$	$8,9$	$-3\frac{3}{5}$
$-6\frac{1}{2}$	$-9\frac{3}{16}$	$7,18$	$-3\frac{3}{10}$
-6	-6	$5,6$	-3
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{9}{16}$	$4,18$	$-2\frac{7}{10}$
-5	$-1\frac{4}{5}$	$2,9$	$-2\frac{2}{5}$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{51}{80}$	$1,78$	$-2\frac{1}{10}$
-4	0	$0,8$	$-1\frac{4}{5}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$-0,025$	$-1\frac{1}{2}$
-3	0	$-0,7$	$-1\frac{1}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{39}{80}$	$-1,22$	$-\frac{9}{10}$
-2	$-1\frac{1}{5}$	$-1,6$	$-\frac{3}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{16}$	$-1,82$	$-\frac{3}{10}$
-1	-3	$-1,9$	0
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{15}{16}$	$-1,82$	$\frac{3}{10}$
0	$-4\frac{4}{5}$	$-1,6$	$\frac{3}{5}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-4\frac{4}{5}$	$-1,6$	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{2}$	$-5\frac{41}{80}$	$-1,22$	$\frac{9}{10}$
1	-6	$-0,7$	$1\frac{1}{5}$
$1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	$-0,025$	$1\frac{1}{2}$
2	-6	$0,8$	$1\frac{4}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-5\frac{29}{80}$	$1,78$	$2\frac{1}{10}$
3	$-4\frac{1}{5}$	$2,9$	$2\frac{2}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{16}$	$4,18$	$2\frac{7}{10}$
4	0	$5,6$	3
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{16}$	$7,18$	$3\frac{3}{10}$
5	$7\frac{1}{5}$	$8,9$	$3\frac{3}{5}$
$5\frac{1}{2}$	$12\frac{9}{80}$	$10,8$	$3\frac{9}{10}$
6	18	$12,8$	$4\frac{1}{5}$
$6\frac{1}{2}$	$24\frac{15}{16}$	15	$4\frac{1}{2}$
7	33	$17,3$	$4\frac{4}{5}$

Aufgabe (14)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-4)$
$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}(x+0,12)(x-2,79)$
$f''(x) = 3x - 4 = 3(x - 1\frac{1}{3})$
$f'''(x) = 3$
$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2)dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{1}{2} - \dfrac{2}{x} - \dfrac{\frac{1}{2}}{x^2} + \dfrac{2}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0$

$\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$
\begin{array}{llll}
(\frac{1}{2}x^3 & -2x^2 & -\frac{1}{2}x & +2 \quad) : (x-1) = \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2 \\
-(\frac{1}{2}x^3 & -\frac{1}{2}x^2) & & \\
\hline
 & -1\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x & +2 \\
 & -(-1\frac{1}{2}x^2 & +1\frac{1}{2}x) & \\
\hline
 & & -2x & +2 \\
 & & -(-2x & +2) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-1\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}}}{1}$$

$$x_{1/2} = \frac{1\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}}{1}$$

$$x_1 = \frac{1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{1} \qquad x_2 = \frac{1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}}{1}$$

$x_1 = 4$ $x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1;1[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]1;4[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{2} = 0$

$1\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{2} = 0$
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{19}}{3}$
$x_{1/2} = \frac{4 \pm 4,36}{3}$
$x_1 = \frac{4 + 4,36}{3} \qquad x_2 = \frac{4 - 4,36}{3}$
$x_1 = 2,79 \qquad x_2 = -0,12$
$\underline{x_4 = -0,12; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 2,79; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-0,12) = -4,36$
$f''(-0,12) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,12/2,03)}$
$f''(2,79) = 4,36 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2,79/-4,1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-0,12$	$< x <$	$2,79$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -0,12[\quad \cup \quad]2,79; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-0,12; 2,79[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 3x - 4 = 0$

$3x - 4 = 0 \qquad / + 4$
$3x = 4 \qquad / : 3$
$x = \frac{4}{3}$
$x = 1\frac{1}{3}$
$\underline{x_6 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(1\frac{1}{3}) = -1\frac{1}{27}$
$f'''(1\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1\frac{1}{3}/-1\frac{1}{27})}$

• Kruemmung

	$x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

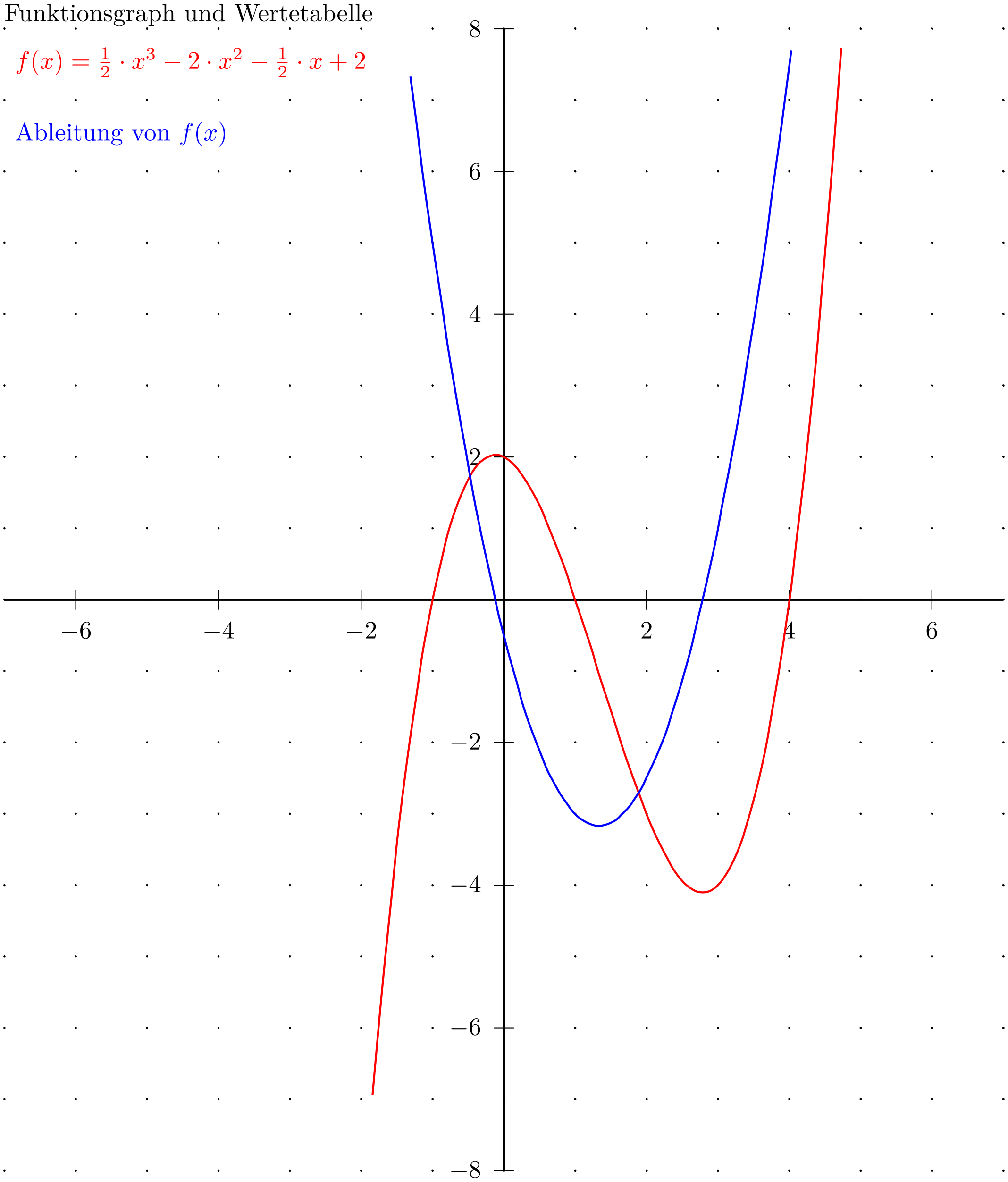
$\underline{x \in]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; 1\frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x\right]_{-1}^{1}$

$$= \left(\frac{1}{8}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{4}\cdot 1^2 + 2\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot(-1)^4 - \frac{2}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{1}{4}\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)\right)$$
$$= \left(1\frac{5}{24}\right) - \left(-1\frac{11}{24}\right) = 2\frac{2}{3}$$
$$A = \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x\right]_1^4$$
$$= \left(\frac{1}{8}\cdot 4^4 - \frac{2}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{4}\cdot 4^2 + 2\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{4}\cdot 1^2 + 2\cdot 1\right)$$
$$= \left(-6\frac{2}{3}\right) - \left(1\frac{5}{24}\right) = -7\frac{7}{8}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-264	101	-25
$-6\frac{1}{2}$	$-216\frac{9}{16}$	$88,9$	$-23\frac{1}{2}$
-6	-175	$77,5$	-22
$-5\frac{1}{2}$	$-138\frac{15}{16}$	$66,9$	$-20\frac{1}{2}$
-5	-108	57	-19
$-4\frac{1}{2}$	$-81\frac{13}{16}$	$47,9$	$-17\frac{1}{2}$
-4	-60	$39,5$	-16
$-3\frac{1}{2}$	$-42\frac{3}{16}$	$31,9$	$-14\frac{1}{2}$
-3	-28	25	-13
$-2\frac{1}{2}$	$-17\frac{1}{16}$	$18,9$	$-11\frac{1}{2}$
-2	-9	$13,5$	-10
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{7}{16}$	$8,88$	$-8\frac{1}{2}$
-1	0	5	-7
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{16}$	$1,88$	$-5\frac{1}{2}$
0	2	$-0,5$	-4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	$-0,5$	-4
$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{16}$	$-2,12$	$-2\frac{1}{2}$
1	0	-3	-1
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{9}{16}$	$-3,12$	$\frac{1}{2}$
2	-3	$-2,5$	2
$2\frac{1}{2}$	$-3\frac{15}{16}$	$-1,12$	$3\frac{1}{2}$
3	-4	1	5
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{16}$	$3,88$	$6\frac{1}{2}$
4	0	$7,5$	8
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{13}{16}$	$11,9$	$9\frac{1}{2}$
5	12	17	11
$5\frac{1}{2}$	$21\frac{15}{16}$	$22,9$	$12\frac{1}{2}$
6	35	$29,5$	14
$6\frac{1}{2}$	$51\frac{9}{16}$	$36,9$	$15\frac{1}{2}$
7	72	45	17

Aufgabe (15)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x = \frac{1}{2}(x+2,73)x(x-0,732)$
$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 1\frac{1}{2}(x+1,72)(x-0,387)$
$f''(x) = 3x + 2 = 3(x + \frac{2}{3})$
$f'''(x) = 3$
$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x)dx = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{1}{2} + x - \dfrac{1}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 1 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x = 0$
$x(\frac{1}{2}x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1}$$
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 1,73}{1}$$
$$x_1 = \frac{-1 + 1,73}{1} \qquad x_2 = \frac{-1 - 1,73}{1}$$
$x_1 = 0,732 \qquad x_2 = -2,73$
$\underline{x_1 = -2,73; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 0,732; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,73$	$< x <$	0	$< x <$	$0,732$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2,73;0[\quad \cup \quad]0,732;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-2,73[\quad \cup \quad]0;0,732[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 1\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0$

$1\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot (-1)}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$
$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 3,16}{3}$
$x_1 = \frac{-2 + 3,16}{3} \qquad x_2 = \frac{-2 - 3,16}{3}$
$x_1 = 0,387 \qquad x_2 = -1,72$
$\underline{x_4 = -1,72; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 0,387; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1,72) = -3,16$
$f''(-1,72) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1,72/2,13)}$
$f''(0,387) = 3,16 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,387/-0,208)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,72$	$< x <$	$0,387$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1,72[\quad \cup \quad]0,387; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1,72; 0,387[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 3x + 2 = 0$

$3x + 2 = 0 \qquad / -2$
$3x = -2 \qquad / : 3$
$x = \frac{-2}{3}$
$x = -\frac{2}{3}$
$\underline{x_6 = -\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-\frac{2}{3}) = \frac{26}{27}$
$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-\frac{2}{3}/\frac{26}{27})}$

• Kruemmung

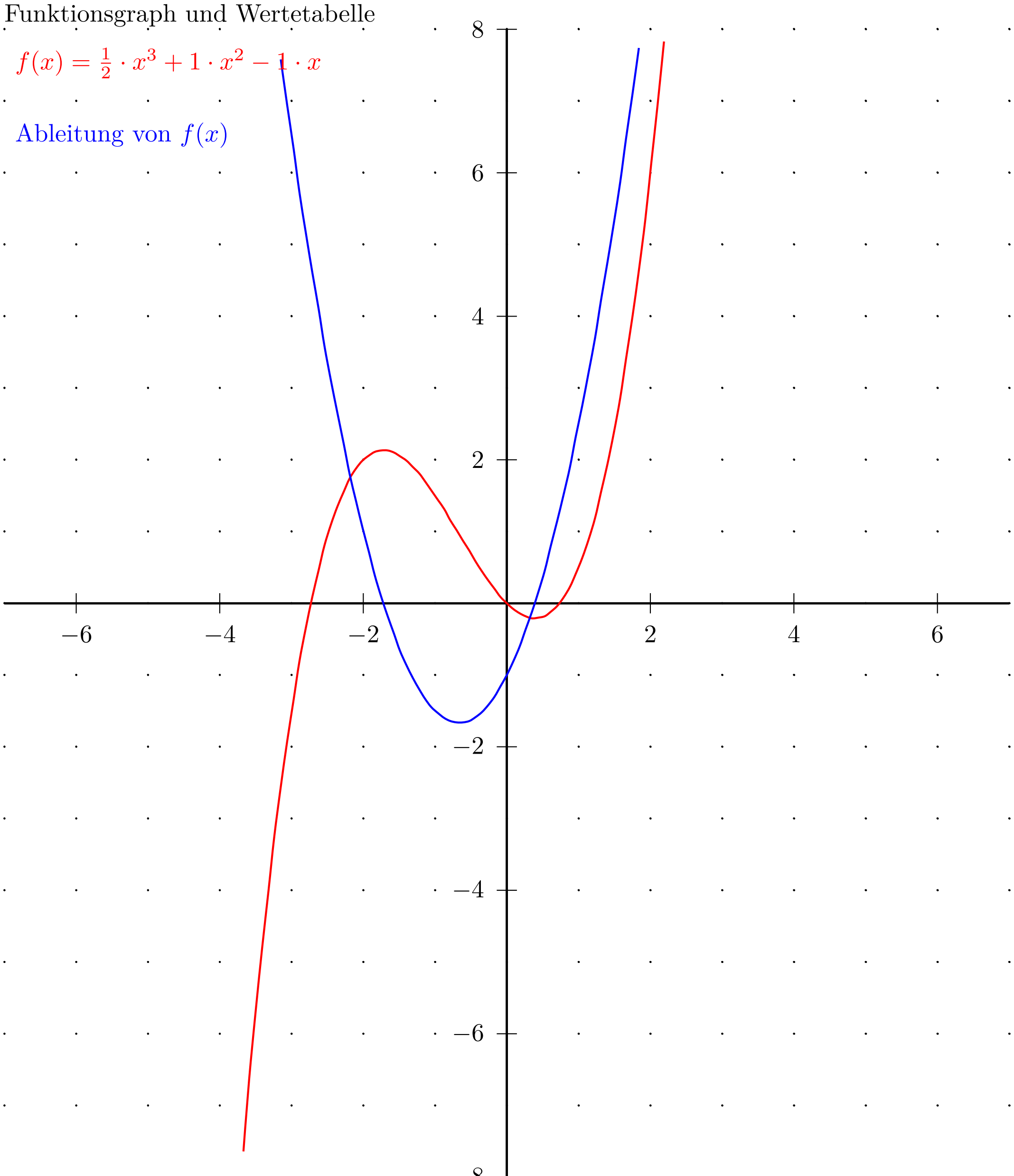
	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-2,73}^{0} \left(\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2,73}^{0}$
$= \left(\frac{1}{8} \cdot 0^4 + \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{8} \cdot (-2,73)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-2,73)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-2,73)^2\right)$
$= (0) - (-3,57) = 3,57$
$A = \int_{0}^{0,732} \left(\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{0,732}$
$= \left(\frac{1}{8} \cdot 0,732^4 + \frac{1}{3} \cdot 0,732^3 - \frac{1}{2} \cdot 0,732^2\right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 0^4 + \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$
$= (-0,101) - (0) = -0,101$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-115\frac{1}{2}$	$58,5$	-19
$-6\frac{1}{2}$	$-88\frac{9}{16}$	$49,4$	$-17\frac{1}{2}$
-6	-66	41	-16
$-5\frac{1}{2}$	$-47\frac{7}{16}$	$33,4$	$-14\frac{1}{2}$
-5	$-32\frac{1}{2}$	$26,5$	-13
$-4\frac{1}{2}$	$-20\frac{13}{16}$	$20,4$	$-11\frac{1}{2}$
-4	-12	15	-10
$-3\frac{1}{2}$	$-5\frac{11}{16}$	$10,4$	$-8\frac{1}{2}$
-3	$-1\frac{1}{2}$	$6,5$	-7
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	$3,38$	$-5\frac{1}{2}$
-2	2	1	-4
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{16}$	$-0,625$	$-2\frac{1}{2}$
-1	$1\frac{1}{2}$	$-1,5$	-1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	$-1,62$	$\frac{1}{2}$
0	0	-1	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-1	2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{16}$	$0,375$	$3\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$2,5$	5
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{16}$	$5,38$	$6\frac{1}{2}$
2	6	9	8
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{9}{16}$	$13,4$	$9\frac{1}{2}$
3	$19\frac{1}{2}$	$18,5$	11
$3\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{16}$	$24,4$	$12\frac{1}{2}$
4	44	31	14
$4\frac{1}{2}$	$61\frac{5}{16}$	$38,4$	$15\frac{1}{2}$
5	$82\frac{1}{2}$	$46,5$	17
$5\frac{1}{2}$	$107\frac{15}{16}$	$55,4$	$18\frac{1}{2}$
6	138	65	20
$6\frac{1}{2}$	$173\frac{1}{16}$	$75,4$	$21\frac{1}{2}$
7	$213\frac{1}{2}$	$86,5$	23

Aufgabe (16)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 3x^3 - 22x^2 + 43x + 12 = 3(x^2 - 7,58x + 16,2)(x + 0,247)$
$f'(x) = 9x^2 - 44x + 43 = 9(x - 1,35)(x - 3,54)$
$f''(x) = 18x - 44 = 18(x - 2\frac{4}{9})$
$f'''(x) = 18$
$F(x) = \int (3x^3 - 22x^2 + 43x + 12)dx = \frac{3}{4}x^4 - 7\frac{1}{3}x^3 + 21\frac{1}{2}x^2 + 12x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(3 - \frac{22}{x} + \frac{43}{x^2} + \frac{12}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [3 \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 3 \cdot (-x)^3 - 22 \cdot (-x)^2 + 43 \cdot (-x) + 12$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 3x^3 - 22x^2 + 43x + 12 = 0$

$3x^3 - 22x^2 + 43x + 12 = 0$
$Numerische Suche:$
$x_1 = -0,247;$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-0,247$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-0,247; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -0,247[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 9x^2 - 44x + 43 = 0$

$9x^2 - 44x + 43 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+44 \pm \sqrt{(-44)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 43}}{2 \cdot 9}$$
$$x_{1/2} = \frac{+44 \pm \sqrt{388}}{18}$$
$$x_{1/2} = \frac{44 \pm 19,7}{18}$$
$$x_1 = \frac{44 + 19,7}{18} \qquad x_2 = \frac{44 - 19,7}{18}$$
$x_1 = 3,54$ $x_2 = 1,35$
$x_2 = 1,35;$ 1-fache Nullstelle
$x_3 = 3,54;$ 1-fache Nullstelle
$f''(1,35) = -19,7$
$f''(1,35) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(1,35/37,3)$
$f''(3,54) = 19,7 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(3,54/21,6)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$1,35$	$< x <$	$3,54$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; 1,35[\quad \cup \quad]3,54; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]1,35; 3,54[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 18x - 44 = 0$

$18x - 44 = 0 \qquad / + 44$
$18x = 44 \qquad / : 18$
$x = \frac{44}{18}$
$x = 2\frac{4}{9}$
$x_4 = 2\frac{4}{9}; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f'''(2\frac{4}{9}) = 29,5$
$f'''(2\frac{4}{9}) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(2\frac{4}{9}/29,5)$

• Kruemmung

	$x <$	$2\frac{4}{9}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]2\frac{4}{9}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

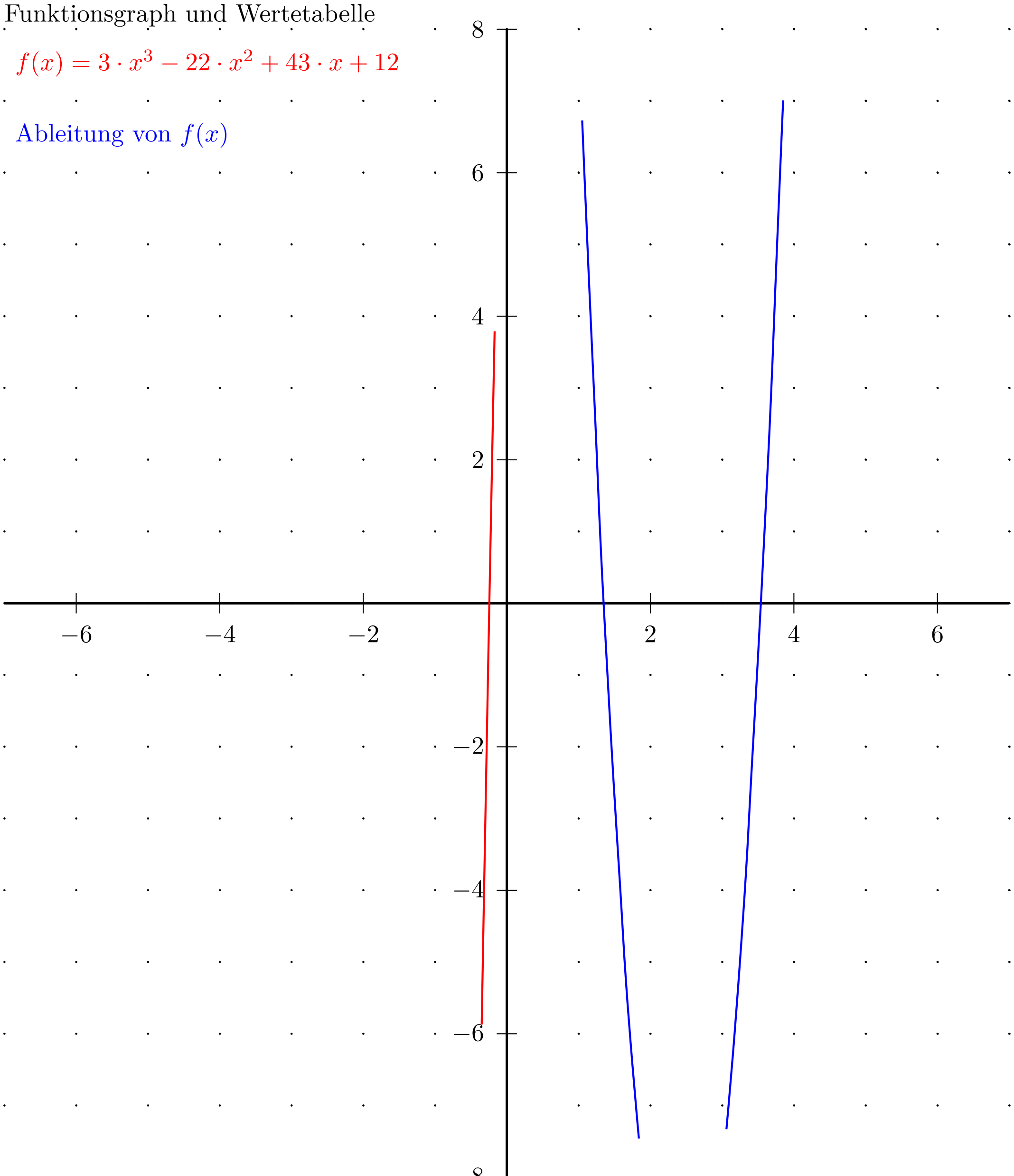
$x \in]-\infty; 2\frac{4}{9}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle

$f(x) = 3 \cdot x^3 - 22 \cdot x^2 + 43 \cdot x + 12$

Ableitung von $f(x)$



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2,4 \cdot 10^3$	792	-170
$-6\frac{1}{2}$	$-2020\frac{7}{8}$	709	-161
-6	$-1,69 \cdot 10^3$	631	-152
$-5\frac{1}{2}$	$-1389\frac{1}{8}$	557	-143
-5	$-1,13 \cdot 10^3$	488	-134
$-4\frac{1}{2}$	$-900\frac{3}{8}$	423	-125
-4	-704	363	-116
$-3\frac{1}{2}$	$-536\frac{5}{8}$	307	-107
-3	-396	256	-98
$-2\frac{1}{2}$	$-279\frac{7}{8}$	209	-89
-2	-186	167	-80
$-1\frac{1}{2}$	$-112\frac{1}{8}$	129	-71
-1	-56	96	-62
$-\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{8}$	$67,3$	-53
0	12	43	-44

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	12	43	-44
$\frac{1}{2}$	$28\frac{3}{8}$	$23,3$	-35
1	36	8	-26
$1\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{8}$	$-2,75$	-17
2	34	-9	-8
$2\frac{1}{2}$	$28\frac{7}{8}$	$-10,7$	1
3	24	-8	10
$3\frac{1}{2}$	$21\frac{5}{8}$	$-0,749$	19
4	24	11	28
$4\frac{1}{2}$	$33\frac{3}{8}$	$27,3$	37
5	52	48	46
$5\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{8}$	$73,3$	55
6	126	103	64
$6\frac{1}{2}$	$185\frac{7}{8}$	137	73
7	264	176	82

Aufgabe (17)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} = -5\frac{2}{5}(x+4)(x+2)(x+1)$
$f'(x) = -16\frac{1}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 75\frac{3}{5} = -16\frac{1}{5}(x+3,22)(x+1,45)$
$f''(x) = -32\frac{2}{5}x - 75\frac{3}{5} = -32\frac{2}{5}(x+2\frac{1}{3})$
$f'''(x) = -32\frac{2}{5}$
$F(x) = \int(-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5})dx = -1\frac{7}{20}x^4 - 12\frac{3}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-5\frac{2}{5} - \frac{37\frac{4}{5}}{x} - \frac{75\frac{3}{5}}{x^2} - \frac{43\frac{1}{5}}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-5\frac{2}{5} \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-5\frac{2}{5} \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -5\frac{2}{5} \cdot (-x)^3 - 37\frac{4}{5} \cdot (-x)^2 - 75\frac{3}{5} \cdot (-x) - 43\frac{1}{5}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} = 0$

$-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -2

$$\begin{array}{cccccc}
(-5\frac{2}{5}x^3 & -37\frac{4}{5}x^2 & -75\frac{3}{5}x & -43\frac{1}{5} &) : (x+2) = -5\frac{2}{5}x^2 - 27x - 21\frac{3}{5} \\
-(-5\frac{2}{5}x^3 & -10\frac{4}{5}x^2) & & & \\
\hline
 & -27x^2 & -75\frac{3}{5}x & -43\frac{1}{5} & \\
 & -(-27x^2 & -54x) & & \\
\hline
 & & -21\frac{3}{5}x & -43\frac{1}{5} & \\
 & & -(-21\frac{3}{5}x & -43\frac{1}{5}) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$-5\frac{2}{5}x^2 - 27x - 21\frac{3}{5} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+27 \pm \sqrt{(-27)^2 - 4 \cdot (-5\frac{2}{5}) \cdot (-21\frac{3}{5})}}{2 \cdot (-5\frac{2}{5})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+27 \pm \sqrt{262\frac{11}{25}}}{-10\frac{4}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{27 \pm 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}}$$

$$x_1 = \frac{27 + 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}} \qquad x_2 = \frac{27 - 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -4;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -4[\ \cup \ ]-2; -1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-4; -2[\ \cup \ ]-1; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = -16\frac{1}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 75\frac{3}{5} = 0$

$-16\frac{1}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 75\frac{3}{5} = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+75\frac{3}{5} \pm \sqrt{\left(-75\frac{3}{5}\right)^2 - 4 \cdot \left(-16\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-75\frac{3}{5}\right)}}{2 \cdot \left(-16\frac{1}{5}\right)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+75\frac{3}{5} \pm \sqrt{816\frac{12}{25}}}{-32\frac{2}{5}}$

$x_{1/2} = \dfrac{75\frac{3}{5} \pm 28,6}{-32\frac{2}{5}}$

$x_1 = \dfrac{75\frac{3}{5} + 28,6}{-32\frac{2}{5}} \qquad x_2 = \dfrac{75\frac{3}{5} - 28,6}{-32\frac{2}{5}}$

$x_1 = -3,22 \qquad x_2 = -1,45$

$\underline{x_4 = -3,22; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = -1,45; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-3,22) = 28,6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-3,22/-11,4)}$

$f''(-1,45) = -28,6$

$f''(-1,45) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1,45/3,41)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-3,22$	$< x <$	$-1,45$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-3,22; -1,45[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -3,22[\quad \cup \quad]-1,45; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = -32\frac{2}{5}x - 75\frac{3}{5} = 0$

$-32\frac{2}{5}x - 75\frac{3}{5} = 0 \qquad / + 75\frac{3}{5}$

$-32\frac{2}{5}x = 75\frac{3}{5} \qquad / : \left(-32\frac{2}{5}\right)$

$x = \dfrac{75\frac{3}{5}}{-32\frac{2}{5}}$

$x = -2\frac{1}{3}$

$\underline{x_6 = -2\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-2\frac{1}{3}) = -4$

$f'''(-2\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-2\frac{1}{3}/-4)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-2\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-2\frac{1}{3}; \infty[$	$f''(x) < 0$	rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-4}^{-2} \left(-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5}\right) dx = \left[-1\frac{7}{20}x^4 - 12\frac{3}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x\right]_{-4}^{-2}$$

$$= \left(-1\frac{7}{20} \cdot (-2)^4 - 12\frac{3}{5} \cdot (-2)^3 - 37\frac{4}{5} \cdot (-2)^2 - 43\frac{1}{5} \cdot (-2)\right) - \left(-1\frac{7}{20} \cdot (-4)^4 - 12\frac{3}{5} \cdot (-4)^3 - 37\frac{4}{5} \cdot (-4)^2 - 43\frac{1}{5} \cdot (-4)\right)$$

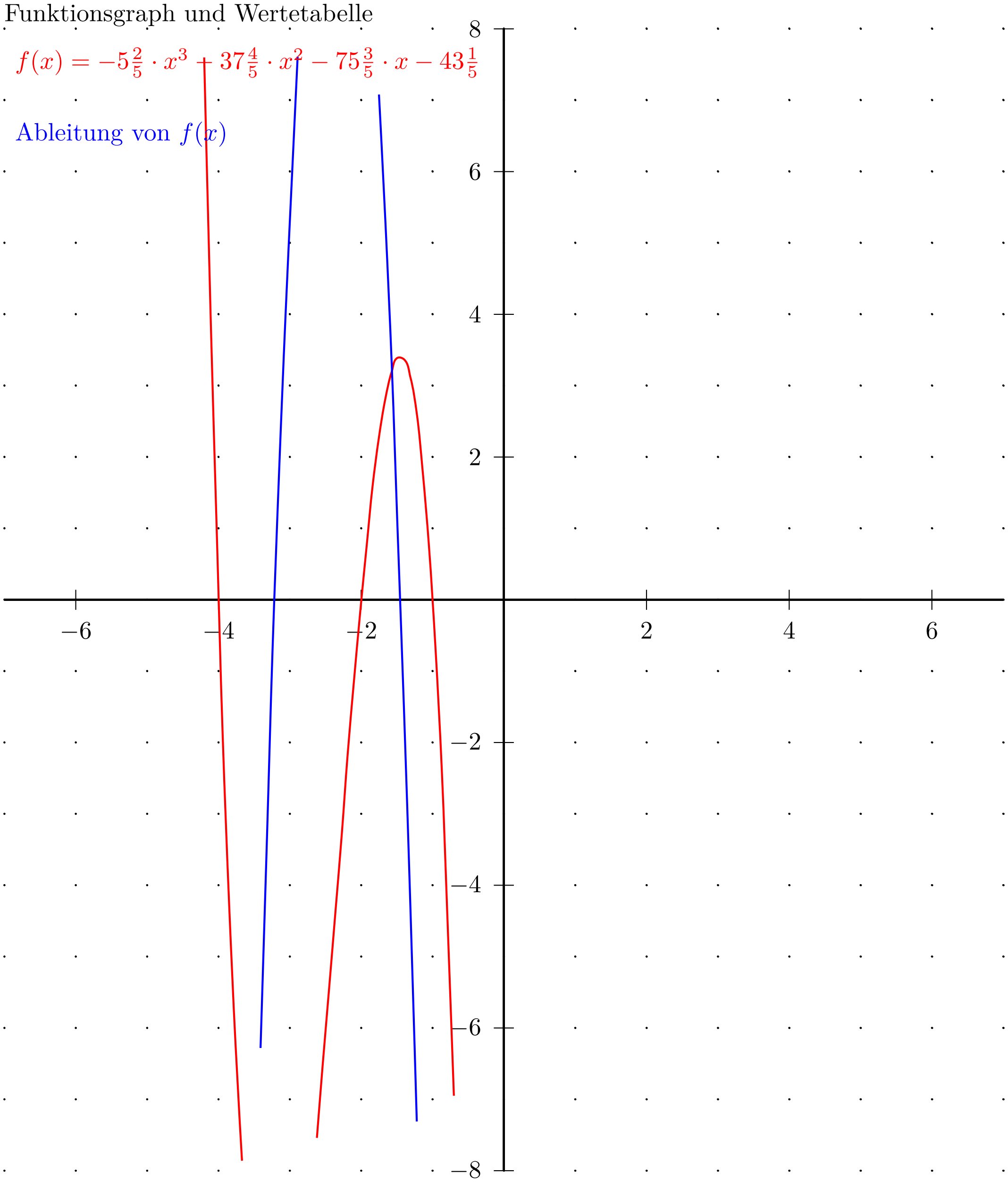
$$= \left(14\frac{2}{5}\right) - \left(28\frac{4}{5}\right) = -14\frac{2}{5}$$

$$A = \int_{-2}^{-1} \left(-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5}\right) dx = \left[-1\frac{7}{20}x^4 - 12\frac{3}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left(-1\frac{7}{20} \cdot (-1)^4 - 12\frac{3}{5} \cdot (-1)^3 - 37\frac{4}{5} \cdot (-1)^2 - 43\frac{1}{5} \cdot (-1)\right) - \left(-1\frac{7}{20} \cdot (-2)^4 - 12\frac{3}{5} \cdot (-2)^3 - 37\frac{4}{5} \cdot (-2)^2 - 43\frac{1}{5} \cdot (-2)\right)$$

$$= \left(16\frac{13}{20}\right) - \left(14\frac{2}{5}\right) = 2\frac{1}{4}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	486	-340	$151\frac{1}{5}$
$-6\frac{1}{2}$	$334\frac{1}{8}$	-269	135
-6	216	-205	$118\frac{4}{5}$
$-5\frac{1}{2}$	$127\frac{23}{40}$	-150	$102\frac{3}{5}$
-5	$64\frac{4}{5}$	-103	$86\frac{2}{5}$
$-4\frac{1}{2}$	$23\frac{5}{8}$	$-63,5$	$70\frac{1}{5}$
-4	0	$-32,4$	54
$-3\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$-9,45$	$37\frac{4}{5}$
-3	$-10\frac{4}{5}$	$5,4$	$21\frac{3}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{40}$	$12,1$	$5\frac{2}{5}$
-2	0	$10,8$	$-10\frac{4}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$1,35$	-27
-1	0	$-16,2$	$-43\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$-14\frac{7}{40}$	$-41,9$	$-59\frac{2}{5}$
0	$-43\frac{1}{5}$	$-75,6$	$-75\frac{3}{5}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-43\frac{1}{5}$	$-75,6$	$-75\frac{3}{5}$
$\frac{1}{2}$	$-91\frac{1}{8}$	-117	$-91\frac{4}{5}$
1	-162	-167	-108
$1\frac{1}{2}$	$-259\frac{7}{8}$	-225	$-124\frac{1}{5}$
2	$-388\frac{4}{5}$	-292	$-140\frac{2}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$-552\frac{33}{40}$	-366	$-156\frac{3}{5}$
3	-756	-448	$-172\frac{4}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$-1002\frac{3}{8}$	-539	-189
4	$-1,3 \cdot 10^3$	-637	$-205\frac{1}{5}$
$4\frac{1}{2}$	$-1640\frac{37}{40}$	-744	$-221\frac{2}{5}$
5	$-2041\frac{1}{5}$	-859	$-237\frac{3}{5}$
$5\frac{1}{2}$	$-2500\frac{7}{8}$	-981	$-253\frac{4}{5}$
6	$-3,02 \cdot 10^3$	$-1,11 \cdot 10^3$	-270
$6\frac{1}{2}$	$-3614\frac{5}{8}$	$-1,25 \cdot 10^3$	$-286\frac{1}{5}$
7	$-4276\frac{4}{5}$	$-1,4 \cdot 10^3$	$-302\frac{2}{5}$

Aufgabe (18)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 = -6\frac{3}{4}(x+2)x^2$
$f'(x) = -20\frac{1}{4}x^2 - 27x = -20\frac{1}{4}(x+1\frac{1}{3})x$
$f''(x) = -40\frac{1}{2}x - 27 = -40\frac{1}{2}(x+\frac{2}{3})$
$f'''(x) = -40\frac{1}{2}$
$F(x) = \int(-6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2)dx = -1\frac{11}{16}x^4 - 4\frac{1}{2}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-6\frac{3}{4} - \frac{13\frac{1}{2}}{x})$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = [-6\frac{3}{4} \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = [-6\frac{3}{4} \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -6\frac{3}{4} \cdot (-x)^3 - 13\frac{1}{2} \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 = 0$
$x^2(-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0$
$-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 13\frac{1}{2}$
$-6\frac{3}{4}x = 13\frac{1}{2} \qquad / : (-6\frac{3}{4})$
$x = \frac{13\frac{1}{2}}{-6\frac{3}{4}}$
$x = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -20\frac{1}{4}x^2 - 27x = 0$
$x(-20\frac{1}{4}x - 27) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -20\frac{1}{4}x - 27 = 0$
$-20\frac{1}{4}x - 27 = 0 \qquad / + 27$
$-20\frac{1}{4}x = 27 \qquad / : \left(-20\frac{1}{4}\right)$
$x = \frac{27}{-20\frac{1}{4}}$
$x = -1\frac{1}{3}$
$\underline{x_3 = -1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1\frac{1}{3}) = 27 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1\frac{1}{3}/-8)}$

$f''(0) = -27$
$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(0/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{3}$	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1\frac{1}{3}; 0[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -1\frac{1}{3}[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -40\frac{1}{2}x - 27 = 0$

$$-40\frac{1}{2}x - 27 = 0 \qquad / + 27$$
$$-40\frac{1}{2}x = 27 \qquad / : \left(-40\frac{1}{2}\right)$$
$$x = \frac{27}{-40\frac{1}{2}}$$
$$x = -\frac{2}{3}$$
$x_5 = -\frac{2}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f'''(-\frac{2}{3}) = -4$
$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(-\frac{2}{3}/-4)$

• Kruemmung

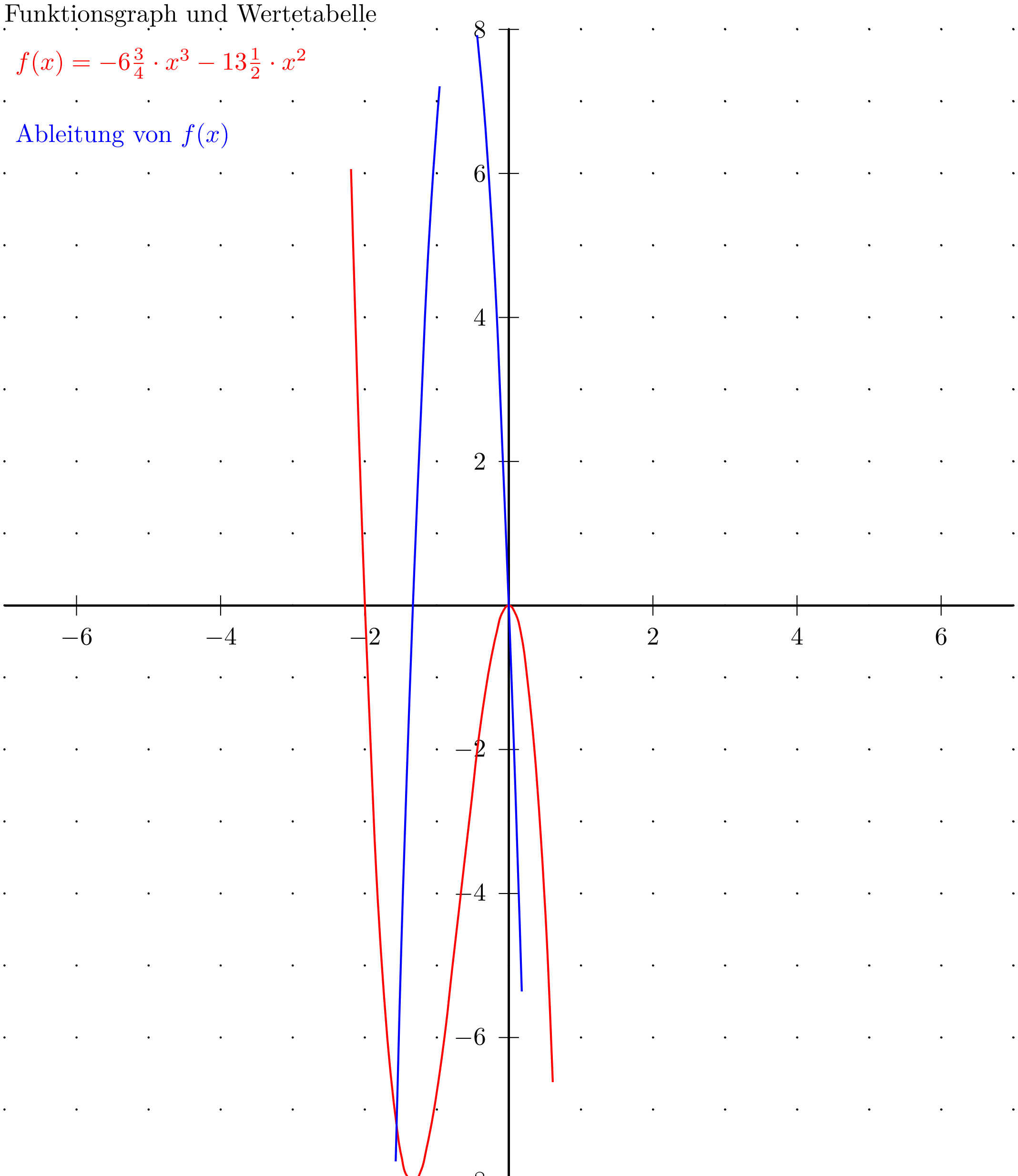
	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-2}^{0} \left(-6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[-1\frac{11}{16}x^4 - 4\frac{1}{2}x^3\right]_{-2}^{0}$$
$$= \left(-1\frac{11}{16} \cdot 0^4 - 4\frac{1}{2} \cdot 0^3\right) - \left(-1\frac{11}{16} \cdot (-2)^4 - 4\frac{1}{2} \cdot (-2)^3\right)$$
$$= (0) - (9) = -9$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1653\frac{3}{4}$	-803	$256\frac{1}{2}$
$-6\frac{1}{2}$	$1283\frac{11}{32}$	-680	$236\frac{1}{4}$
-6	972	-567	216
$-5\frac{1}{2}$	$714\frac{21}{32}$	-464	$195\frac{3}{4}$
-5	$506\frac{1}{4}$	-371	$175\frac{1}{2}$
$-4\frac{1}{2}$	$341\frac{23}{32}$	-289	$155\frac{1}{4}$
-4	216	-216	135
$-3\frac{1}{2}$	$124\frac{1}{32}$	-154	$114\frac{3}{4}$
-3	$60\frac{3}{4}$	-101	$94\frac{1}{2}$
$-2\frac{1}{2}$	$21\frac{3}{32}$	$-59,1$	$74\frac{1}{4}$
-2	0	-27	54
$-1\frac{1}{2}$	$-7\frac{19}{32}$	$-5,06$	$33\frac{3}{4}$
-1	$-6\frac{3}{4}$	$6,75$	$13\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{17}{32}$	$8,44$	$-6\frac{3}{4}$
0	0	$-0,00207$	-27

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,00207$	-27
$\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{32}$	$-18,6$	$-47\frac{1}{4}$
1	$-20\frac{1}{4}$	$-47,3$	$-67\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	$-53\frac{5}{32}$	$-86,1$	$-87\frac{3}{4}$
2	-108	-135	-108
$2\frac{1}{2}$	$-189\frac{27}{32}$	-194	$-128\frac{1}{4}$
3	$-303\frac{3}{4}$	-263	$-148\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-454\frac{25}{32}$	-343	$-168\frac{3}{4}$
4	-648	-432	-189
$4\frac{1}{2}$	$-888\frac{15}{32}$	-532	$-209\frac{1}{4}$
5	$-1181\frac{1}{4}$	-641	$-229\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$-1531\frac{13}{32}$	-761	$-249\frac{3}{4}$
6	$-1,94 \cdot 10^3$	-891	-270
$6\frac{1}{2}$	$-2424\frac{3}{32}$	$-1,03 \cdot 10^3$	$-290\frac{1}{4}$
7	$-2976\frac{3}{4}$	$-1,18 \cdot 10^3$	$-310\frac{1}{2}$

Aufgabe (19)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8 = \frac{2}{3}(x+3)(x+2)(x-2)$
$f'(x) = 2x^2 + 4x - 2\frac{2}{3} = 2(x+2,53)(x-0,528)$
$f''(x) = 4x + 4 = 4(x+1)$
$f'''(x) = 4$
$F(x) = \int (\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8)dx = \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 - 8x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{2}{3} + \frac{2}{x} - \frac{2\frac{2}{3}}{x^2} - \frac{8}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{2}{3} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{2}{3} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{2}{3} \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 - 2\frac{2}{3} \cdot (-x) - 8$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8 = 0$

$\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8 = 0$
$Numerische Suche:$
$\underline{x_1 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-3;-2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-2;2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x^2 + 4x - 2\frac{2}{3} = 0$

$2x^2 + 4x - 2\frac{2}{3} = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)}}{2 \cdot 2}$$
$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{37\frac{1}{3}}}{4}$$
$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 6,11}{4}$$
$$x_1 = \frac{-4 + 6,11}{4} \qquad x_2 = \frac{-4 - 6,11}{4}$$
$x_1 = 0,528 \qquad x_2 = -2,53$
$\underline{x_4 = -2,53; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 0,528; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,53) = -6,11$
$f''(-2,53) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2,53/0,752)}$
$f''(0,528) = 6,11 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,528/-8,75)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,53$	$< x <$	$0,528$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -2,53[\quad \cup \quad]0,528; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-2,53; 0,528[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 4x + 4 = 0$

$4x + 4 = 0 \qquad / - 4$
$4x = -4 \qquad / : 4$
$x = \frac{-4}{4}$
$x = -1$
$x_6 = -1;$ 1-fache Nullstelle
$f'''(-1) = -4$
$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(-1/-4)$
• Kruemmung

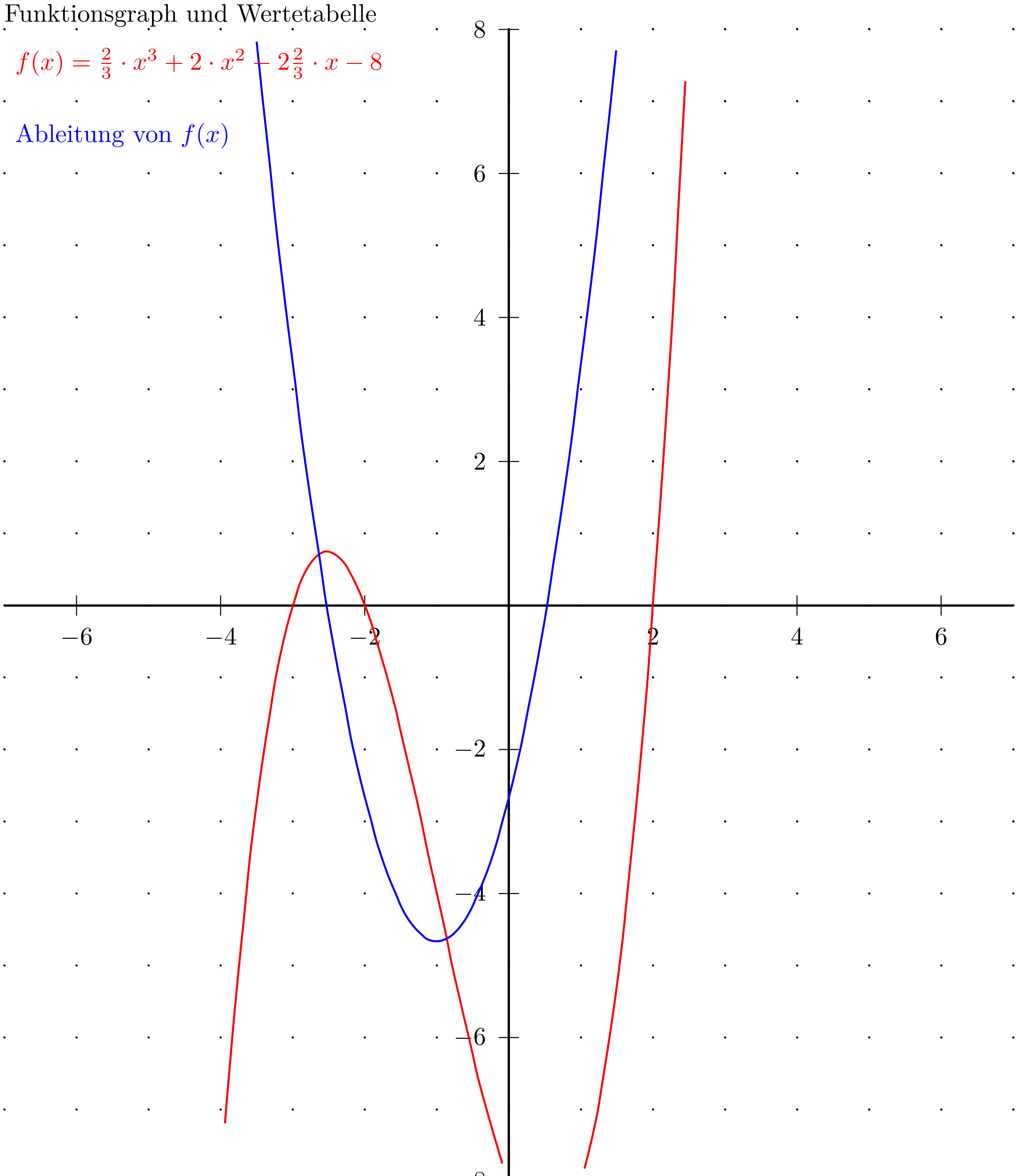
	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-3}^{-2} \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 - 8x\right]_{-3}^{-2}$$
$$= \left(\frac{1}{6} \cdot (-2)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - 1\frac{1}{3} \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2)\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot (-3)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 - 1\frac{1}{3} \cdot (-3)^2 - 8 \cdot (-3)\right)$$
$$= (8) - \left(7\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$A = \int_{-2}^{2} \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 - 8x\right]_{-2}^{2}$$
$$= \left(\frac{1}{6} \cdot 2^4 + \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 1\frac{1}{3} \cdot 2^2 - 8 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot (-2)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - 1\frac{1}{3} \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(-13\frac{1}{3}\right) - (8) = -21\frac{1}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-120	$67,3$	-24
$-6\frac{1}{2}$	$-89\frac{1}{4}$	$55,8$	-22
-6	-64	$45,3$	-20
$-5\frac{1}{2}$	$-43\frac{3}{4}$	$35,8$	-18
-5	-28	$27,3$	-16
$-4\frac{1}{2}$	$-16\frac{1}{4}$	$19,8$	-14
-4	-8	$13,3$	-12
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	$7,83$	-10
-3	0	$3,33$	-8
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-0,166$	-6
-2	0	$-2,67$	-4
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	$-4,17$	-2
-1	-4	$-4,67$	0
$-\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$	$-4,17$	2
0	-8	$-2,67$	4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-8	$-2,67$	4
$\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	$-0,166$	6
1	-8	$3,33$	8
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	$7,83$	10
2	0	$13,3$	12
$2\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{4}$	$19,8$	14
3	20	$27,3$	16
$3\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{4}$	$35,8$	18
4	56	$45,3$	20
$4\frac{1}{2}$	$81\frac{1}{4}$	$55,8$	22
5	112	$67,3$	24
$5\frac{1}{2}$	$148\frac{3}{4}$	$79,8$	26
6	192	$93,3$	28
$6\frac{1}{2}$	$242\frac{1}{4}$	108	30
7	300	123	32

Aufgabe (20)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x = -\frac{27}{28}(x+3)x(x-2)$
$f'(x) = -2\frac{25}{28}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 5\frac{11}{14} = -2\frac{25}{28}(x+1,79)(x-1,12)$
$f''(x) = -5\frac{11}{14}x - 1\frac{13}{14} = -5\frac{11}{14}(x+\frac{1}{3})$
$f'''(x) = -5\frac{11}{14}$
$F(x) = \int(-\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x)dx = -0,241x^4 - \frac{9}{28}x^3 + 2\frac{25}{28}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-\frac{27}{28} - \frac{\frac{27}{28}}{x} + \frac{5\frac{11}{14}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{27}{28} \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{27}{28} \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{27}{28} \cdot (-x)^3 - \frac{27}{28} \cdot (-x)^2 + 5\frac{11}{14} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x = 0$
$x(-\frac{27}{28}x^2 - \frac{27}{28}x + 5\frac{11}{14}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{27}{28}x^2 - \frac{27}{28}x + 5\frac{11}{14} = 0$

$-\frac{27}{28}x^2 - \frac{27}{28}x + 5\frac{11}{14} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{27}{28} \pm \sqrt{\left(-\frac{27}{28}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{27}{28}\right) \cdot 5\frac{11}{14}}}{2 \cdot \left(-\frac{27}{28}\right)}$
$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{27}{28} \pm \sqrt{23,2}}{-1\frac{13}{14}}$
$x_{1/2} = \dfrac{\frac{27}{28} \pm 4\frac{23}{28}}{-1\frac{13}{14}}$
$x_1 = \dfrac{\frac{27}{28} + 4\frac{23}{28}}{-1\frac{13}{14}} \qquad x_2 = \dfrac{\frac{27}{28} - 4\frac{23}{28}}{-1\frac{13}{14}}$
$x_1 = -3 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]0; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-3; 0[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -2\frac{25}{28}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 5\frac{11}{14} = 0$

$-2\frac{25}{28}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 5\frac{11}{14} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1\frac{13}{14} \pm \sqrt{\left(-1\frac{13}{14}\right)^2 - 4 \cdot \left(-2\frac{25}{28}\right) \cdot 5\frac{11}{14}}}{2 \cdot \left(-2\frac{25}{28}\right)}$

$x_{1/2} = \frac{+1\frac{13}{14} \pm \sqrt{70,7}}{-5\frac{11}{14}}$

$x_{1/2} = \frac{1\frac{13}{14} \pm 8,41}{-5\frac{11}{14}}$

$x_1 = \frac{1\frac{13}{14} + 8,41}{-5\frac{11}{14}} \qquad x_2 = \frac{1\frac{13}{14} - 8,41}{-5\frac{11}{14}}$

$x_1 = -1,79 \qquad x_2 = 1,12$

$\underline{x_4 = -1,79; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 1,12; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-1,79) = 8,41 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1,79/-7,92)}$

$f''(1,12) = -8,41$

$f''(1,12) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,12/3,92)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,79$	$< x <$	$1,12$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1,79; 1,12[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1,79[\quad \cup \quad]1,12; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = -5\frac{11}{14}x - 1\frac{13}{14} = 0$

$-5\frac{11}{14}x - 1\frac{13}{14} = 0 \qquad / + 1\frac{13}{14}$

$-5\frac{11}{14}x = 1\frac{13}{14} \qquad / : \left(-5\frac{11}{14}\right)$

$x = \frac{1\frac{13}{14}}{-5\frac{11}{14}}$

$x = -\frac{1}{3}$

$\underline{x_6 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-\frac{1}{3}) = -2$

$f'''(-\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-\frac{1}{3}/-2)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

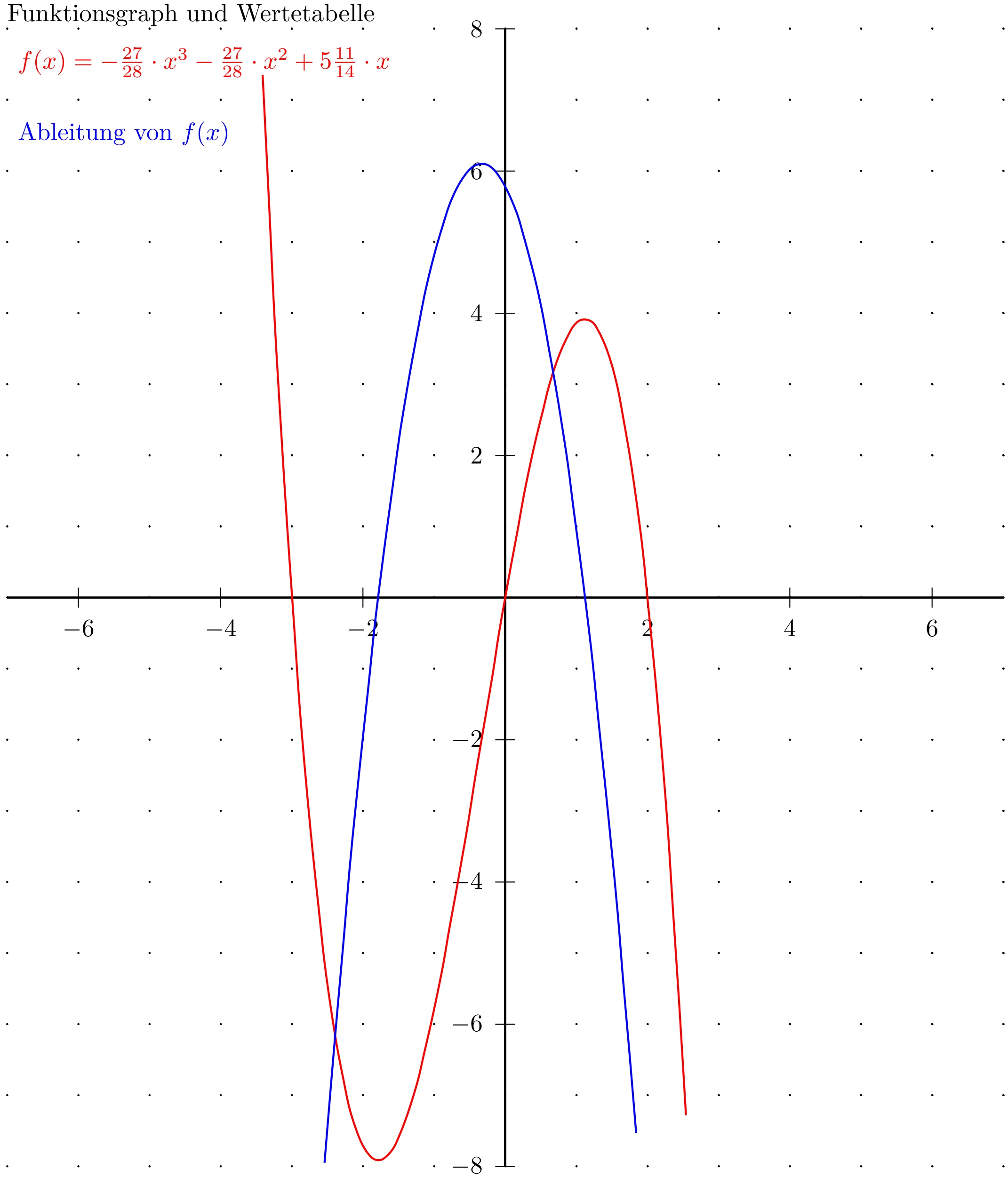
$A = \int_{-3}^{0} \left(-\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x\right) dx = \left[-0,241x^4 - \frac{9}{28}x^3 + 2\frac{25}{28}x^2\right]_{-3}^{0}$

$= \left(-0,241 \cdot 0^4 - \frac{9}{28} \cdot 0^3 + 2\frac{25}{28} \cdot 0^2\right) - \left(-0,241 \cdot (-3)^4 - \frac{9}{28} \cdot (-3)^3 + 2\frac{25}{28} \cdot (-3)^2\right)$

$= (0) - \left(15\frac{3}{16}\right) = -15\frac{3}{16}$

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{27}{28}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 5\frac{11}{14}x\right) dx = \left[-0,241x^4 - \frac{9}{28}x^3 + 2\frac{25}{28}x^2\right]_0^2$$
$$= \left(-0,241 \cdot 2^4 - \frac{9}{28} \cdot 2^3 + 2\frac{25}{28} \cdot 2^2\right) - \left(-0,241 \cdot 0^4 - \frac{9}{28} \cdot 0^3 + 2\frac{25}{28} \cdot 0^2\right)$$
$$= \left(5\frac{1}{7}\right) - (0) = 5\frac{1}{7}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	243	-122	$38\frac{4}{7}$
$-6\frac{1}{2}$	$186\frac{15}{32}$	-104	$35\frac{19}{28}$
-6	$138\frac{6}{7}$	$-86,8$	$32\frac{11}{14}$
$-5\frac{1}{2}$	$99,4$	$-71,1$	$29\frac{25}{28}$
-5	$67\frac{1}{2}$	$-56,9$	27
$-4\frac{1}{2}$	$42,3$	$-44,1$	$24\frac{3}{28}$
-4	$23\frac{1}{7}$	$-32,8$	$21\frac{3}{14}$
$-3\frac{1}{2}$	$9\frac{9}{32}$	$-22,9$	$18\frac{9}{28}$
-3	0	$-14,5$	$15\frac{3}{7}$
$-2\frac{1}{2}$	$-5,42$	$-7,47$	$12\frac{15}{28}$
-2	$-7\frac{5}{7}$	$-1,93$	$9\frac{9}{14}$
$-1\frac{1}{2}$	$-7\frac{19}{32}$	$2,17$	$6\frac{3}{4}$
-1	$-5\frac{11}{14}$	$4,82$	$3\frac{6}{7}$
$-\frac{1}{2}$	$-3,01$	$6,03$	$\frac{27}{28}$
0	0	$5,79$	$-1\frac{13}{14}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$5,79$	$-1\frac{13}{14}$
$\frac{1}{2}$	$2\frac{17}{32}$	$4,1$	$-4\frac{23}{28}$
1	$3\frac{6}{7}$	$0,964$	$-7\frac{5}{7}$
$1\frac{1}{2}$	$3,25$	$-3,62$	$-10\frac{17}{28}$
2	0	$-9,64$	$-13\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$-6,63$	$-17,1$	$-16\frac{11}{28}$
3	$-17\frac{5}{14}$	-26	$-19\frac{2}{7}$
$3\frac{1}{2}$	$-32\frac{29}{32}$	$-36,4$	$-22\frac{5}{28}$
4	-54	$-48,2$	$-25\frac{1}{14}$
$4\frac{1}{2}$	$-81,4$	$-61,5$	$-27\frac{27}{28}$
5	$-115\frac{5}{7}$	$-76,2$	$-30\frac{6}{7}$
$5\frac{1}{2}$	$-157\frac{25}{32}$	$-92,3$	$-33\frac{3}{4}$
6	$-208\frac{2}{7}$	-110	$-36\frac{9}{14}$
$6\frac{1}{2}$	-268	-129	$-39\frac{15}{28}$
7	$-337\frac{1}{2}$	-149	$-42\frac{3}{7}$

Aufgabe (21)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)^2(x-1)$
$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3(x+2)x$
$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$
$f'''(x) = 6$
$F(x) = \int (x^3 + 3x^2 - 4)dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^3})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 - 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$
\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & -4x) & \\
\hline
 & & 4x & -4 \\
 & & -(4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2}$
$x_1 = \dfrac{-4 + 0}{2}$ $x_2 = \dfrac{-4 - 0}{2}$
$x_1 = -2$ $x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0$
$x(3x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 3x + 6 = 0$
$3x + 6 = 0 \qquad / - 6$

$3x = -6 \qquad / : 3$
$x = \frac{-6}{3}$
$x = -2$
$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = -6$
$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2/0)}$
$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-4)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-2; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 6x + 6 = 0$

$6x + 6 = 0 \qquad / - 6$
$6x = -6 \qquad / : 6$
$x = \frac{-6}{6}$
$x = -1$
$\underline{x_5 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1) = -2$
$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1/-2)}$
• Kruemmung

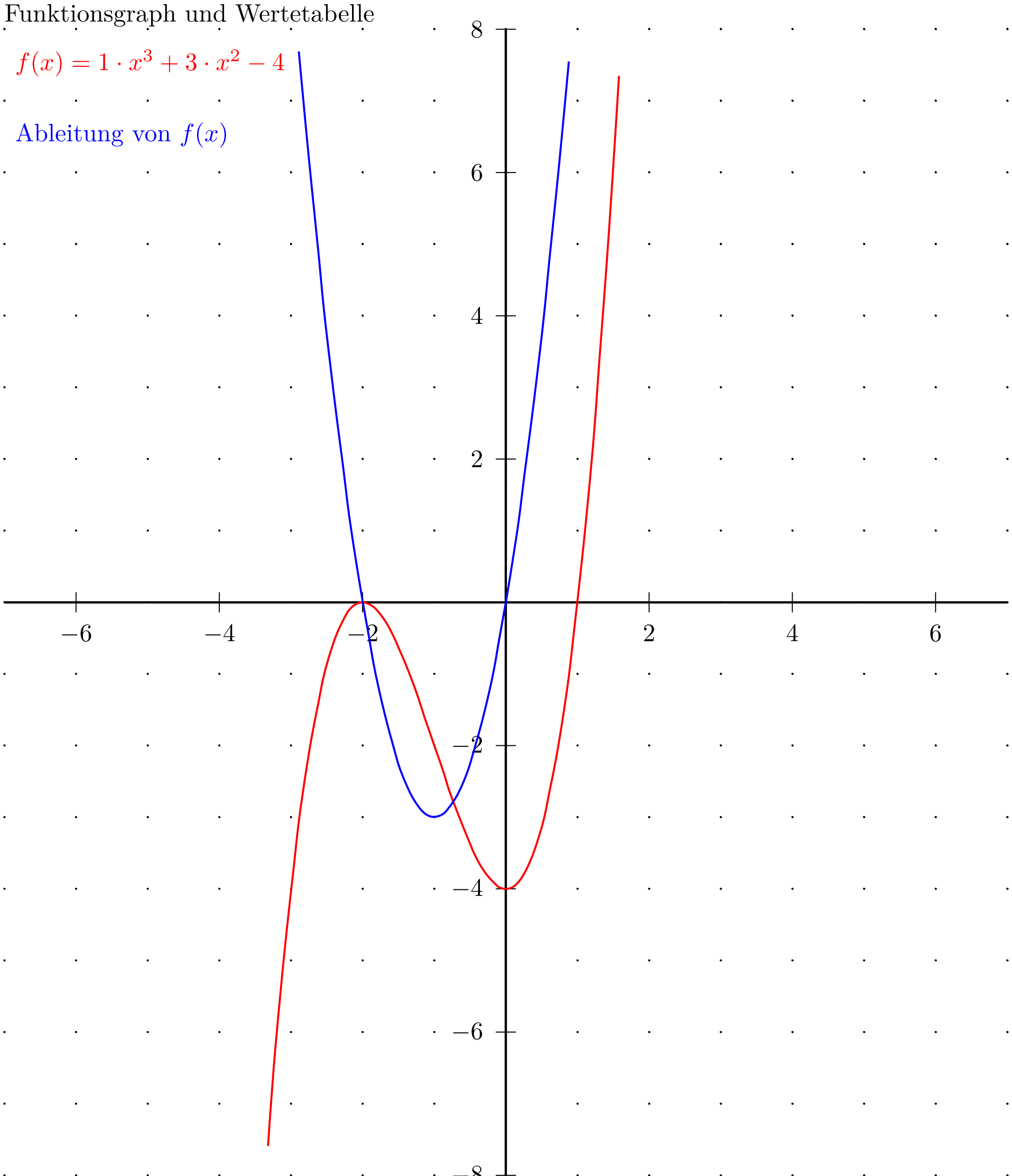
	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-2}^{1} \left(x^3 + 3x^2 - 4\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x\right]_{-2}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 + 1 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 1 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(-2\frac{3}{4}\right) - (4) = -6\frac{3}{4}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-200	105	-36
$-6\frac{1}{2}$	$-151\frac{7}{8}$	$87,8$	-33
-6	-112	72	-30
$-5\frac{1}{2}$	$-79\frac{5}{8}$	$57,8$	-27
-5	-54	45	-24
$-4\frac{1}{2}$	$-34\frac{3}{8}$	$33,8$	-21
-4	-20	24	-18
$-3\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$15,8$	-15
-3	-4	9	-12
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	$3,75$	-9
-2	0	$0,000306$	-6
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$-2,25$	-3
-1	-2	-3	0
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{8}$	$-2,25$	3
0	-4	$0,000306$	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-4	$0,000306$	6
$\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$3,75$	9
1	0	9	12
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	$15,8$	15
2	16	24	18
$2\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{8}$	$33,8$	21
3	50	45	24
$3\frac{1}{2}$	$75\frac{5}{8}$	$57,8$	27
4	108	72	30
$4\frac{1}{2}$	$147\frac{7}{8}$	$87,8$	33
5	196	105	36
$5\frac{1}{2}$	$253\frac{1}{8}$	124	39
6	320	144	42
$6\frac{1}{2}$	$397\frac{3}{8}$	166	45
7	486	189	48

Aufgabe (22)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2 = -5\frac{1}{16}x^2(x-2)$
$f'(x) = -15\frac{3}{16}x^2 + 20\frac{1}{4}x = -15\frac{3}{16}x(x-1\frac{1}{3})$
$f''(x) = -30\frac{3}{8}x + 20\frac{1}{4} = -30\frac{3}{8}(x-\frac{2}{3})$
$f'''(x) = -30\frac{3}{8}$
$F(x) = \int(-5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2)dx = -1\frac{17}{64}x^4 + 3\frac{3}{8}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-5\frac{1}{16} + \frac{10\frac{1}{8}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-5\frac{1}{16}\cdot\infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-5\frac{1}{16}\cdot(-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -5\frac{1}{16}\cdot(-x)^3 + 10\frac{1}{8}\cdot(-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2 = 0$
$x^2(-5\frac{1}{16}x + 10\frac{1}{8}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -5\frac{1}{16}x + 10\frac{1}{8} = 0$
$-5\frac{1}{16}x + 10\frac{1}{8} = 0 \qquad / - 10\frac{1}{8}$
$-5\frac{1}{16}x = -10\frac{1}{8} \qquad / : \left(-5\frac{1}{16}\right)$
$x = \frac{-10\frac{1}{8}}{-5\frac{1}{16}}$
$x = 2$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -15\frac{3}{16}x^2 + 20\frac{1}{4}x = 0$
$x(-15\frac{3}{16}x + 20\frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -15\frac{3}{16}x + 20\frac{1}{4} = 0$
$-15\frac{3}{16}x + 20\frac{1}{4} = 0 \qquad / - 20\frac{1}{4}$
$-15\frac{3}{16}x = -20\frac{1}{4} \qquad / : \left(-15\frac{3}{16}\right)$
$x = \frac{-20\frac{1}{4}}{-15\frac{3}{16}}$
$x = 1\frac{1}{3}$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 20\frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/0)}$

$f''(1\frac{1}{3}) = -20\frac{1}{4}$

$f''(1\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{Hochpunkt:}(1\frac{1}{3}/6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0; 1\frac{1}{3}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = -30\frac{3}{8}x + 20\frac{1}{4} = 0$

$-30\frac{3}{8}x + 20\frac{1}{4} = 0 \qquad / -20\frac{1}{4}$

$-30\frac{3}{8}x = -20\frac{1}{4} \qquad / : \left(-30\frac{3}{8}\right)$

$x = \frac{-20\frac{1}{4}}{-30\frac{3}{8}}$

$x = \frac{2}{3}$

$\underline{x_5 = \frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(\frac{2}{3}) = 3$

$f'''(\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(\frac{2}{3}/3)}$

• Kruemmung

	$x <$	$\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; \frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

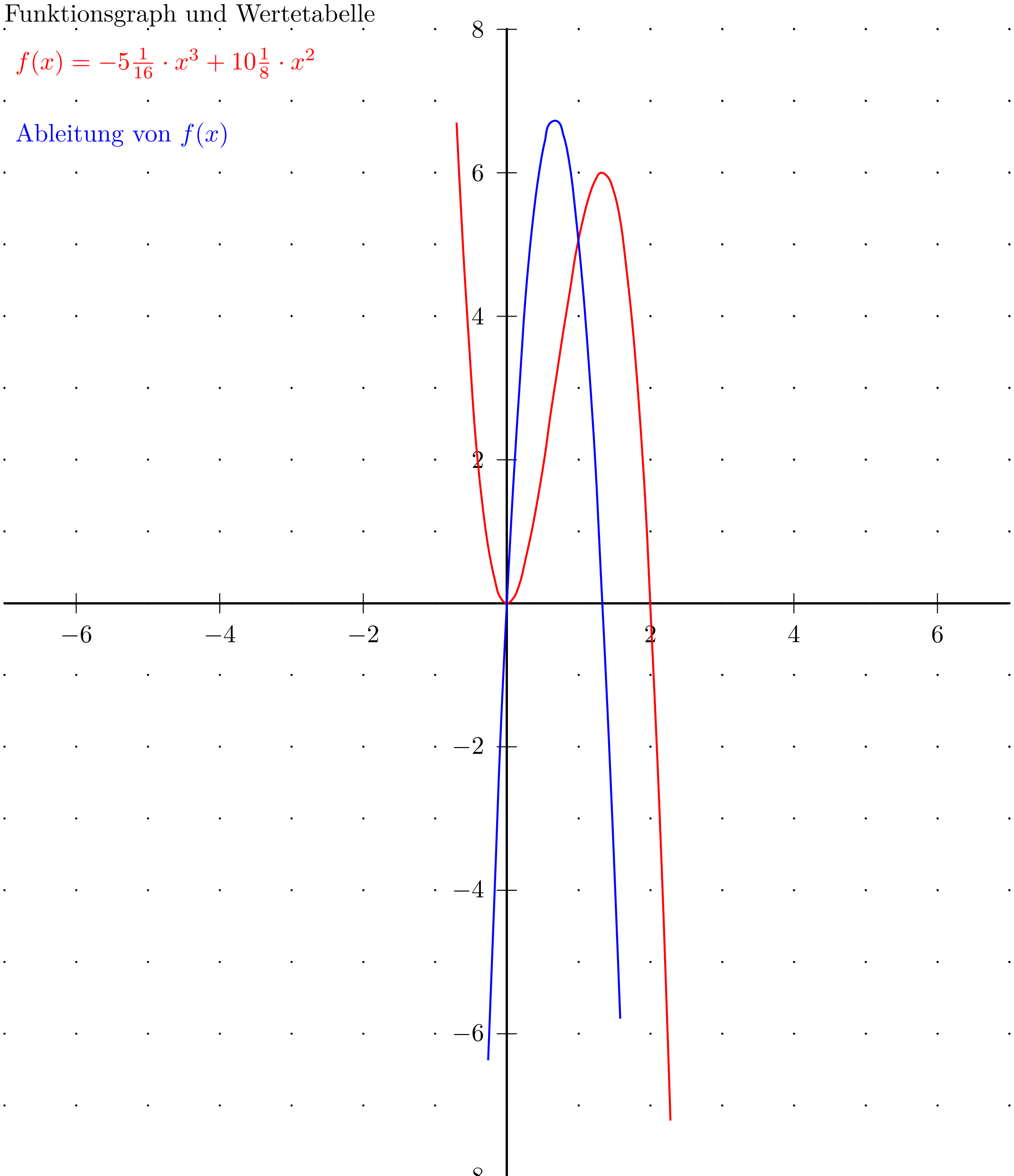
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_0^2 \left(-5\frac{1}{16}x^3 + 10\frac{1}{8}x^2\right) dx = \left[-1\frac{17}{64}x^4 + 3\frac{3}{8}x^3\right]_0^2$$

$$= \left(-1\frac{17}{64} \cdot 2^4 + 3\frac{3}{8} \cdot 2^3\right) - \left(-1\frac{17}{64} \cdot 0^4 + 3\frac{3}{8} \cdot 0^3\right)$$

$$= \left(6\frac{3}{4}\right) - (0) = 6\frac{3}{4}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2232\frac{9}{16}$	-886	$232\frac{7}{8}$
$-6\frac{1}{2}$	$1,82 \cdot 10^3$	-773	$217\frac{11}{16}$
-6	$1,46 \cdot 10^3$	-668	$202\frac{1}{2}$
$-5\frac{1}{2}$	$1,15 \cdot 10^3$	-571	$187\frac{5}{16}$
-5	$885\frac{15}{16}$	-481	$172\frac{1}{8}$
$-4\frac{1}{2}$	666	-399	$156\frac{15}{16}$
-4	486	-324	$141\frac{3}{4}$
$-3\frac{1}{2}$	341	-257	$126\frac{9}{16}$
-3	$227\frac{13}{16}$	-197	$111\frac{3}{8}$
$-2\frac{1}{2}$	142	-146	$96\frac{3}{16}$
-2	81	-101	81
$-1\frac{1}{2}$	$39,9$	$-64,5$	$65\frac{13}{16}$
-1	$15\frac{3}{16}$	$-35,4$	$50\frac{5}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$3,16$	$-13,9$	$35\frac{7}{16}$
0	0	$-0,00155$	$20\frac{1}{4}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,00155$	$20\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$1,9$	$6,33$	$5\frac{1}{16}$
1	$5\frac{1}{16}$	$5,06$	$-10\frac{1}{8}$
$1\frac{1}{2}$	$5,7$	$-3,8$	$-25\frac{5}{16}$
2	0	$-20,3$	$-40\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$-15,8$	$-44,3$	$-55\frac{11}{16}$
3	$-45\frac{9}{16}$	$-75,9$	$-70\frac{7}{8}$
$3\frac{1}{2}$	-93	-115	$-86\frac{1}{16}$
4	-162	-162	$-101\frac{1}{4}$
$4\frac{1}{2}$	-256	-216	$-116\frac{7}{16}$
5	$-379\frac{11}{16}$	-278	$-131\frac{5}{8}$
$5\frac{1}{2}$	-536	-348	$-146\frac{13}{16}$
6	-729	-425	-162
$6\frac{1}{2}$	-963	-510	$-177\frac{3}{16}$
7	$-1240\frac{5}{16}$	-602	$-192\frac{3}{8}$

Aufgabe (23)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4 = \frac{1}{6}(x+3)(x-2)(x-4)$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x+1,08)(x-3,08)$
$f''(x) = x - 1 = (x-1)$
$f'''(x) = 1$
$F(x) = \int(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4)dx = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{1\frac{2}{3}}{x^2} + \frac{4}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{6} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{6} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{6} \cdot (-x)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-x)^2 - 1\frac{2}{3} \cdot (-x) + 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4 = 0$

$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4 = 0$
$Numerische Suche:$
$\underline{x_1 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 4;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	2	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-3;2[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]2;4[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1\frac{2}{3} = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - x - 1\frac{2}{3} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{4\frac{1}{3}}}{1}$
$x_{1/2} = \dfrac{1 \pm 2,08}{1}$
$x_1 = \dfrac{1 + 2,08}{1} \qquad x_2 = \dfrac{1 - 2,08}{1}$
$x_1 = 3,08 \qquad x_2 = -1,08$
$\underline{x_4 = -1,08;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 3,08;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1,08) = -2,08$
$f''(-1,08) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1,08/5,01)}$
$f''(3,08) = 2,08 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(3,08/-1,01)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,08$	$< x <$	$3,08$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,08[\quad \cup \quad]3,08; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-1,08; 3,08[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = x - 1 = 0$

$x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$x = 1$
$x_6 = 1; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f'''(1) = 2$
$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:(1/2)
• Kruemmung

	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-3}^{2} \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4\right) dx = \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + 4x\right]_{-3}^{2}$$
$$= \left(\frac{1}{24} \cdot 2^4 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 - \frac{5}{6} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{24} \cdot (-3)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-3)^3 - \frac{5}{6} \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3)\right)$$
$$= (4) - \left(-11\frac{5}{8}\right) = 15\frac{5}{8}$$
$$A = \int_{2}^{4} \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{2}{3}x + 4\right) dx = \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + 4x\right]_{2}^{4}$$
$$= \left(\frac{1}{24} \cdot 4^4 - \frac{1}{6} \cdot 4^3 - \frac{5}{6} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4\right) - \left(\frac{1}{24} \cdot 2^4 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 - \frac{5}{6} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\right)$$
$$= \left(2\frac{2}{3}\right) - (4) = -1\frac{1}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-66	$29,8$	-8
$-6\frac{1}{2}$	$-52\frac{1}{16}$	26	$-7\frac{1}{2}$
-6	-40	$22,3$	-7
$-5\frac{1}{2}$	$-29\frac{11}{16}$	19	$-6\frac{1}{2}$
-5	-21	$15,8$	-6
$-4\frac{1}{2}$	$-13\frac{13}{16}$	13	$-5\frac{1}{2}$
-4	-8	$10,3$	-5
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{7}{16}$	$7,96$	$-4\frac{1}{2}$
-3	0	$5,83$	-4
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{7}{16}$	$3,96$	$-3\frac{1}{2}$
-2	4	$2,33$	-3
$-1\frac{1}{2}$	$4\frac{13}{16}$	$0,958$	$-2\frac{1}{2}$
-1	5	$-0,167$	-2
$-\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$-1,04$	$-1\frac{1}{2}$
0	4	$-1,67$	-1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	$-1,67$	-1
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{16}$	$-2,04$	$-\frac{1}{2}$
1	2	$-2,17$	0
$1\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	$-2,04$	$\frac{1}{2}$
2	0	$-1,67$	1
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{16}$	$-1,04$	$1\frac{1}{2}$
3	-1	$-0,167$	2
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{16}$	$0,958$	$2\frac{1}{2}$
4	0	$2,33$	3
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$3,96$	$3\frac{1}{2}$
5	4	$5,83$	4
$5\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{16}$	$7,96$	$4\frac{1}{2}$
6	12	$10,3$	5
$6\frac{1}{2}$	$17\frac{13}{16}$	13	$5\frac{1}{2}$
7	25	$15,8$	6

Aufgabe (24)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x(x-3)^2$
$f'(x) = -6x^2 + 24x - 18 = -6(x-1)(x-3)$
$f''(x) = -12x + 24 = -12(x-2)$
$f'''(x) = -12$
$F(x) = \int(-2x^3 + 12x^2 - 18x)dx = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 9x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-2 + \dfrac{12}{x} - \dfrac{18}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^3 + 12 \cdot (-x)^2 - 18 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = 0$
$x(-2x^2 + 12x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -2x^2 + 12x - 18 = 0$

$-2x^2 + 12x - 18 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-2)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{0}}{-4}$
$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm 0}{-4}$
$x_1 = \dfrac{-12 + 0}{-4} \qquad x_2 = \dfrac{-12 - 0}{-4}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]0; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -6x^2 + 24x - 18 = 0$

$-6x^2 + 24x - 18 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-6)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-24 \pm \sqrt{144}}{-12}$
$x_{1/2} = \dfrac{-24 \pm 12}{-12}$
$x_1 = \dfrac{-24 + 12}{-12} \qquad x_2 = \dfrac{-24 - 12}{-12}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(1) = 12 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/-8)}$
$f''(3) = -12$
$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]1; 3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -12x + 24 = 0$

$-12x + 24 = 0 \qquad / - 24$
$-12x = -24 \qquad / : (-12)$
$x = \dfrac{-24}{-12}$
$x = 2$
$\underline{x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(2) = -4$
$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(2/-4)}$
• Kruemmung

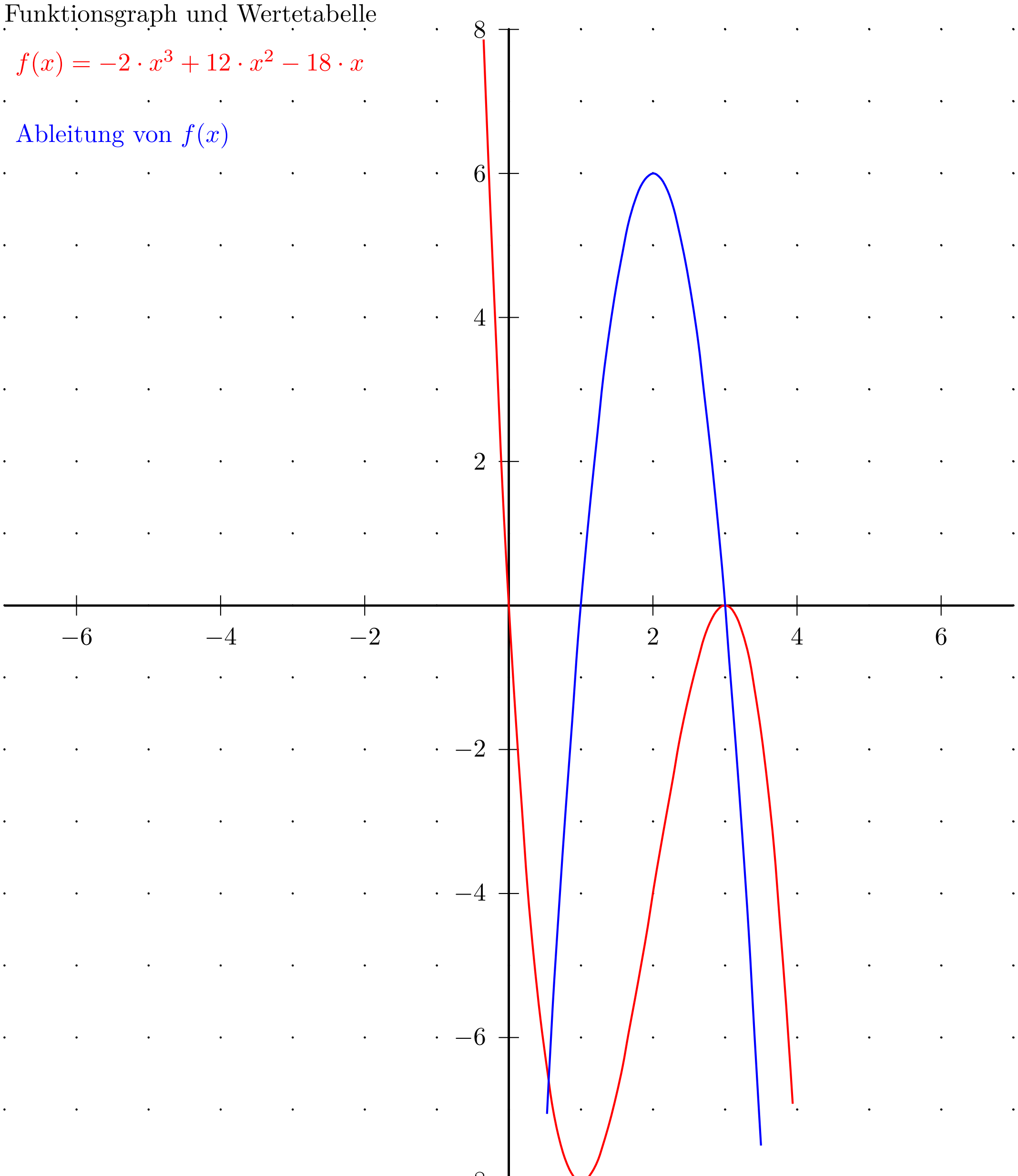
	$x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 2[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]2; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^3 \left(-2x^3 + 12x^2 - 18x\right) dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 9x^2\right]_0^3$$
$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2\right)$$
$$= \left(-13\frac{1}{2}\right) - (0) = -13\frac{1}{2}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1,4 \cdot 10^3$	-480	108
$-6\frac{1}{2}$	$1173\frac{1}{4}$	-428	102
-6	972	-378	96
$-5\frac{1}{2}$	$794\frac{3}{4}$	-332	90
-5	640	-288	84
$-4\frac{1}{2}$	$506\frac{1}{4}$	-248	78
-4	392	-210	72
$-3\frac{1}{2}$	$295\frac{3}{4}$	-176	66
-3	216	-144	60
$-2\frac{1}{2}$	$151\frac{1}{4}$	-116	54
-2	100	-90	48
$-1\frac{1}{2}$	$60\frac{3}{4}$	$-67,5$	42
-1	32	-48	36
$-\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$-31,5$	30
0	0	-18	24

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-18	24
$\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$	$-7,5$	18
1	-8	$-0,000612$	12
$1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	$4,5$	6
2	-4	6	0
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$4,5$	-6
3	0	$-0,000612$	-12
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	$-7,5$	-18
4	-8	-18	-24
$4\frac{1}{2}$	$-20\frac{1}{4}$	$-31,5$	-30
5	-40	-48	-36
$5\frac{1}{2}$	$-68\frac{3}{4}$	$-67,5$	-42
6	-108	-90	-48
$6\frac{1}{2}$	$-159\frac{1}{4}$	-116	-54
7	-224	-144	-60

Aufgabe (25)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x = 40\frac{1}{2}(x+1)^2x$
$f'(x) = 121\frac{1}{2}x^2 + 162x + 40\frac{1}{2} = 121\frac{1}{2}(x+1)(x+\frac{1}{3})$
$f''(x) = 243x + 162 = 243(x+\frac{2}{3})$
$f'''(x) = 243$
$F(x) = \int(40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x)dx = 10\frac{1}{8}x^4 + 27x^3 + 20\frac{1}{4}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(40\frac{1}{2} + \dfrac{81}{x} + \dfrac{40\frac{1}{2}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [40\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [40\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 40\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 81 \cdot (-x)^2 + 40\frac{1}{2} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x = 0$
$x(40\frac{1}{2}x^2 + 81x + 40\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 40\frac{1}{2}x^2 + 81x + 40\frac{1}{2} = 0$

$40\frac{1}{2}x^2 + 81x + 40\frac{1}{2} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-81 \pm \sqrt{81^2 - 4 \cdot 40\frac{1}{2} \cdot 40\frac{1}{2}}}{2 \cdot 40\frac{1}{2}}$
$x_{1/2} = \dfrac{-81 \pm \sqrt{0}}{81}$
$x_{1/2} = \dfrac{-81 \pm 0}{81}$
$x_1 = \dfrac{-81 + 0}{81} \qquad x_2 = \dfrac{-81 - 0}{81}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 121\dfrac{1}{2}x^2 + 162x + 40\dfrac{1}{2} = 0$

$121\dfrac{1}{2}x^2 + 162x + 40\dfrac{1}{2} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-162 \pm \sqrt{162^2 - 4 \cdot 121\frac{1}{2} \cdot 40\frac{1}{2}}}{2 \cdot 121\frac{1}{2}}$
$x_{1/2} = \dfrac{-162 \pm \sqrt{6,56 \cdot 10^3}}{243}$

$x_{1/2} = \dfrac{-162 \pm 81}{243}$
$x_1 = \dfrac{-162 + 81}{243} \qquad x_2 = \dfrac{-162 - 81}{243}$
$x_1 = -\dfrac{1}{3} \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = -\dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1) = -81$
$f''(-1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1/0)}$
$f''(-\dfrac{1}{3}) = 81 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-\dfrac{1}{3}/-6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-1	$< x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-\dfrac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1; -\dfrac{1}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 243x + 162 = 0$

$243x + 162 = 0 \qquad / -162$
$243x = -162 \qquad / : 243$
$x = \dfrac{-162}{243}$
$x = -\dfrac{2}{3}$
$\underline{x_5 = -\dfrac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-\dfrac{2}{3}) = -3$
$f'''(-\dfrac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-\dfrac{2}{3}/-3)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

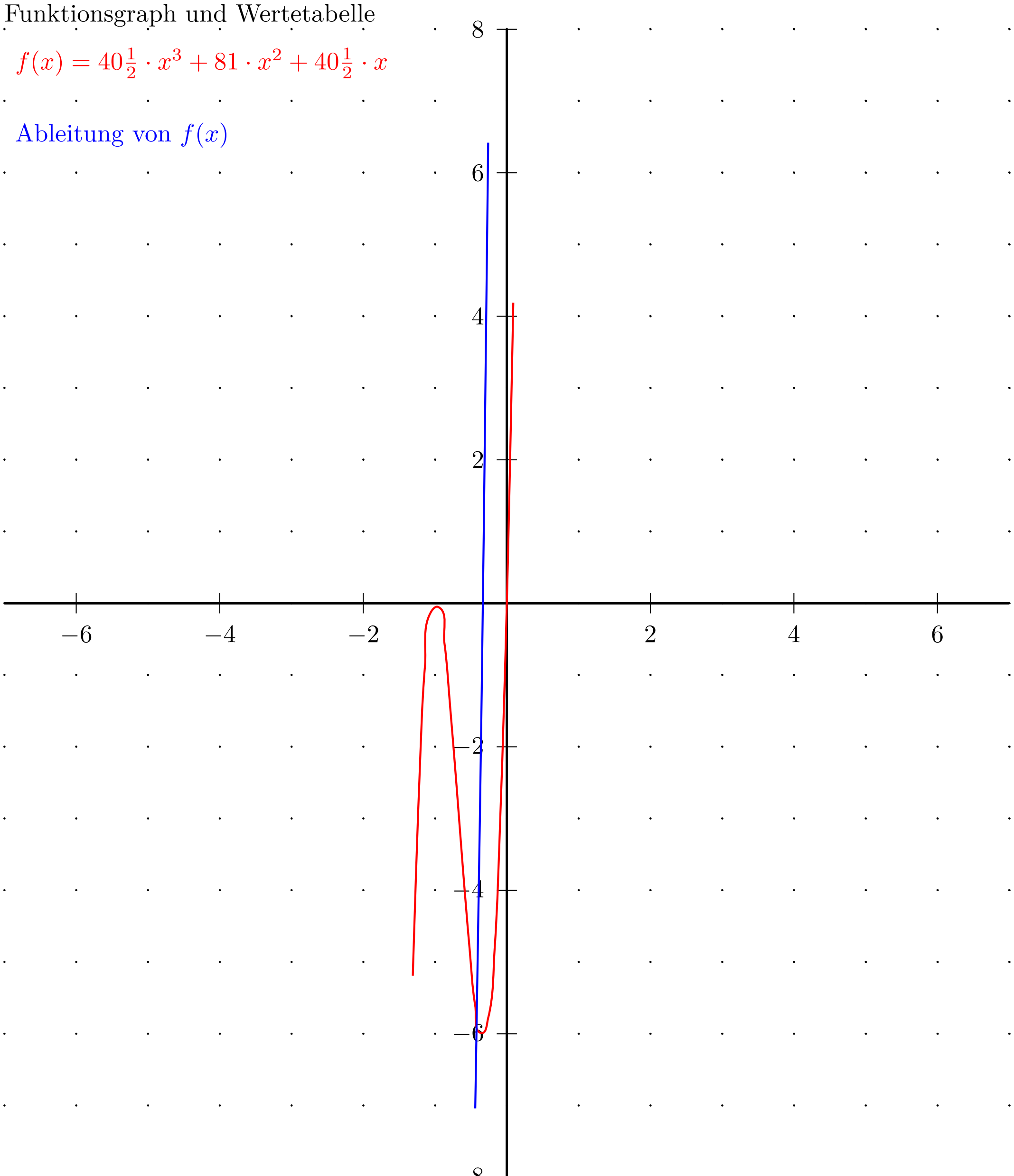
$\underline{x \in]-\dfrac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -\dfrac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{0} \left(40\frac{1}{2}x^3 + 81x^2 + 40\frac{1}{2}x\right) dx = \left[10\frac{1}{8}x^4 + 27x^3 + 20\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$= \left(10\frac{1}{8} \cdot 0^4 + 27 \cdot 0^3 + 20\frac{1}{4} \cdot 0^2\right) - \left(10\frac{1}{8} \cdot (-1)^4 + 27 \cdot (-1)^3 + 20\frac{1}{4} \cdot (-1)^2\right)$$
$$= (0) - \left(3\frac{3}{8}\right) = -3\frac{3}{8}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1,02 \cdot 10^4$	$4,86 \cdot 10^3$	$-1,54 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-7963\frac{5}{16}$	$4,12 \cdot 10^3$	$-1417\frac{1}{2}$
-6	$-6,08 \cdot 10^3$	$3,44 \cdot 10^3$	$-1,3 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-4510\frac{11}{16}$	$2,82 \cdot 10^3$	$-1174\frac{1}{2}$
-5	$-3,24 \cdot 10^3$	$2,27 \cdot 10^3$	$-1,05 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-2232\frac{9}{16}$	$1,77 \cdot 10^3$	$-931\frac{1}{2}$
-4	$-1,46 \cdot 10^3$	$1,34 \cdot 10^3$	-810
$-3\frac{1}{2}$	$-885\frac{15}{16}$	962	$-688\frac{1}{2}$
-3	-486	648	-567
$-2\frac{1}{2}$	$-227\frac{13}{16}$	395	$-445\frac{1}{2}$
-2	-81	203	-324
$-1\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{16}$	$70,9$	$-202\frac{1}{2}$
-1	0	$0,0124$	-81
$-\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{16}$	$-10,1$	$40\frac{1}{2}$
0	0	$40,5$	162

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$40,5$	162
$\frac{1}{2}$	$45\frac{9}{16}$	152	$283\frac{1}{2}$
1	162	324	405
$1\frac{1}{2}$	$379\frac{11}{16}$	557	$526\frac{1}{2}$
2	729	851	648
$2\frac{1}{2}$	$1240\frac{5}{16}$	$1,2 \cdot 10^3$	$769\frac{1}{2}$
3	$1,94 \cdot 10^3$	$1,62 \cdot 10^3$	891
$3\frac{1}{2}$	$2870\frac{7}{16}$	$2,1 \cdot 10^3$	$1012\frac{1}{2}$
4	$4,05 \cdot 10^3$	$2,63 \cdot 10^3$	$1,13 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$5513\frac{1}{16}$	$3,23 \cdot 10^3$	$1255\frac{1}{2}$
5	$7,29 \cdot 10^3$	$3,89 \cdot 10^3$	$1,38 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$9411\frac{3}{16}$	$4,61 \cdot 10^3$	$1498\frac{1}{2}$
6	$1,19 \cdot 10^4$	$5,39 \cdot 10^3$	$1,62 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$14807\frac{13}{16}$	$6,23 \cdot 10^3$	$1741\frac{1}{2}$
7	$1,81 \cdot 10^4$	$7,13 \cdot 10^3$	$1,86 \cdot 10^3$

Aufgabe (26)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 54x^3 - 270x^2 + 432x - 216 = 54(x-1)(x-2)^2$
$f'(x) = 162x^2 - 540x + 432 = 162(x - 1\frac{1}{3})(x-2)$
$f''(x) = 324x - 540 = 324(x - 1\frac{2}{3})$
$f'''(x) = 324$
$F(x) = \int(54x^3 - 270x^2 + 432x - 216)dx = 13\frac{1}{2}x^4 - 90x^3 + 216x^2 - 216x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(54 - \dfrac{270}{x} + \dfrac{432}{x^2} - \dfrac{216}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [54 \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [54 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 54 \cdot (-x)^3 - 270 \cdot (-x)^2 + 432 \cdot (-x) - 216$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 54x^3 - 270x^2 + 432x - 216 = 0$

$54x^3 - 270x^2 + 432x - 216 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{rrrrl}
(54x^3 & -270x^2 & +432x & -216 &) : (x-1) = 54x^2 - 216x + 216 \\
-(54x^3 & -54x^2) & & & \\
\hline
 & -216x^2 & +432x & -216 & \\
 & -(-216x^2 & +216x) & & \\
\hline
 & & 216x & -216 & \\
 & & -(216x & -216) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$54x^2 - 216x + 216 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+216 \pm \sqrt{(-216)^2 - 4 \cdot 54 \cdot 216}}{2 \cdot 54}$
$x_{1/2} = \dfrac{+216 \pm \sqrt{0}}{108}$
$x_{1/2} = \dfrac{216 \pm 0}{108}$
$x_1 = \dfrac{216 + 0}{108}$ $x_2 = \dfrac{216 - 0}{108}$
$x_1 = 2$ $x_2 = 2$
$\underline{x_1 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]1;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 162x^2 - 540x + 432 = 0$

$162x^2 - 540x + 432 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+540 \pm \sqrt{(-540)^2 - 4 \cdot 162 \cdot 432}}{2 \cdot 162}$

$x_{1/2} = \frac{+540 \pm \sqrt{1,17 \cdot 10^4}}{324}$

$x_{1/2} = \frac{540 \pm 108}{324}$

$x_1 = \frac{540 + 108}{324} \qquad x_2 = \frac{540 - 108}{324}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1\frac{1}{3}$

$\underline{x_3 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(1\frac{1}{3}) = -108$

$f''(1\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1\frac{1}{3}/8)}$

$f''(2) = 108 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 1\frac{1}{3}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]1\frac{1}{3}; 2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = 324x - 540 = 0$

$324x - 540 = 0 \qquad / + 540$

$324x = 540 \qquad / : 324$

$x = \frac{540}{324}$

$x = 1\frac{2}{3}$

$\underline{x_5 = 1\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(1\frac{2}{3}) = 4$

$f'''(1\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(1\frac{2}{3}/4)}$

• Kruemmung

	$x <$	$1\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]1\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; 1\frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_1^2 \left(54x^3 - 270x^2 + 432x - 216\right) dx = \left[13\frac{1}{2}x^4 - 90x^3 + 216x^2 - 216x\right]_1^2$

$= \left(13\frac{1}{2} \cdot 2^4 - 90 \cdot 2^3 + 216 \cdot 2^2 - 216 \cdot 2\right) - \left(13\frac{1}{2} \cdot 1^4 - 90 \cdot 1^3 + 216 \cdot 1^2 - 216 \cdot 1\right)$

$= (-72) - \left(-76\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{2}$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-3,5 \cdot 10^4$	$1,22 \cdot 10^4$	$-2,81 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-29261\frac{1}{4}$	$1,08 \cdot 10^4$	$-2,65 \cdot 10^3$
-6	$-2,42 \cdot 10^4$	$9,5 \cdot 10^3$	$-2,48 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-19743\frac{3}{4}$	$8,3 \cdot 10^3$	$-2,32 \cdot 10^3$
-5	$-1,59 \cdot 10^4$	$7,18 \cdot 10^3$	$-2,16 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-12548\frac{1}{4}$	$6,14 \cdot 10^3$	$-2 \cdot 10^3$
-4	$-9,72 \cdot 10^3$	$5,18 \cdot 10^3$	$-1,84 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-7350\frac{3}{4}$	$4,31 \cdot 10^3$	$-1,67 \cdot 10^3$
-3	$-5,4 \cdot 10^3$	$3,51 \cdot 10^3$	$-1,51 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$-3827\frac{1}{4}$	$2,79 \cdot 10^3$	$-1,35 \cdot 10^3$
-2	$-2,59 \cdot 10^3$	$2,16 \cdot 10^3$	$-1,19 \cdot 10^3$
$-1\frac{1}{2}$	$-1653\frac{3}{4}$	$1,61 \cdot 10^3$	$-1,03 \cdot 10^3$
-1	-972	$1,13 \cdot 10^3$	-864
$-\frac{1}{2}$	$-506\frac{1}{4}$	743	-702
0	-216	432	-540

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-216	432	-540
$\frac{1}{2}$	$-60\frac{3}{4}$	203	-378
1	0	54	-216
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$-13,5$	-54
2	0	$0,0165$	108
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	$94,5$	270
3	108	270	432
$3\frac{1}{2}$	$303\frac{3}{4}$	527	594
4	648	864	756
$4\frac{1}{2}$	$1181\frac{1}{4}$	$1,28 \cdot 10^3$	918
5	$1,94 \cdot 10^3$	$1,78 \cdot 10^3$	$1,08 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$2976\frac{3}{4}$	$2,36 \cdot 10^3$	$1,24 \cdot 10^3$
6	$4,32 \cdot 10^3$	$3,02 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$6014\frac{1}{4}$	$3,77 \cdot 10^3$	$1,57 \cdot 10^3$
7	$8,1 \cdot 10^3$	$4,59 \cdot 10^3$	$1,73 \cdot 10^3$

Aufgabe (27)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x = 1\frac{19}{35}x(x-3)(x-4)$
$f'(x) = 4\frac{22}{35}x^2 - 21\frac{3}{5}x + 18\frac{18}{35} = 4\frac{22}{35}(x-1,13)(x-3,54)$
$f''(x) = 9\frac{9}{35}x - 21\frac{3}{5} = 9\frac{9}{35}(x - 2\frac{1}{3})$
$f'''(x) = 9\frac{9}{35}$
$F(x) = \int(1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x)dx = \frac{27}{70}x^4 - 3\frac{3}{5}x^3 + 9\frac{9}{35}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(1\frac{19}{35} - \frac{10\frac{4}{5}}{x} + \frac{18\frac{18}{35}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1\frac{19}{35} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1\frac{19}{35} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1\frac{19}{35} \cdot (-x)^3 - 10\frac{4}{5} \cdot (-x)^2 + 18\frac{18}{35} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x = 0$
$x(1\frac{19}{35}x^2 - 10\frac{4}{5}x + 18\frac{18}{35}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 1\frac{19}{35}x^2 - 10\frac{4}{5}x + 18\frac{18}{35} = 0$

$1\frac{19}{35}x^2 - 10\frac{4}{5}x + 18\frac{18}{35} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+10\frac{4}{5} \pm \sqrt{\left(-10\frac{4}{5}\right)^2 - 4 \cdot 1\frac{19}{35} \cdot 18\frac{18}{35}}}{2 \cdot 1\frac{19}{35}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+10\frac{4}{5} \pm \sqrt{2,38}}{3\frac{3}{35}}$$

$$x_{1/2} = \frac{10\frac{4}{5} \pm 1\frac{19}{35}}{3\frac{3}{35}}$$

$$x_1 = \frac{10\frac{4}{5} + 1\frac{19}{35}}{3\frac{3}{35}} \qquad x_2 = \frac{10\frac{4}{5} - 1\frac{19}{35}}{3\frac{3}{35}}$$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_1 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 4;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]0;3[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]3;4[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = 4\frac{22}{35}x^2 - 21\frac{3}{5}x + 18\frac{18}{35} = 0$$

$$4\frac{22}{35}x^2 - 21\frac{3}{5}x + 18\frac{18}{35} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+21\frac{3}{5} \pm \sqrt{\left(-21\frac{3}{5}\right)^2 - 4 \cdot 4\frac{22}{35} \cdot 18\frac{18}{35}}}{2 \cdot 4\frac{22}{35}}$$

$x_{1/2} = \frac{+21\frac{3}{5} \pm \sqrt{124}}{9\frac{9}{35}}$

$x_{1/2} = \frac{21\frac{3}{5} \pm 11,1}{9\frac{9}{35}}$

$x_1 = \frac{21\frac{3}{5} + 11,1}{9\frac{9}{35}} \qquad x_2 = \frac{21\frac{3}{5} - 11,1}{9\frac{9}{35}}$

$x_1 = 3,54 \qquad x_2 = 1,13$

$\underline{x_4 = 1,13; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 3,54; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(1,13) = -11,1$

$f''(1,13) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,13/9,36)}$

$f''(3,54) = 11,1 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(3,54/-1,36)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$1,13$	$< x <$	$3,54$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 1,13[\quad \cup \quad]3,54; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]1,13; 3,54[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = 9\frac{9}{35}x - 21\frac{3}{5} = 0$

$9\frac{9}{35}x - 21\frac{3}{5} = 0 \qquad / + 21\frac{3}{5}$

$9\frac{9}{35}x = 21\frac{3}{5} \qquad / : 9\frac{9}{35}$

$x = \frac{21\frac{3}{5}}{9\frac{9}{35}}$

$x = 2\frac{1}{3}$

$\underline{x_6 = 2\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(2\frac{1}{3}) = 4$

$f'''(2\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(2\frac{1}{3}/4)}$

• Kruemmung

	$x <$	$2\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]2\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; 2\frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_0^3 \left(1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x\right) dx = \left[\frac{27}{70}x^4 - 3\frac{3}{5}x^3 + 9\frac{9}{35}x^2\right]_0^3$$

$$= \left(\frac{27}{70} \cdot 3^4 - 3\frac{3}{5} \cdot 3^3 + 9\frac{9}{35} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{27}{70} \cdot 0^4 - 3\frac{3}{5} \cdot 0^3 + 9\frac{9}{35} \cdot 0^2\right)$$

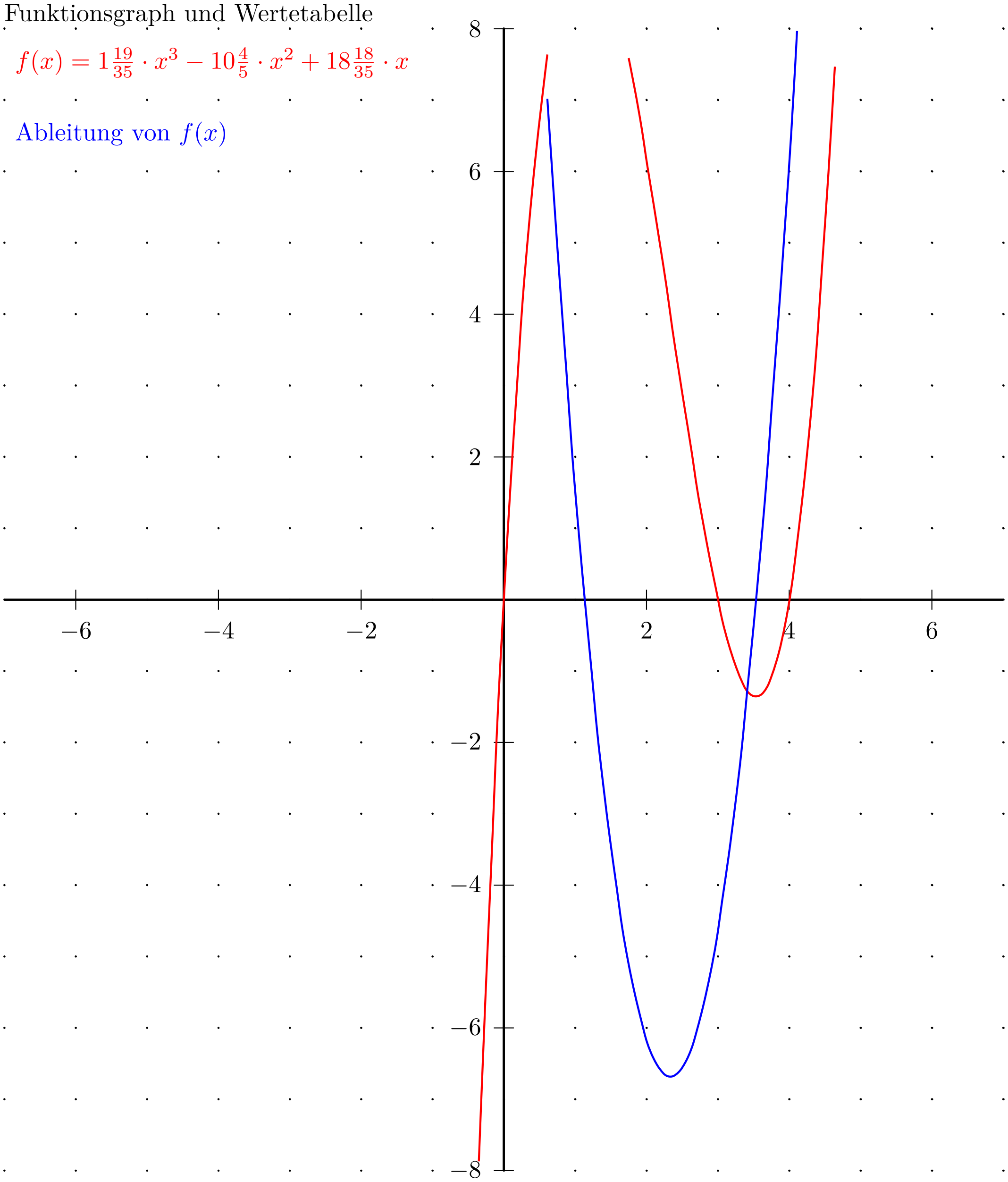
$$= \left(17\frac{5}{14}\right) - (0) = 17\frac{5}{14}$$

$$A = \int_3^4 \left(1\frac{19}{35}x^3 - 10\frac{4}{5}x^2 + 18\frac{18}{35}x\right) dx = \left[\frac{27}{70}x^4 - 3\frac{3}{5}x^3 + 9\frac{9}{35}x^2\right]_3^4$$

$= \left(\frac{27}{70} \cdot 4^4 - 3\frac{3}{5} \cdot 4^3 + 9\frac{9}{35} \cdot 4^2\right) - \left(\frac{27}{70} \cdot 3^4 - 3\frac{3}{5} \cdot 3^3 + 9\frac{9}{35} \cdot 3^2\right)$

$= \left(16\frac{16}{35}\right) - \left(17\frac{5}{14}\right) = -\frac{9}{10}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1,19 \cdot 10^3$	397	$-86\frac{2}{5}$
$-6\frac{1}{2}$	$-1000\frac{7}{20}$	354	$-81\frac{27}{35}$
-6	$-833\frac{1}{7}$	315	$-77\frac{1}{7}$
$-5\frac{1}{2}$	-685	277	$-72\frac{18}{35}$
-5	$-555\frac{3}{7}$	242	$-67\frac{31}{35}$
$-4\frac{1}{2}$	$-442\frac{17}{28}$	209	$-63\frac{9}{35}$
-4	$-345\frac{3}{5}$	179	$-58\frac{22}{35}$
$-3\frac{1}{2}$	$-263\frac{1}{4}$	151	-54
-3	$-194\frac{2}{5}$	125	$-49\frac{13}{35}$
$-2\frac{1}{2}$	$-137\frac{25}{28}$	101	$-44\frac{26}{35}$
-2	$-92\frac{4}{7}$	$80,2$	$-40\frac{4}{35}$
$-1\frac{1}{2}$	$-57,3$	$61,3$	$-35\frac{17}{35}$
-1	$-30\frac{6}{7}$	$44,7$	$-30\frac{6}{7}$
$-\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{20}$	$30,5$	$-26\frac{8}{35}$
0	0	$18,5$	$-21\frac{3}{5}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$18,5$	$-21\frac{3}{5}$
$\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$8,87$	$-16\frac{34}{35}$
1	$9\frac{9}{35}$	$1,54$	$-12\frac{12}{35}$
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{19}{28}$	$-3,47$	$-7\frac{5}{7}$
2	$6\frac{6}{35}$	$-6,17$	$-3\frac{3}{35}$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{25}{28}$	$-6,56$	$1\frac{19}{35}$
3	0	$-4,63$	$6\frac{6}{35}$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{20}$	$-0,385$	$10\frac{4}{5}$
4	0	$6,17$	$15\frac{3}{7}$
$4\frac{1}{2}$	$5,21$	15	$20\frac{2}{35}$
5	$15\frac{3}{7}$	$26,2$	$24\frac{24}{35}$
$5\frac{1}{2}$	$31\frac{23}{28}$	$39,7$	$29\frac{11}{35}$
6	$55\frac{19}{35}$	$55,5$	$33\frac{33}{35}$
$6\frac{1}{2}$	$87\frac{3}{4}$	$73,7$	$38\frac{4}{7}$
7	$129\frac{3}{5}$	$94,1$	$43\frac{1}{5}$

Aufgabe (28)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2x^3 + 6x^2 = -2x^2(x-3)$
$f'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$
$f''(x) = -12x + 12 = -12(x-1)$
$f'''(x) = -12$
$F(x) = \int(-2x^3 + 6x^2)dx = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-2 + \frac{6}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^3 + 6 \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2x^3 + 6x^2 = 0$
$x^2(-2x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -2x + 6 = 0$
$-2x + 6 = 0 \qquad / - 6$
$-2x = -6 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{-6}{-2}$
$x = 3$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 3[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -6x^2 + 12x = 0$
$x(-6x + 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6x + 12 = 0$
$-6x + 12 = 0 \qquad / - 12$
$-6x = -12 \qquad / : (-6)$
$x = \frac{-12}{-6}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/0)}$
$f''(2) = -12$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/8)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]0; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -12x + 12 = 0$

$-12x + 12 = 0 \qquad / -12$
$-12x = -12 \qquad / : (-12)$
$x = \frac{-12}{-12}$
$x = 1$
$x_5 = 1$; 1-fache Nullstelle
$f'''(1) = 4$
$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:(1/4)
• Kruemmung

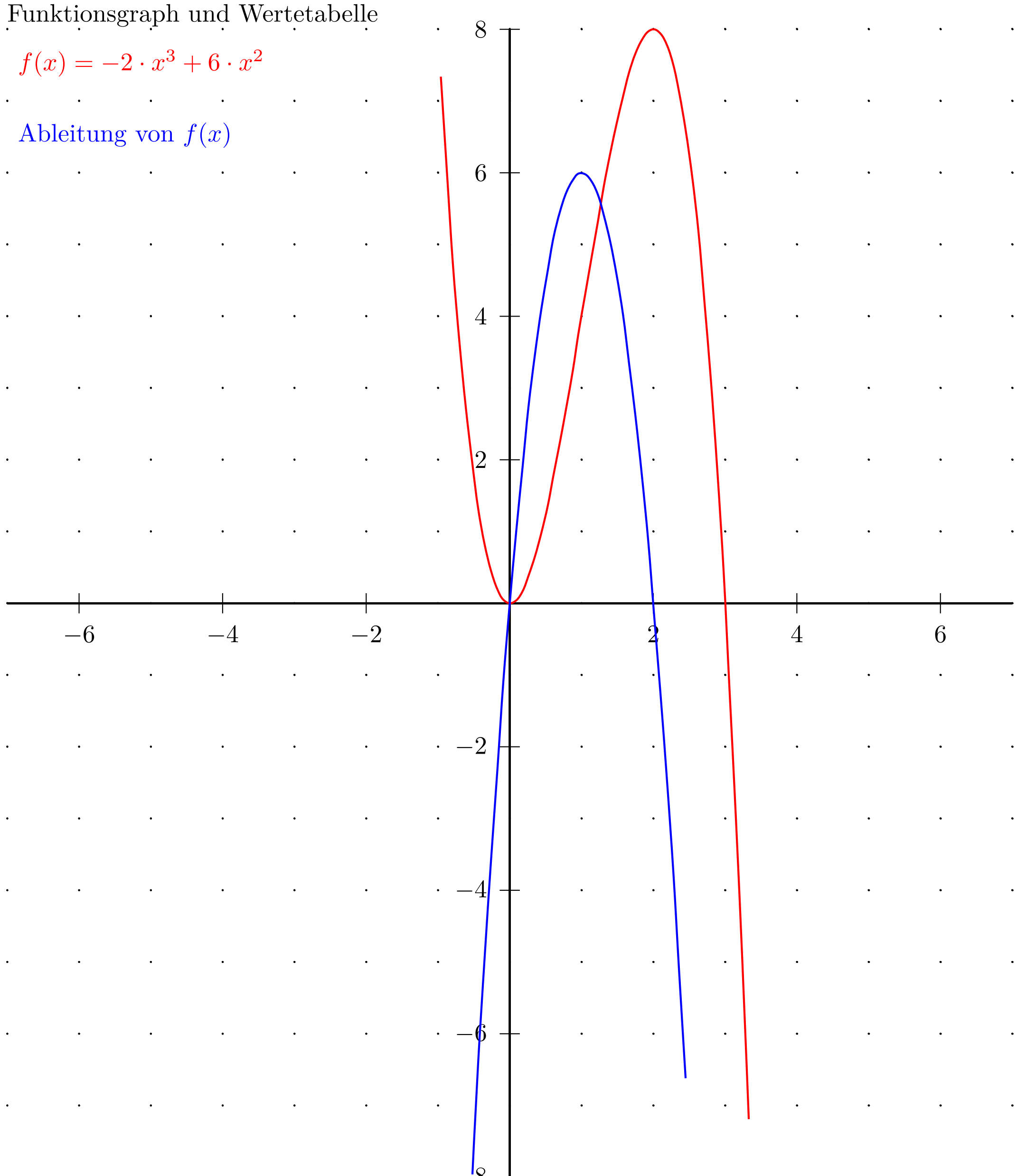
	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;1[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]1;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^3 \left(-2x^3 + 6x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3\right]_0^3$$
$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^3\right)$$
$$= \left(13\frac{1}{2}\right) - (0) = 13\frac{1}{2}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	980	-378	96
$-6\frac{1}{2}$	$802\frac{3}{4}$	-332	90
-6	648	-288	84
$-5\frac{1}{2}$	$514\frac{1}{4}$	-248	78
-5	400	-210	72
$-4\frac{1}{2}$	$303\frac{3}{4}$	-176	66
-4	224	-144	60
$-3\frac{1}{2}$	$159\frac{1}{4}$	-116	54
-3	108	-90	48
$-2\frac{1}{2}$	$68\frac{3}{4}$	$-67,5$	42
-2	40	-48	36
$-1\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	$-31,5$	30
-1	8	-18	24
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$-7,5$	18
0	0	$-0,000613$	12

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,000613$	12
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$4,5$	6
1	4	6	0
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$4,5$	-6
2	8	$-0,000612$	-12
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$-7,5$	-18
3	0	-18	-24
$3\frac{1}{2}$	$-12\frac{1}{4}$	$-31,5$	-30
4	-32	-48	-36
$4\frac{1}{2}$	$-60\frac{3}{4}$	$-67,5$	-42
5	-100	-90	-48
$5\frac{1}{2}$	$-151\frac{1}{4}$	-116	-54
6	-216	-144	-60
$6\frac{1}{2}$	$-295\frac{3}{4}$	-176	-66
7	-392	-210	-72

Aufgabe (29)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2x^3 + 6x^2 = -2x^2(x-3)$
$f'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$
$f''(x) = -12x + 12 = -12(x-1)$
$f'''(x) = -12$
$F(x) = \int(-2x^3 + 6x^2)dx = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-2 + \dfrac{6}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^3 + 6 \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2x^3 + 6x^2 = 0$
$x^2(-2x+6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -2x + 6 = 0$
$-2x + 6 = 0 \qquad / - 6$
$-2x = -6 \qquad / : (-2)$
$x = \dfrac{-6}{-2}$
$x = 3$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 3[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -6x^2 + 12x = 0$
$x(-6x + 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6x + 12 = 0$
$-6x + 12 = 0 \qquad / - 12$
$-6x = -12 \qquad / : (-6)$
$x = \dfrac{-12}{-6}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/0)}$
$f''(2) = -12$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/8)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]0; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -12x + 12 = 0$

$-12x + 12 = 0 \qquad / -12$
$-12x = -12 \qquad / : (-12)$
$x = \frac{-12}{-12}$
$x = 1$
$x_5 = 1; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f'''(1) = 4$
$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:(1/4)
• Kruemmung

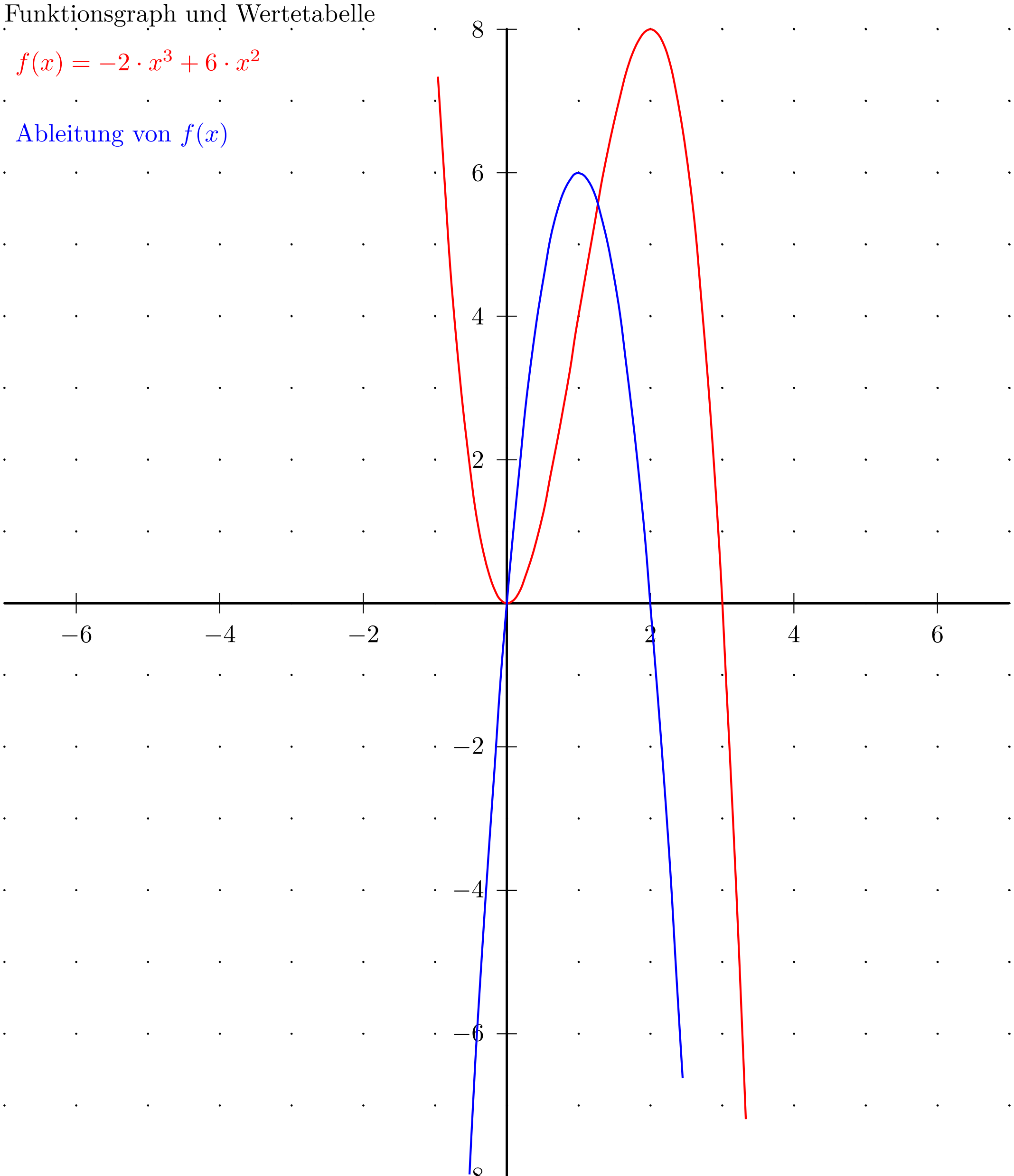
	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;1[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]1;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^3 \left(-2x^3 + 6x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3\right]_0^3$$
$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^3\right)$$
$$= \left(13\frac{1}{2}\right) - (0) = 13\frac{1}{2}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	980	-378	96
$-6\frac{1}{2}$	$802\frac{3}{4}$	-332	90
-6	648	-288	84
$-5\frac{1}{2}$	$514\frac{1}{4}$	-248	78
-5	400	-210	72
$-4\frac{1}{2}$	$303\frac{3}{4}$	-176	66
-4	224	-144	60
$-3\frac{1}{2}$	$159\frac{1}{4}$	-116	54
-3	108	-90	48
$-2\frac{1}{2}$	$68\frac{3}{4}$	$-67,5$	42
-2	40	-48	36
$-1\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	$-31,5$	30
-1	8	-18	24
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$-7,5$	18
0	0	$-0,000613$	12

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,000613$	12
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$4,5$	6
1	4	6	0
$1\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$4,5$	-6
2	8	$-0,000612$	-12
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$-7,5$	-18
3	0	-18	-24
$3\frac{1}{2}$	$-12\frac{1}{4}$	$-31,5$	-30
4	-32	-48	-36
$4\frac{1}{2}$	$-60\frac{3}{4}$	$-67,5$	-42
5	-100	-90	-48
$5\frac{1}{2}$	$-151\frac{1}{4}$	-116	-54
6	-216	-144	-60
$6\frac{1}{2}$	$-295\frac{3}{4}$	-176	-66
7	-392	-210	-72

Aufgabe (30)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x = 5\frac{2}{5}(x+3)(x+2)x$
$f'(x) = 16\frac{1}{5}x^2 + 54x + 32\frac{2}{5} = 16\frac{1}{5}(x+2,55)(x+0,785)$
$f''(x) = 32\frac{2}{5}x + 54 = 32\frac{2}{5}(x+1\frac{2}{3})$
$f'''(x) = 32\frac{2}{5}$
$F(x) = \int(5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x)dx = 1\frac{7}{20}x^4 + 9x^3 + 16\frac{1}{5}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(5\frac{2}{5} + \dfrac{27}{x} + \dfrac{32\frac{2}{5}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [5\frac{2}{5} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [5\frac{2}{5} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 5\frac{2}{5} \cdot (-x)^3 + 27 \cdot (-x)^2 + 32\frac{2}{5} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x = 0$
$x(5\frac{2}{5}x^2 + 27x + 32\frac{2}{5}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 5\frac{2}{5}x^2 + 27x + 32\frac{2}{5} = 0$

$5\frac{2}{5}x^2 + 27x + 32\frac{2}{5} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 5\frac{2}{5} \cdot 32\frac{2}{5}}}{2 \cdot 5\frac{2}{5}}$
$x_{1/2} = \dfrac{-27 \pm \sqrt{29\frac{4}{25}}}{10\frac{4}{5}}$
$x_{1/2} = \dfrac{-27 \pm 5\frac{2}{5}}{10\frac{4}{5}}$
$x_1 = \dfrac{-27 + 5\frac{2}{5}}{10\frac{4}{5}} \qquad x_2 = \dfrac{-27 - 5\frac{2}{5}}{10\frac{4}{5}}$
$x_1 = -2 \qquad x_2 = -3$
$\underline{x_1 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-3;-2[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-2;0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 16\dfrac{1}{5}x^2 + 54x + 32\dfrac{2}{5} = 0$

$16\dfrac{1}{5}x^2 + 54x + 32\dfrac{2}{5} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 16\frac{1}{5} \cdot 32\frac{2}{5}}}{2 \cdot 16\frac{1}{5}}$

$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{816\frac{12}{25}}}{32\frac{2}{5}}$
$x_{1/2} = \frac{-54 \pm 28,6}{32\frac{2}{5}}$
$x_1 = \frac{-54 + 28,6}{32\frac{2}{5}} \qquad x_2 = \frac{-54 - 28,6}{32\frac{2}{5}}$
$x_1 = -0,785 \qquad x_2 = -2,55$
$\underline{x_4 = -2,55; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = -0,785; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,55) = -28,6$
$f''(-2,55) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2,55/3,41)}$
$f''(-0,785) = 28,6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-0,785/-11,4)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,55$	$< x <$	$-0,785$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2,55[\quad \cup \quad]-0,785; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-2,55; -0,785[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 32\frac{2}{5}x + 54 = 0$

$32\frac{2}{5}x + 54 = 0 \qquad / - 54$
$32\frac{2}{5}x = -54 \qquad / : 32\frac{2}{5}$
$x = \frac{-54}{32\frac{2}{5}}$
$x = -1\frac{2}{3}$
$\underline{x_6 = -1\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1\frac{2}{3}) = -4$
$f'''(-1\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1\frac{2}{3}/-4)}$
• Kruemmung

	$x <$	$-1\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

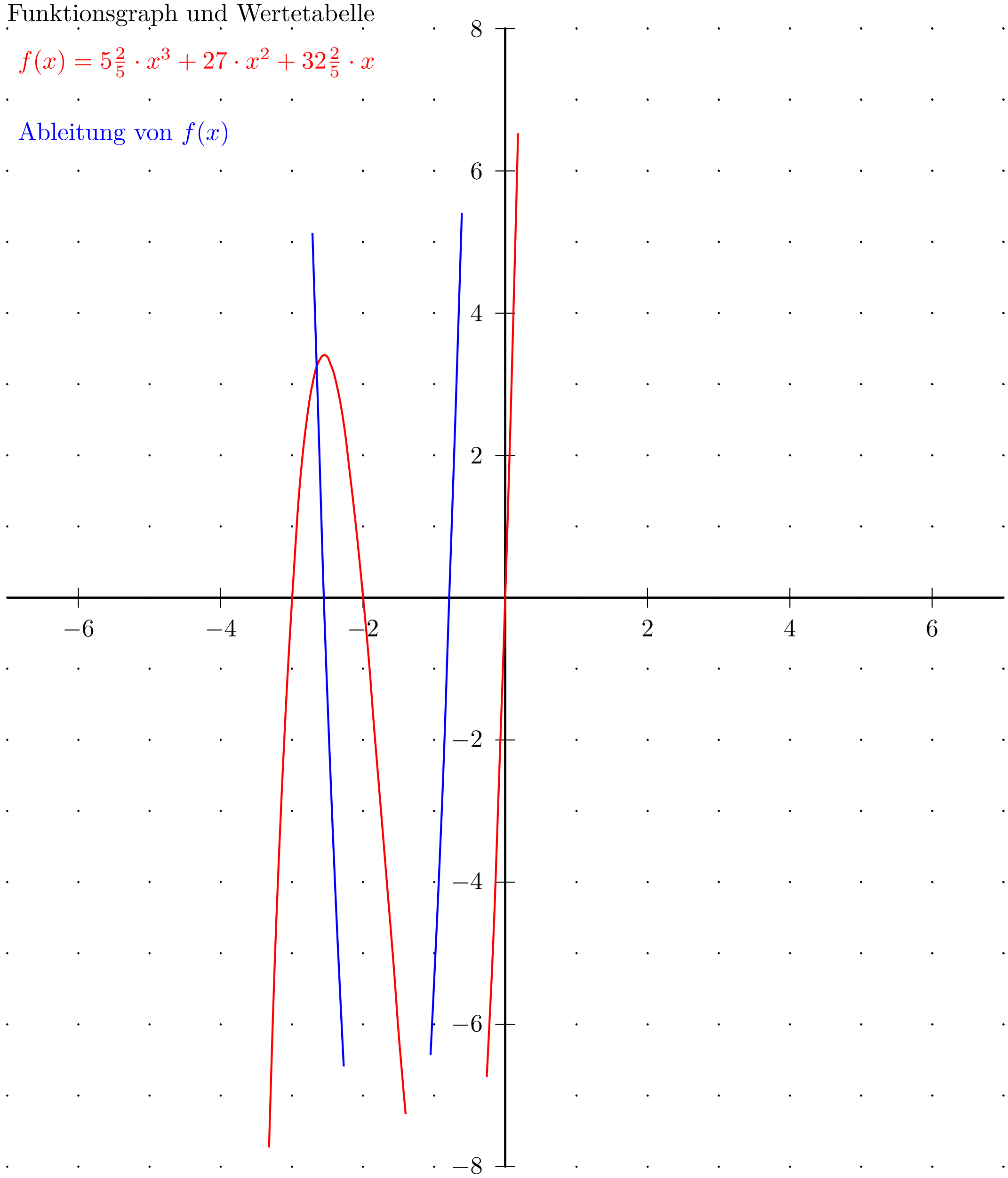
$\underline{x \in]-\infty; -1\frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-3}^{-2} \left(5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x\right) dx = \left[1\frac{7}{20}x^4 + 9x^3 + 16\frac{1}{5}x^2\right]_{-3}^{-2}$$
$$= \left(1\frac{7}{20} \cdot (-2)^4 + 9 \cdot (-2)^3 + 16\frac{1}{5} \cdot (-2)^2\right) - \left(1\frac{7}{20} \cdot (-3)^4 + 9 \cdot (-3)^3 + 16\frac{1}{5} \cdot (-3)^2\right)$$
$$= \left(14\frac{2}{5}\right) - \left(12\frac{3}{20}\right) = 2\frac{1}{4}$$
$$A = \int_{-2}^{0} \left(5\frac{2}{5}x^3 + 27x^2 + 32\frac{2}{5}x\right) dx = \left[1\frac{7}{20}x^4 + 9x^3 + 16\frac{1}{5}x^2\right]_{-2}^{0}$$

$= \left(1\frac{7}{20} \cdot 0^4 + 9 \cdot 0^3 + 16\frac{1}{5} \cdot 0^2\right) - \left(1\frac{7}{20} \cdot (-2)^4 + 9 \cdot (-2)^3 + 16\frac{1}{5} \cdot (-2)^2\right)$

$= (0) - \left(14\frac{2}{5}\right) = -14\frac{2}{5}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-756	448	$-172\frac{4}{5}$
$-6\frac{1}{2}$	$-552\frac{33}{40}$	366	$-156\frac{3}{5}$
-6	$-388\frac{4}{5}$	292	$-140\frac{2}{5}$
$-5\frac{1}{2}$	$-259\frac{7}{8}$	225	$-124\frac{1}{5}$
-5	-162	167	-108
$-4\frac{1}{2}$	$-91\frac{1}{8}$	117	$-91\frac{4}{5}$
-4	$-43\frac{1}{5}$	$75,6$	$-75\frac{3}{5}$
$-3\frac{1}{2}$	$-14\frac{7}{40}$	$41,9$	$-59\frac{2}{5}$
-3	0	$16,2$	$-43\frac{1}{5}$
$-2\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$-1,35$	-27
-2	0	$-10,8$	$-10\frac{4}{5}$
$-1\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{40}$	$-12,1$	$5\frac{2}{5}$
-1	$-10\frac{4}{5}$	$-5,4$	$21\frac{3}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$9,45$	$37\frac{4}{5}$
0	0	$32,4$	54

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$32,4$	54
$\frac{1}{2}$	$23\frac{5}{8}$	$63,5$	$70\frac{1}{5}$
1	$64\frac{4}{5}$	103	$86\frac{2}{5}$
$1\frac{1}{2}$	$127\frac{23}{40}$	150	$102\frac{3}{5}$
2	216	205	$118\frac{4}{5}$
$2\frac{1}{2}$	$334\frac{1}{8}$	269	135
3	486	340	$151\frac{1}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$675\frac{27}{40}$	420	$167\frac{2}{5}$
4	$907\frac{1}{5}$	508	$183\frac{3}{5}$
$4\frac{1}{2}$	$1184\frac{5}{8}$	603	$199\frac{4}{5}$
5	$1,51 \cdot 10^3$	707	216
$5\frac{1}{2}$	$1893\frac{3}{8}$	819	$232\frac{1}{5}$
6	$2332\frac{4}{5}$	940	$248\frac{2}{5}$
$6\frac{1}{2}$	$2834\frac{13}{40}$	$1,07 \cdot 10^3$	$264\frac{3}{5}$
7	$3,4 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^3$	$280\frac{4}{5}$

Aufgabe (31)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(x+1)x(x-4)$
$f'(x) = x^2 - 2x - 1\frac{1}{3} = (x+0,528)(x-2,53)$
$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$
$f'''(x) = 2$
$F(x) = \int(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x)dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1\frac{1}{3}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{3} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{3} \cdot (-x)^3 - 1 \cdot (-x)^2 - 1\frac{1}{3} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x = 0$
$x(\frac{1}{3}x^2 - x - 1\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{3}x^2 - x - 1\frac{1}{3} = 0$

$\frac{1}{3}x^2 - x - 1\frac{1}{3} = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1\frac{1}{3})}}{2 \cdot \frac{1}{3}}$$
$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{2\frac{7}{9}}}{\frac{2}{3}}$$
$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 1\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$$
$$x_1 = \frac{1 + 1\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \frac{1 - 1\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]0;4[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = x^2 - 2x - 1\frac{1}{3} = 0$

$1x^2 - 2x - 1\frac{1}{3} = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1\frac{1}{3})}}{2 \cdot 1}$$

$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{9\frac{1}{3}}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{2 \pm 3,06}{2}$
$x_1 = \frac{2 + 3,06}{2} \qquad x_2 = \frac{2 - 3,06}{2}$
$x_1 = 2,53 \qquad x_2 = -0,528$
$\underline{x_4 = -0,528; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 2,53; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-0,528) = -3,06$
$f''(-0,528) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,528/0,376)}$
$f''(2,53) = 3,06 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2,53/-4,38)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-0,528$	$< x <$	$2,53$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -0,528[\quad \cup \quad]2,53; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-0,528; 2,53[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 2x - 2 = 0$

$2x - 2 = 0 \qquad / + 2$
$2x = 2 \qquad / : 2$
$x = \frac{2}{2}$
$x = 1$
$\underline{x_6 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(1) = -2$
$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1/-2)}$
• Kruemmung

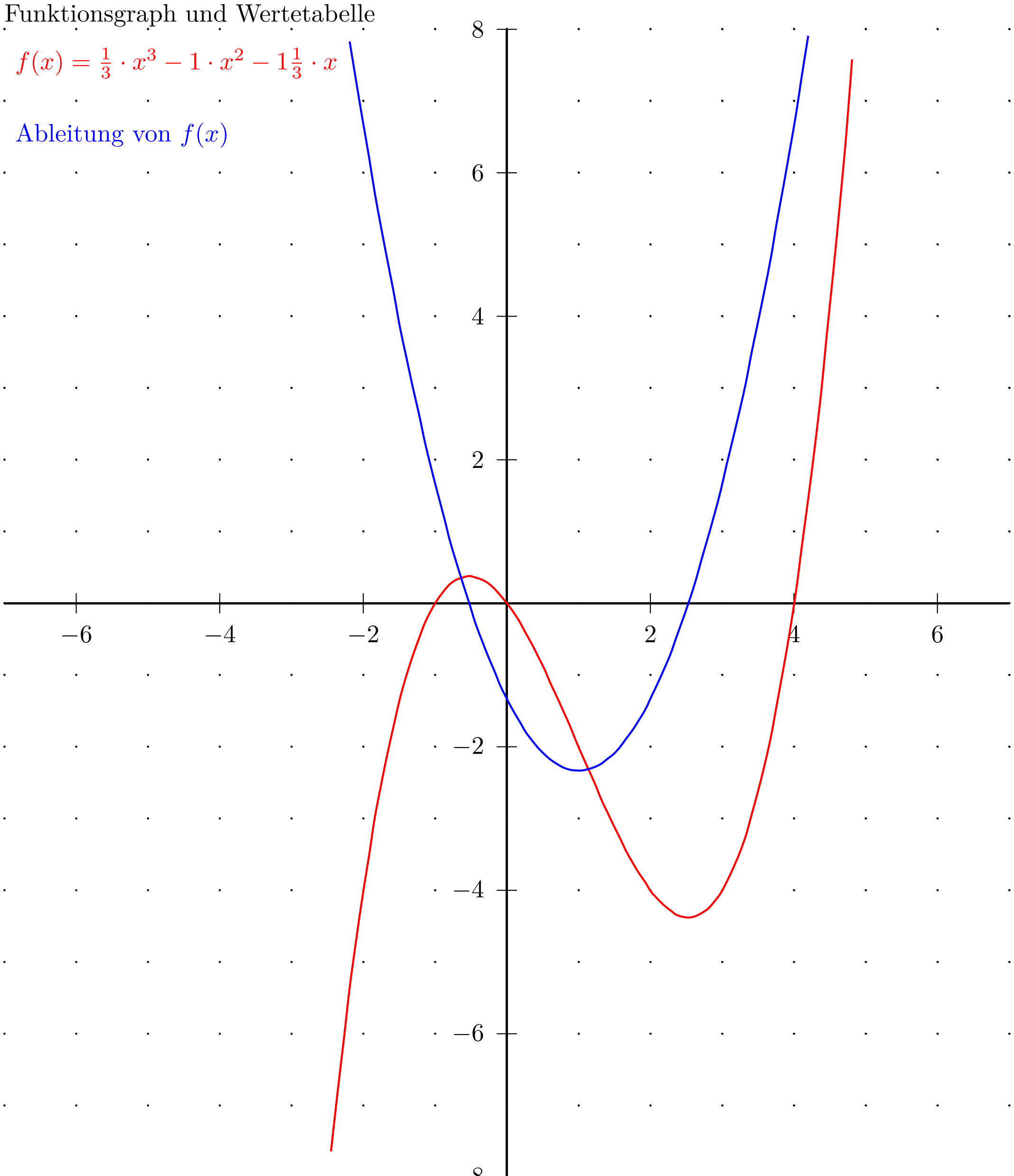
	$x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; 1[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right]_{-1}^{0}$
$= \left(\frac{1}{12} \cdot 0^4 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{2}{3} \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^2\right)$
$= (0) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$
$A = \int_{0}^{4} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{3}x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right]_{0}^{4}$
$= \left(\frac{1}{12} \cdot 4^4 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{2}{3} \cdot 4^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot 0^4 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{2}{3} \cdot 0^2\right)$
$= \left(-10\frac{2}{3}\right) - (0) = -10\frac{2}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-154	$61,7$	-16
$-6\frac{1}{2}$	$-125\frac{1}{8}$	$53,9$	-15
-6	-100	$46,7$	-14
$-5\frac{1}{2}$	$-78\frac{3}{8}$	$39,9$	-13
-5	-60	$33,7$	-12
$-4\frac{1}{2}$	$-44\frac{5}{8}$	$27,9$	-11
-4	-32	$22,7$	-10
$-3\frac{1}{2}$	$-21\frac{7}{8}$	$17,9$	-9
-3	-14	$13,7$	-8
$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{8}$	$9,92$	-7
-2	-4	$6,67$	-6
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{8}$	$3,92$	-5
-1	0	$1,67$	-4
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$-0,0832$	-3
0	0	$-1,33$	-2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-1,33$	-2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	$-2,08$	-1
1	-2	$-2,33$	0
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{8}$	$-2,08$	1
2	-4	$-1,33$	2
$2\frac{1}{2}$	$-4\frac{3}{8}$	$-0,0832$	3
3	-4	$1,67$	4
$3\frac{1}{2}$	$-2\frac{5}{8}$	$3,92$	5
4	0	$6,67$	6
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{8}$	$9,92$	7
5	10	$13,7$	8
$5\frac{1}{2}$	$17\frac{7}{8}$	$17,9$	9
6	28	$22,7$	10
$6\frac{1}{2}$	$40\frac{5}{8}$	$27,9$	11
7	56	$33,7$	12

Aufgabe (32)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35} = -0,096(x+4,02)(x+2)(x-4,01)$
$f'(x) = -0,288x^2 - 0,386x + 1\frac{19}{35} = -0,288(x+3,08)(x-1,74)$
$f''(x) = -0,576x - 0,386 = -0,576(x+0,67)$
$f'''(x) = -0,576$
$F(x) = \int(-0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35})dx = -0,024x^4 - 0,0643x^3 + \frac{27}{35}x^2 + 3\frac{3}{35}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-0,096 - \frac{0,193}{x} + \frac{1\frac{19}{35}}{x^2} + \frac{3\frac{3}{35}}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-0,096 \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-0,096 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -0,096 \cdot (-x)^3 - 0,193 \cdot (-x)^2 + 1\frac{19}{35} \cdot (-x) + 3\frac{3}{35}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35} = 0$

$-0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35} = 0$
$Numerische Suche:$
$\underline{x_1 = -4,02; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 4,01; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-4,02$	$< x <$	-2	$< x <$	$4,01$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -4,02[\quad \cup \quad]-2; 4,01[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-4,02; -2[\quad \cup \quad]4,01; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -0,288x^2 - 0,386x + 1\frac{19}{35} = 0$

$-0,288x^2 - 0,386x + 1\frac{19}{35} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+0,386 \pm \sqrt{(-0,386)^2 - 4 \cdot (-0,288) \cdot 1\frac{19}{35}}}{2 \cdot (-0,288)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+0,386 \pm \sqrt{1,93}}{-0,576}$$

$$x_{1/2} = \frac{0,386 \pm 1,39}{-0,576}$$

$$x_1 = \frac{0,386 + 1,39}{-0,576} \qquad x_2 = \frac{0,386 - 1,39}{-0,576}$$

$x_1 = -3,08 \qquad x_2 = 1,74$
$\underline{x_4 = -3,08; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1,74; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-3,08) = 1,39 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-3,08/-0,692)}$
$f''(1,74) = -1,39$
$f''(1,74) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,74/4,68)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-3,08$	$< x <$	$1,74$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-3,08;1,74[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;-3,08[\quad \cup \quad]1,74;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = -0,576x - 0,386 = 0$

$-0,576x - 0,386 = 0 \qquad / + 0,386$

$-0,576x = 0,386 \qquad / : (-0,576)$

$x = \dfrac{0,386}{-0,576}$

$x = -0,67$

$x_6 = -0,67; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f'''(-0,67) = 1,99$

$f'''(-0,67) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(-0,67/1,99)$

• Kruemmung

	$x <$	$-0,67$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;-0,67[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-0,67;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-4,02}^{-2} \left(-0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35}\right) dx = \left[-0,024x^4 - 0,0643x^3 + \frac{27}{35}x^2 + 3\frac{3}{35}x\right]_{-4,02}^{-2}$$

$$= \left(-0,024 \cdot (-2)^4 - 0,0643 \cdot (-2)^3 + \frac{27}{35} \cdot (-2)^2 + 3\frac{3}{35} \cdot (-2)\right) - \left(-0,024 \cdot (-4,02)^4 - 0,0643 \cdot (-4,02)^3 + \frac{27}{35} \cdot (-4,02)^2 + 3\frac{3}{35}\right.$$

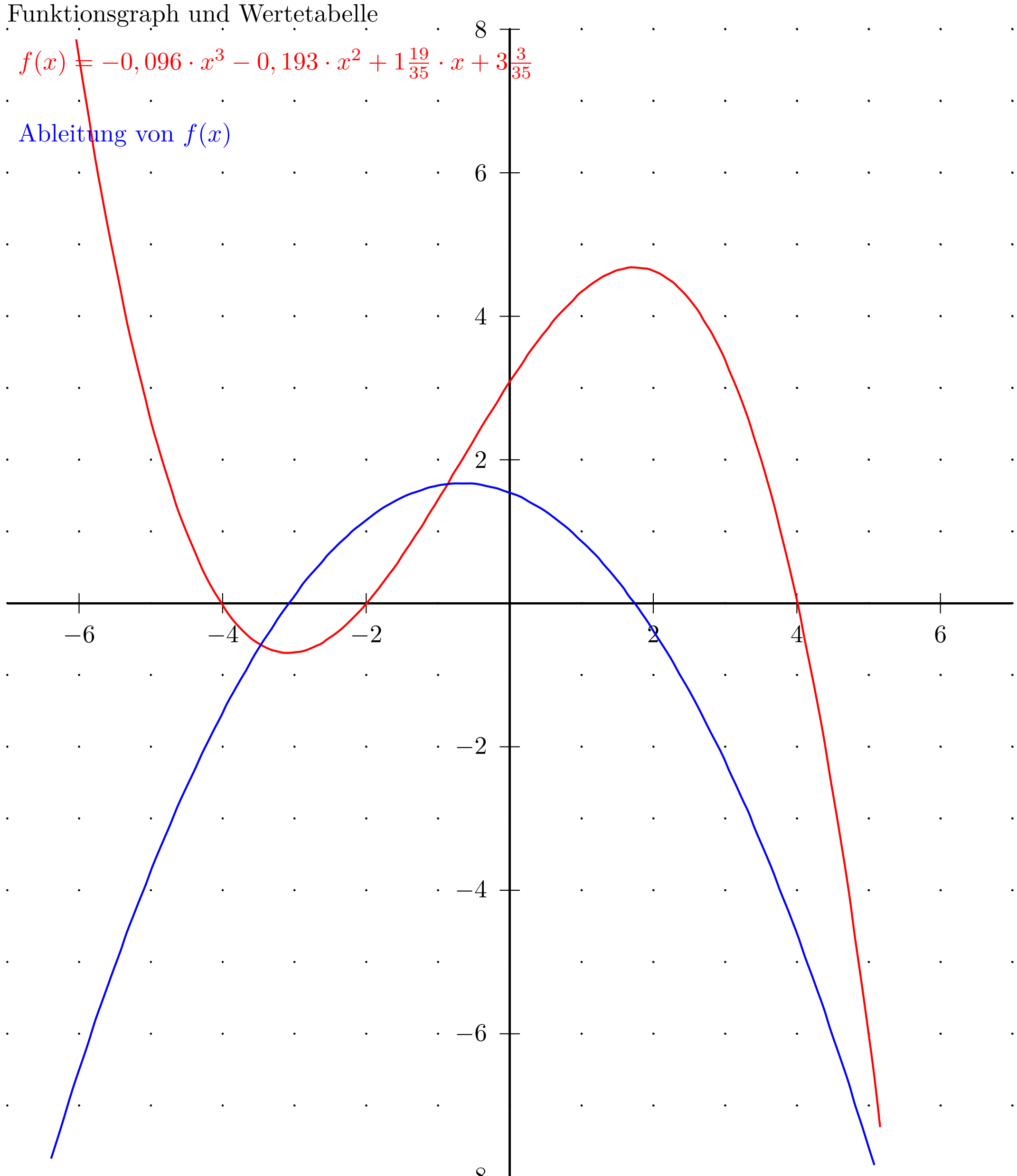
$$= (-2,96) - (-2,03) = -0,929$$

$$A = \int_{-2}^{4,01} \left(-0,096x^3 - 0,193x^2 + 1\frac{19}{35}x + 3\frac{3}{35}\right) dx = \left[-0,024x^4 - 0,0643x^3 + \frac{27}{35}x^2 + 3\frac{3}{35}x\right]_{-2}^{4,01}$$

$$= \left(-0,024 \cdot 4,01^4 - 0,0643 \cdot 4,01^3 + \frac{27}{35} \cdot 4,01^2 + 3\frac{3}{35} \cdot 4,01\right) - \left(-0,024 \cdot (-2)^4 - 0,0643 \cdot (-2)^3 + \frac{27}{35} \cdot (-2)^2 + 3\frac{3}{35} \cdot (-2)\right)$$

$$= (14,4) - (-2,96) = 17,4$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$15,8$	$-9,87$	$3,65$
$-6\frac{1}{2}$	$11,3$	$-8,12$	$3,36$
-6	$7,62$	$-6,51$	$3,07$
$-5\frac{1}{2}$	$4,73$	$-5,05$	$2,78$
-5	$2,55$	$-3,73$	$2,49$
$-4\frac{1}{2}$	$0,983$	$-2,55$	$2,21$
-4	$-0,0297$	$-1,52$	$1,92$
$-3\frac{1}{2}$	$-0,563$	$-0,634$	$1,63$
-3	$-0,688$	$0,109$	$1,34$
$-2\frac{1}{2}$	$-0,478$	$0,708$	$1,05$
-2	$-0,004$	$1,16$	$0,766$
$-1\frac{1}{2}$	$0,661$	$1,47$	$0,478$
-1	$1,45$	$1,64$	$0,19$
$-\frac{1}{2}$	$2,28$	$1,66$	$-0,098$
0	$3\frac{3}{35}$	$1,54$	$-0,386$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$3\frac{3}{35}$	$1,54$	$-0,386$
$\frac{1}{2}$	$3,8$	$1,28$	$-0,674$
1	$4,34$	$0,869$	$-0,962$
$1\frac{1}{2}$	$4,64$	$0,316$	$-1\frac{1}{4}$
2	$4,63$	$-0,381$	$-1,54$
$2\frac{1}{2}$	$4,24$	$-1,22$	$-1,83$
3	$3,39$	$-2,21$	$-2,11$
$3\frac{1}{2}$	$2,01$	$-3,34$	$-2,4$
4	$0,0251$	$-4,61$	$-2,69$
$4\frac{1}{2}$	$-2,63$	$-6,03$	$-2,98$
5	$-6\frac{1}{40}$	$-7,59$	$-3,27$
$5\frac{1}{2}$	$-10,2$	$-9,29$	$-3,55$
6	$-15,3$	$-11,1$	$-3,84$
$6\frac{1}{2}$	$-21,4$	$-13,1$	$-4,13$
7	$-28,5$	$-15,3$	$-4,42$

Aufgabe (33)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28} = -\frac{27}{56}(x+3)(x+1)(x-2)$
$f'(x) = -1\frac{25}{56}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 2\frac{23}{56} = -1\frac{25}{56}(x+2,12)(x-0,786)$
$f''(x) = -2\frac{25}{28}x - 1\frac{13}{14} = -2\frac{25}{28}(x+\frac{2}{3})$
$f'''(x) = -2\frac{25}{28}$
$F(x) = \int(-\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28})dx = -0,121x^4 - \frac{9}{28}x^3 + 1,21x^2 + 2\frac{25}{28}x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-\frac{27}{56} - \frac{\frac{27}{28}}{x} + \frac{2\frac{23}{56}}{x^2} + \frac{2\frac{25}{28}}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{27}{56}\cdot\infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{27}{56}\cdot(-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{27}{56}\cdot(-x)^3 - \frac{27}{28}\cdot(-x)^2 + 2\frac{23}{56}\cdot(-x) + 2\frac{25}{28}$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28} = 0$

$-\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28} = 0$
$Numerische Suche:$
$x_1 = -3$; 1-fache Nullstelle
$x_2 = -1$; 1-fache Nullstelle
$x_3 = 2$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;-3[\;\cup\;]-1;2[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3;-1[\;\cup\;]2;\infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -1\frac{25}{56}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 2\frac{23}{56} = 0$

$-1\frac{25}{56}x^2 - 1\frac{13}{14}x + 2\frac{23}{56} = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{13}{14} \pm \sqrt{\left(-1\frac{13}{14}\right)^2 - 4\cdot\left(-1\frac{25}{56}\right)\cdot 2\frac{23}{56}}}{2\cdot\left(-1\frac{25}{56}\right)}$$
$$x_{1/2} = \frac{+1\frac{13}{14} \pm \sqrt{17,7}}{-2\frac{25}{28}}$$
$$x_{1/2} = \frac{1\frac{13}{14} \pm 4,2}{-2\frac{25}{28}}$$
$$x_1 = \frac{1\frac{13}{14} + 4,2}{-2\frac{25}{28}} \qquad x_2 = \frac{1\frac{13}{14} - 4,2}{-2\frac{25}{28}}$$
$x_1 = -2,12 \qquad x_2 = 0,786$
$x_4 = -2,12$; 1-fache Nullstelle
$x_5 = 0,786$; 1-fache Nullstelle
$f''(-2,12) = 4,2 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(-2,12/-1,96)$
$f''(0,786) = -4,2$

$f''(0,786) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(0,786/3,96)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,12$	$< x <$	$0,786$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2,12;0,786[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;-2,12[\quad \cup \quad]0,786;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = -2\frac{25}{28}x - 1\frac{13}{14} = 0$

$-2\frac{25}{28}x - 1\frac{13}{14} = 0 \qquad / + 1\frac{13}{14}$

$-2\frac{25}{28}x = 1\frac{13}{14} \qquad / : \left(-2\frac{25}{28}\right)$

$x = \frac{1\frac{13}{14}}{-2\frac{25}{28}}$

$x = -\frac{2}{3}$

$x_6 = -\frac{2}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f'''(-\frac{2}{3}) = 1$

$f'''(-\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(-\frac{2}{3}/1)$

• Kruemmung

	$x <$	$-\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;-\frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\frac{2}{3};\infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(-\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28}\right) dx = \left[-0,121x^4 - \frac{9}{28}x^3 + 1,21x^2 + 2\frac{25}{28}x\right]_{-3}^{-1}$$

$$= \left(-0,121 \cdot (-1)^4 - \frac{9}{28} \cdot (-1)^3 + 1,21 \cdot (-1)^2 + 2\frac{25}{28} \cdot (-1)\right) - \left(-0,121 \cdot (-3)^4 - \frac{9}{28} \cdot (-3)^3 + 1,21 \cdot (-3)^2 + 2\frac{25}{28} \cdot (-3)\right)$$

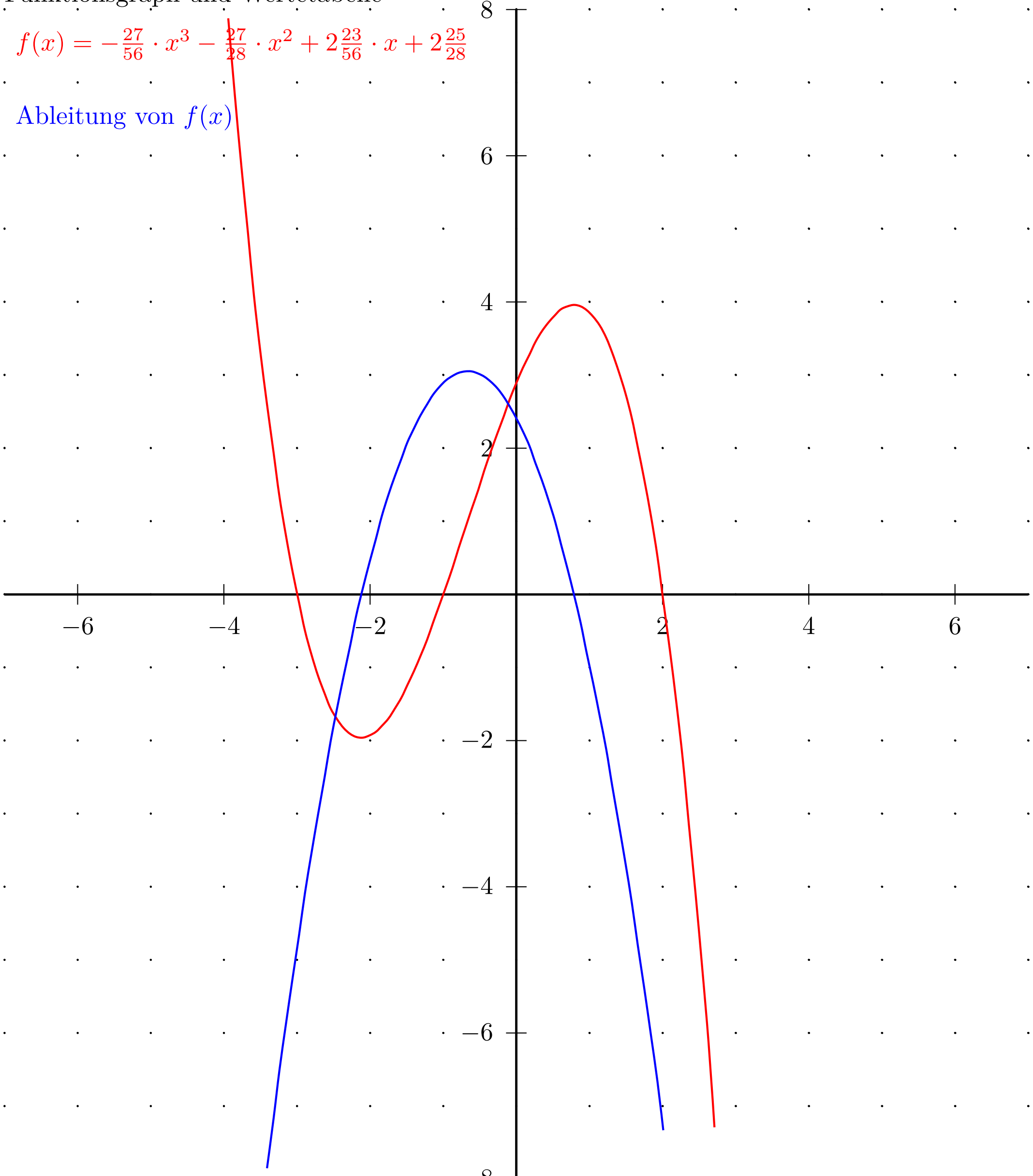
$$= (-1,49) - (1,08) = -2\frac{4}{7}$$

$$A = \int_{-1}^{2} \left(-\frac{27}{56}x^3 - \frac{27}{28}x^2 + 2\frac{23}{56}x + 2\frac{25}{28}\right) dx = \left[-0,121x^4 - \frac{9}{28}x^3 + 1,21x^2 + 2\frac{25}{28}x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-0,121 \cdot 2^4 - \frac{9}{28} \cdot 2^3 + 1,21 \cdot 2^2 + 2\frac{25}{28} \cdot 2\right) - \left(-0,121 \cdot (-1)^4 - \frac{9}{28} \cdot (-1)^3 + 1,21 \cdot (-1)^2 + 2\frac{25}{28} \cdot (-1)\right)$$

$$= \left(6\frac{3}{28}\right) - (-1,49) = 7\frac{19}{32}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$104\frac{1}{7}$	-55	$18\frac{9}{28}$
$-6\frac{1}{2}$	$78\frac{57}{64}$	$-46,2$	$16\frac{7}{8}$
-6	$57\frac{6}{7}$	$-38,1$	$15\frac{3}{7}$
$-5\frac{1}{2}$	$40,7$	$-30,7$	$13\frac{55}{56}$
-5	27	$-24,1$	$12\frac{15}{28}$
$-4\frac{1}{2}$	$16\frac{29}{64}$	$-18,2$	$11\frac{5}{56}$
-4	$8\frac{19}{28}$	-13	$9\frac{9}{14}$
$-3\frac{1}{2}$	$3,31$	$-8,56$	$8\frac{11}{56}$
-3	0	$-4,82$	$6\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$-1,63$	$-1,81$	$5\frac{17}{56}$
-2	$-1\frac{13}{14}$	$0,482$	$3\frac{6}{7}$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{17}{64}$	$2,05$	$2\frac{23}{56}$
-1	0	$2,89$	$\frac{27}{28}$
$-\frac{1}{2}$	$1,51$	$3,01$	$-\frac{27}{56}$
0	$2\frac{25}{28}$	$2,41$	$-1\frac{13}{14}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$2\frac{25}{28}$	$2,41$	$-1\frac{13}{14}$
$\frac{1}{2}$	$3\frac{51}{64}$	$1,08$	$-3\frac{3}{8}$
1	$3\frac{6}{7}$	$-0,964$	$-4\frac{23}{28}$
$1\frac{1}{2}$	$2,71$	$-3,74$	$-6\frac{15}{56}$
2	0	$-7,23$	$-7\frac{5}{7}$
$2\frac{1}{2}$	$-4\frac{41}{64}$	$-11,5$	$-9\frac{9}{56}$
3	$-11\frac{4}{7}$	$-16,4$	$-10\frac{17}{28}$
$3\frac{1}{2}$	$-21,2$	$-22,1$	$-12\frac{3}{56}$
4	$-33\frac{3}{4}$	$-28,4$	$-13\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{2}$	$-49,7$	$-35,6$	$-14\frac{53}{56}$
5	$-69\frac{3}{7}$	$-43,4$	$-16\frac{11}{28}$
$5\frac{1}{2}$	$-93\frac{15}{64}$	-52	$-17\frac{47}{56}$
6	$-121\frac{1}{2}$	$-61,2$	$-19\frac{2}{7}$
$6\frac{1}{2}$	-155	$-71,2$	$-20\frac{41}{56}$
7	$-192\frac{6}{7}$	-82	$-22\frac{5}{28}$

Aufgabe (34)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54 = -13\frac{1}{2}(x+2)^2(x+1)$
$f'(x) = -40\frac{1}{2}x^2 - 135x - 108 = -40\frac{1}{2}(x+2)(x+1\frac{1}{3})$
$f''(x) = -81x - 135 = -81(x+1\frac{2}{3})$
$f'''(x) = -81$
$F(x) = \int(-13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54)dx = -3\frac{3}{8}x^4 - 22\frac{1}{2}x^3 - 54x^2 - 54x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(-13\frac{1}{2} - \frac{67\frac{1}{2}}{x} - \frac{108}{x^2} - \frac{54}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-13\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-13\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -13\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - 67\frac{1}{2} \cdot (-x)^2 - 108 \cdot (-x) - 54$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54 = 0$

$-13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{llll}
(-13\frac{1}{2}x^3 & -67\frac{1}{2}x^2 & -108x & -54 \quad) : (x+1) = -13\frac{1}{2}x^2 - 54x - 54 \\
-(-13\frac{1}{2}x^3 & -13\frac{1}{2}x^2) & & \\
\hline
 & -54x^2 & -108x & -54 \\
 & -(-54x^2 & -54x) & \\
\hline
 & & -54x & -54 \\
 & & -(-54x & -54) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$-13\frac{1}{2}x^2 - 54x - 54 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+54 \pm \sqrt{(-54)^2 - 4 \cdot \left(-13\frac{1}{2}\right) \cdot (-54)}}{2 \cdot \left(-13\frac{1}{2}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+54 \pm \sqrt{0}}{-27}$$

$$x_{1/2} = \frac{54 \pm 0}{-27}$$

$x_1 = \frac{54 + 0}{-27}$ $\qquad x_2 = \frac{54 - 0}{-27}$
$x_1 = -2$ $\qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; -1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -40\frac{1}{2}x^2 - 135x - 108 = 0$

$-40\frac{1}{2}x^2 - 135x - 108 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+135 \pm \sqrt{(-135)^2 - 4 \cdot \left(-40\frac{1}{2}\right) \cdot (-108)}}{2 \cdot \left(-40\frac{1}{2}\right)}$

$x_{1/2} = \frac{+135 \pm \sqrt{729}}{-81}$

$x_{1/2} = \frac{135 \pm 27}{-81}$

$x_1 = \frac{135 + 27}{-81} \qquad x_2 = \frac{135 - 27}{-81}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1\frac{1}{3}$

$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = -1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-2) = 27 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2/0)}$

$f''(-1\frac{1}{3}) = -27$

$f''(-1\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1\frac{1}{3}/2)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x <$	$-1\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-2; -1\frac{1}{3}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-1\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = -81x - 135 = 0$

$-81x - 135 = 0 \qquad / + 135$

$-81x = 135 \qquad / : (-81)$

$x = \frac{135}{-81}$

$x = -1\frac{2}{3}$

$\underline{x_5 = -1\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-1\frac{2}{3}) = 1$

$f'''(-1\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1\frac{2}{3}/1)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-1\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1\frac{2}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-1\frac{2}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-2}^{-1} \left(-13\frac{1}{2}x^3 - 67\frac{1}{2}x^2 - 108x - 54\right) dx = \left[-3\frac{3}{8}x^4 - 22\frac{1}{2}x^3 - 54x^2 - 54x\right]_{-2}^{-1}$

$$= \left(-3\frac{3}{8} \cdot (-1)^4 - 22\frac{1}{2} \cdot (-1)^3 - 54 \cdot (-1)^2 - 54 \cdot (-1)\right) - \left(-3\frac{3}{8} \cdot (-2)^4 - 22\frac{1}{2} \cdot (-2)^3 - 54 \cdot (-2)^2 - 54 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(19\frac{1}{8}\right) - (18) = 1\frac{1}{8}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2,03 \cdot 10^3$	$-1,15 \cdot 10^3$	432
$-6\frac{1}{2}$	$1503\frac{9}{16}$	-942	$391\frac{1}{2}$
-6	$1,08 \cdot 10^3$	-756	351
$-5\frac{1}{2}$	$744\frac{3}{16}$	-591	$310\frac{1}{2}$
-5	486	-446	270
$-4\frac{1}{2}$	$295\frac{5}{16}$	-321	$229\frac{1}{2}$
-4	162	-216	189
$-3\frac{1}{2}$	$75\frac{15}{16}$	-132	$148\frac{1}{2}$
-3	27	$-67,5$	108
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{16}$	$-23,6$	$67\frac{1}{2}$
-2	0	$-0,00413$	27
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{16}$	$3,37$	$-13\frac{1}{2}$
-1	0	$-13,5$	-54
$-\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{16}$	$-50,6$	$-94\frac{1}{2}$
0	-54	-108	-135

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-54	-108	-135
$\frac{1}{2}$	$-126\frac{9}{16}$	-186	$-175\frac{1}{2}$
1	-243	-284	-216
$1\frac{1}{2}$	$-413\frac{7}{16}$	-402	$-256\frac{1}{2}$
2	-648	-540	-297
$2\frac{1}{2}$	$-956\frac{13}{16}$	-699	$-337\frac{1}{2}$
3	$-1,35 \cdot 10^3$	-878	-378
$3\frac{1}{2}$	$-1837\frac{11}{16}$	$-1,08 \cdot 10^3$	$-418\frac{1}{2}$
4	$-2,43 \cdot 10^3$	$-1,3 \cdot 10^3$	-459
$4\frac{1}{2}$	$-3137\frac{1}{16}$	$-1,54 \cdot 10^3$	$-499\frac{1}{2}$
5	$-3,97 \cdot 10^3$	$-1,8 \cdot 10^3$	-540
$5\frac{1}{2}$	$-4935\frac{15}{16}$	$-2,08 \cdot 10^3$	$-580\frac{1}{2}$
6	$-6,05 \cdot 10^3$	$-2,38 \cdot 10^3$	-621
$6\frac{1}{2}$	$-7315\frac{5}{16}$	$-2,7 \cdot 10^3$	$-661\frac{1}{2}$
7	$-8,75 \cdot 10^3$	$-3,04 \cdot 10^3$	-702

Aufgabe (35)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 = \frac{1}{18}(x+3)(x-6)^2$
$f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - x = \frac{1}{6}x(x-6)$
$f''(x) = \frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{3}(x-3)$
$f'''(x) = \frac{1}{3}$
$F(x) = \int(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6)dx = \frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(\frac{1}{18} - \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{6}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{18} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{18} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{18} \cdot (-x)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + 6$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 = 0$

$\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 = 0$
$Numerische Suche:$
$\underline{x_1 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 6;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x<$	-3	$<x<$	6	$<x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-3;6[\quad \cup \quad]6;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - x = 0$
$x(\frac{1}{6}x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{6}x - 1 = 0$
$\frac{1}{6}x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$\frac{1}{6}x = 1 \qquad / : \frac{1}{6}$
$x = \frac{1}{\frac{1}{6}}$
$x = 6$
$\underline{x_3 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 6;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -1$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/6)}$
$f''(6) = 1 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(6/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x<$	0	$<x<$	6	$<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]6;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]0;6[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = \frac{1}{3}x - 1 = 0$

$\frac{1}{3}x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$\frac{1}{3}x = 1 \qquad / : \frac{1}{3}$
$x = \frac{1}{\frac{1}{3}}$
$x = 3$
$\underline{x_5 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(3) = 3$
$f'''(3) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(3/3)}$
• Kruemmung

	$x <$	3	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]3; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 3[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-3}^{6} \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 \right) dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x \right]_{-3}^{6}$
$= \left(\frac{1}{72} \cdot 6^4 - \frac{1}{6} \cdot 6^3 + 6 \cdot 6 \right) - \left(\frac{1}{72} \cdot (-3)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3) \right)$
$= (18) - \left(-12\frac{3}{8} \right) = 30\frac{3}{8}$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-37\frac{5}{9}$	$15,2$	$-3\frac{1}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$-30,4$	$13,5$	$-3\frac{1}{6}$
-6	-24	12	-3
$-5\frac{1}{2}$	$-18,4$	$10,5$	$-2\frac{5}{6}$
-5	$-13\frac{4}{9}$	$9,17$	$-2\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$-9\frac{3}{16}$	$7,88$	$-2\frac{1}{2}$
-4	$-5\frac{5}{9}$	$6,67$	$-2\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$-2,51$	$5,54$	$-2\frac{1}{6}$
-3	0	$4,5$	-2
$-2\frac{1}{2}$	$2,01$	$3,54$	$-1\frac{5}{6}$
-2	$3\frac{5}{9}$	$2,67$	$-1\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$1,88$	$-1\frac{1}{2}$
-1	$5\frac{4}{9}$	$1,17$	$-1\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$5,87$	$0,542$	$-1\frac{1}{6}$
0	6	$1,7 \cdot 10^{-5}$	-1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	6	$1,7 \cdot 10^{-5}$	-1
$\frac{1}{2}$	$5,88$	$-0,458$	$-\frac{5}{6}$
1	$5\frac{5}{9}$	$-0,833$	$-\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{16}$	$-1,12$	$-\frac{1}{2}$
2	$4\frac{4}{9}$	$-1,33$	$-\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{2}$	$3,74$	$-1,46$	$-\frac{1}{6}$
3	3	$-1,5$	0
$3\frac{1}{2}$	$2,26$	$-1,46$	$\frac{1}{6}$
4	$1\frac{5}{9}$	$-1,33$	$\frac{1}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	$-1,12$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{4}{9}$	$-0,833$	$\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$0,118$	$-0,458$	$\frac{5}{6}$
6	0	$1,7 \cdot 10^{-5}$	1
$6\frac{1}{2}$	$0,132$	$0,542$	$1\frac{1}{6}$
7	$\frac{5}{9}$	$1,17$	$1\frac{1}{3}$

Aufgabe (36)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$
$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$
$f'''(x) = 6$
$F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^3 - 6 \cdot (-x)^2 + 9 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
$x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x^2 - 6x + 9 = 0$

$1x^2 - 6x + 9 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{6 \pm 0}{2}$
$x_1 = \frac{6+0}{2} \qquad x_2 = \frac{6-0}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]0;3[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{36}}{6}$
$x_{1/2} = \frac{12 \pm 6}{6}$

$x_1 = \frac{12+6}{6} \qquad x_2 = \frac{12-6}{6}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$
$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(1) = -6$
$f''(1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1/4)}$
$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(3/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]1; 3[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 6x - 12 = 0$

$6x - 12 = 0 \qquad / + 12$
$6x = 12 \qquad / : 6$
$x = \frac{12}{6}$
$x = 2$
$\underline{x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(2) = 2$
$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(2/2)}$
• Kruemmung

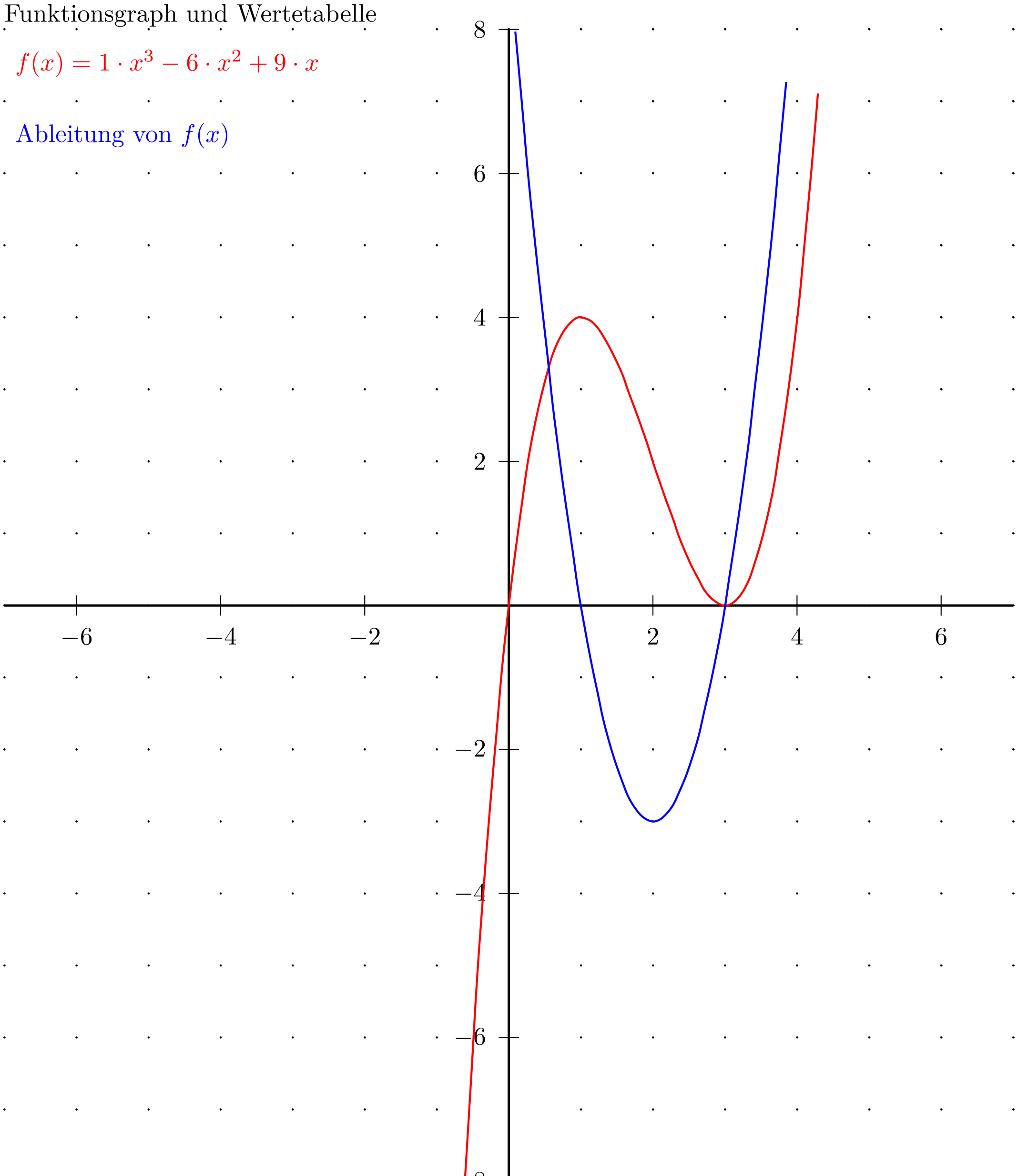
	$x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^3 \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$
$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 4\frac{1}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 4\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$$
$$= \left(6\frac{3}{4}\right) - (0) = 6\frac{3}{4}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-700	240	-54
$-6\frac{1}{2}$	$-586\frac{5}{8}$	214	-51
-6	-486	189	-48
$-5\frac{1}{2}$	$-397\frac{3}{8}$	166	-45
-5	-320	144	-42
$-4\frac{1}{2}$	$-253\frac{1}{8}$	124	-39
-4	-196	105	-36
$-3\frac{1}{2}$	$-147\frac{7}{8}$	$87,8$	-33
-3	-108	72	-30
$-2\frac{1}{2}$	$-75\frac{5}{8}$	$57,8$	-27
-2	-50	45	-24
$-1\frac{1}{2}$	$-30\frac{3}{8}$	$33,8$	-21
-1	-16	24	-18
$-\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{8}$	$15,8$	-15
0	0	9	-12

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	9	-12
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{8}$	$3,75$	-9
1	4	$0,000306$	-6
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$-2,25$	-3
2	2	-3	0
$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$-2,25$	3
3	0	$0,000306$	6
$3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$3,75$	9
4	4	9	12
$4\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{8}$	$15,8$	15
5	20	24	18
$5\frac{1}{2}$	$34\frac{3}{8}$	$33,8$	21
6	54	45	24
$6\frac{1}{2}$	$79\frac{5}{8}$	$57,8$	27
7	112	72	30

4 Funktionen 4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

4.1 Aufgaben

(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$
(2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 6x$
(3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4$
(4) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 16x - 16$
(5) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 81$
(6) $f(x) = -5\frac{2}{5}x^4 - 37\frac{4}{5}x^3 - 75\frac{3}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x$
(7) $f(x) = -6\frac{3}{4}x^4 - 13\frac{1}{2}x^3$
(8) $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - 2\frac{2}{3}x^2 - 8x$
(9) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$
(10) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$
(11) $f(x) = x^4 + 16$
(12) $f(x) = x^4 - 16$
(13) $f(x) = x^4 - 3x^3$
(14) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x$
(15) $f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + 2x^2$
(16) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2$
(17) $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$
(18) $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x$
(19) $f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 6x^2$
(20) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
(21) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
(22) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
(23) $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7$
(24) $f(x) = 4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12$
(25) $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 18x^2 + 124x - 48$
(26) $f(x) = -6x^4 + 72x^3 - 324x^2 + 648x - 486$

4.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x-2)^2$
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$
$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 12(x-0,423)(x-1,58)$
$f'''(x) = 24x - 24$
$F(x) = \int (x^4 - 4x^3 + 4x^2)dx = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + 1\frac{1}{3}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 + 4 \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x^2 - 4x + 4 = 0$

$1x^2 - 4x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{4 \pm 0}{2}$
$x_1 = \frac{4+0}{2} \qquad x_2 = \frac{4-0}{2}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = 0;}$ $\underline{\text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2;}$ $\underline{\text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$
$x(4x^2 - 12x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 12x + 8 = 0$

$4x^2 - 12x + 8 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8}}{2 \cdot 4}$
$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{16}}{8}$
$x_{1/2} = \frac{12 \pm 4}{8}$
$x_1 = \frac{12+4}{8} \qquad x_2 = \frac{12-4}{8}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$
$x_3 = 0;$ 1-fache Nullstelle
$x_4 = 1;$ 1-fache Nullstelle
$x_5 = 2;$ 1-fache Nullstelle
$f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(0/0)
$f''(1) = -4$
$f''(1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(1/1)
$f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(2/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]0;1[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]1;2[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 0$

$12x^2 - 24x + 8 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 8}}{2 \cdot 12}$
$x_{1/2} = \dfrac{+24 \pm \sqrt{192}}{24}$
$x_{1/2} = \dfrac{24 \pm 13,9}{24}$
$x_1 = \dfrac{24 + 13,9}{24} \qquad x_2 = \dfrac{24 - 13,9}{24}$
$x_1 = 1,58 \qquad x_2 = 0,423$
$x_6 = 0,423;$ 1-fache Nullstelle
$x_7 = 1,58;$ 1-fache Nullstelle
$f'''(0,423) = \dfrac{4}{9}$
$f'''(0,423) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(0,423/\dfrac{4}{9})$
$f'''(1,58) = \dfrac{4}{9}$
$f'''(1,58) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(1,58/\dfrac{4}{9})$

• Kruemmung

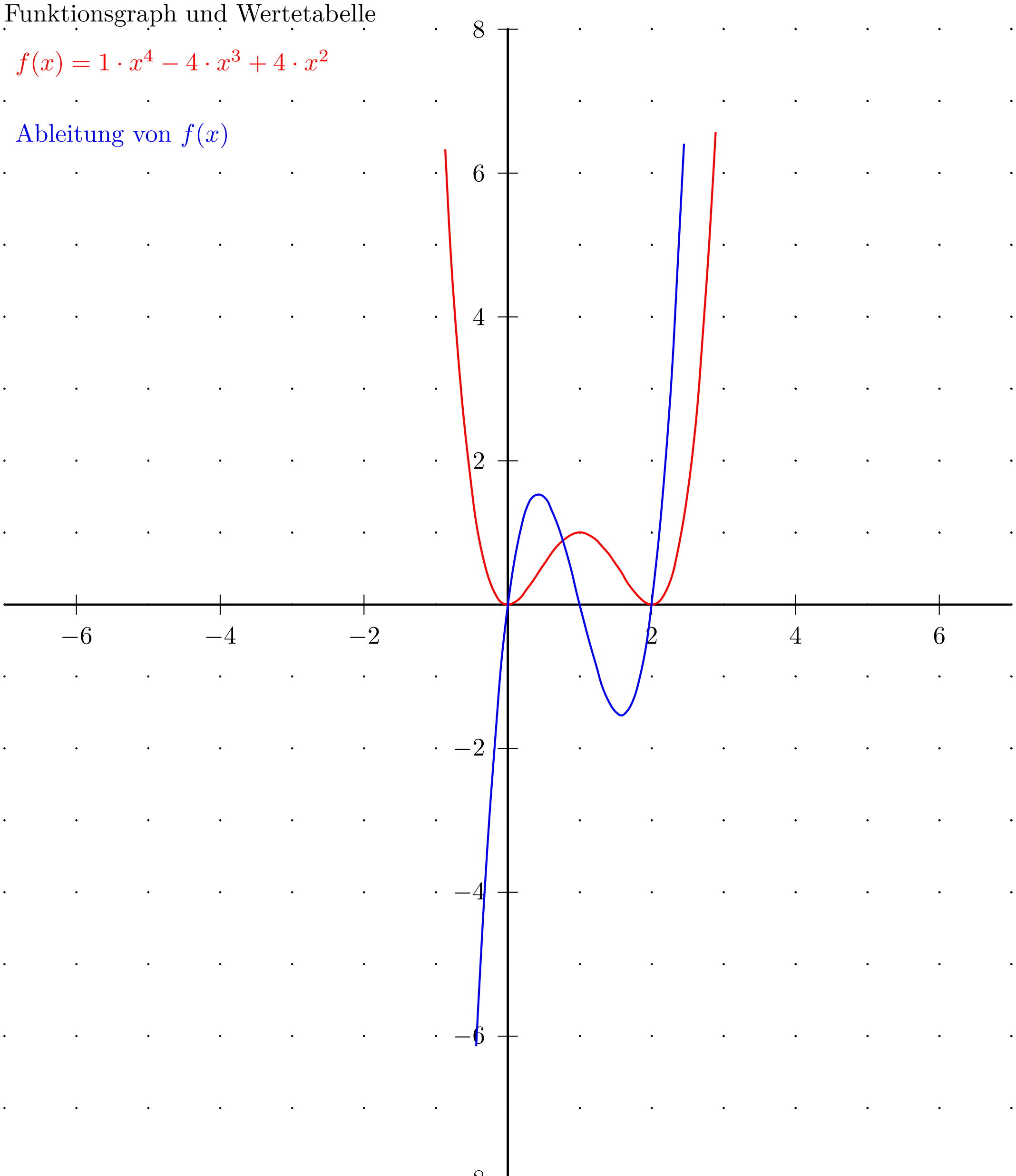
	$x <$	$0,423$	$< x <$	$1,58$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0,423[\quad \cup \quad]1,58;\infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0,423;1,58[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^2 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + 1\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - 1 \cdot 2^4 + 1\frac{1}{3} \cdot 2^3\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 0^5 - 1 \cdot 0^4 + 1\frac{1}{3} \cdot 0^3\right)$$
$$= \left(1\frac{1}{15}\right) - (0) = 1\frac{1}{15}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$3,97 \cdot 10^3$	$-2,02 \cdot 10^3$	764
$-6\frac{1}{2}$	$3052\frac{9}{16}$	$-1,66 \cdot 10^3$	671
-6	$2,3 \cdot 10^3$	$-1,34 \cdot 10^3$	584
$-5\frac{1}{2}$	$1701\frac{9}{16}$	$-1,07 \cdot 10^3$	503
-5	$1,23 \cdot 10^3$	-840	428
$-4\frac{1}{2}$	$855\frac{9}{16}$	-644	359
-4	576	-480	296
$-3\frac{1}{2}$	$370\frac{9}{16}$	-347	239
-3	225	-240	188
$-2\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	-158	143
-2	64	-96	104
$-1\frac{1}{2}$	$27\frac{9}{16}$	$-52,5$	71
-1	9	-24	44
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$-7,5$	23
0	0	$-0,00123$	8

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,00123$	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$1,5$	$-0,999$
1	1	0	-4
$1\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$-1,5$	$-0,999$
2	0	$0,00123$	8
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$7,5$	23
3	9	24	44
$3\frac{1}{2}$	$27\frac{9}{16}$	$52,5$	71
4	64	96	104
$4\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	158	143
5	225	240	188
$5\frac{1}{2}$	$370\frac{9}{16}$	347	239
6	576	480	296
$6\frac{1}{2}$	$855\frac{9}{16}$	644	359
7	$1,23 \cdot 10^3$	840	428

Aufgabe (2)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 6x = -\frac{1}{2}(x+2)^2x(x-3)$
$f'(x) = -2x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 8x + 6 = -2(x+2)(x+\frac{3}{4})(x-2)$
$f''(x) = -6x^2 - 3x + 8 = -6(x+1,43)(x-0,931)$
$f'''(x) = -12x - 3$
$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 6x)dx = -\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + 1\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 16[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{2}\cdot\infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{2}\cdot(-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{2}\cdot(-x)^4 - \frac{1}{2}\cdot(-x)^3 + 4\cdot(-x)^2 + 6\cdot(-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 6x = 0$
$x(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$
$-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -2

$$
\begin{array}{llll}
(-\frac{1}{2}x^3 & -\frac{1}{2}x^2 & +4x & +6 \quad) : (x+2) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \\
-(-\frac{1}{2}x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & \frac{1}{2}x^2 & +4x & +6 \\
 & -(\frac{1}{2}x^2 & +x) & \\
\hline
 & & 3x & +6 \\
 & & -(3x & +6) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}}}{-1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}}{-1}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{-1} \qquad x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}}{-1}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0;3[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;0[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = -2x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 8x + 6 = 0$

$-2x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 8x + 6 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:2

$$\begin{array}{cccc}
(-2x^3 & -1\frac{1}{2}x^2 & +8x & +6 \quad) : (x-2) = -2x^2 - 5\frac{1}{2}x - 3 \\
-(-2x^3 & +4x^2) & & \\
\hline
 & -5\frac{1}{2}x^2 & +8x & +6 \\
 & -(-5\frac{1}{2}x^2 & +11x) & \\
\hline
 & & -3x & +6 \\
 & & -(-3x & +6) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-2x^2 - 5\frac{1}{2}x - 3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+5\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-5\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)}$

$x_{1/2} = \frac{+5\frac{1}{2} \pm \sqrt{6\frac{1}{4}}}{-4}$

$x_{1/2} = \frac{5\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}}{-4}$

$x_1 = \frac{5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}}{-4} \qquad x_2 = \frac{5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}}{-4}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -\frac{3}{4}$

$\underline{x_4 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = -\frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-2) = -10$

$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2/0)}$

$f''(-\frac{3}{4}) = 6\frac{7}{8} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-\frac{3}{4}/-2,2)}$

$f''(2) = -22$

$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/16)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-\frac{3}{4}; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-2; -\frac{3}{4}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = -6x^2 - 3x + 8 = 0$

$-6x^2 - 3x + 8 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 8}}{2 \cdot (-6)}$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{201}}{-12}$

$x_{1/2} = \frac{3 \pm 14,2}{-12}$

$x_1 = \frac{3 + 14,2}{-12} \qquad x_2 = \frac{3 - 14,2}{-12}$
$x_1 = -1,43 \qquad x_2 = 0,931$
$\underline{x_7 = -1,43; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 0,931; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1,43) = -1,03$
$f'''(-1,43) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1,43/-1,03)}$
$f'''(0,931) = 8,28$
$f'''(0,931) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,931/8,28)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-1,43$	$< x <$	$0,931$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

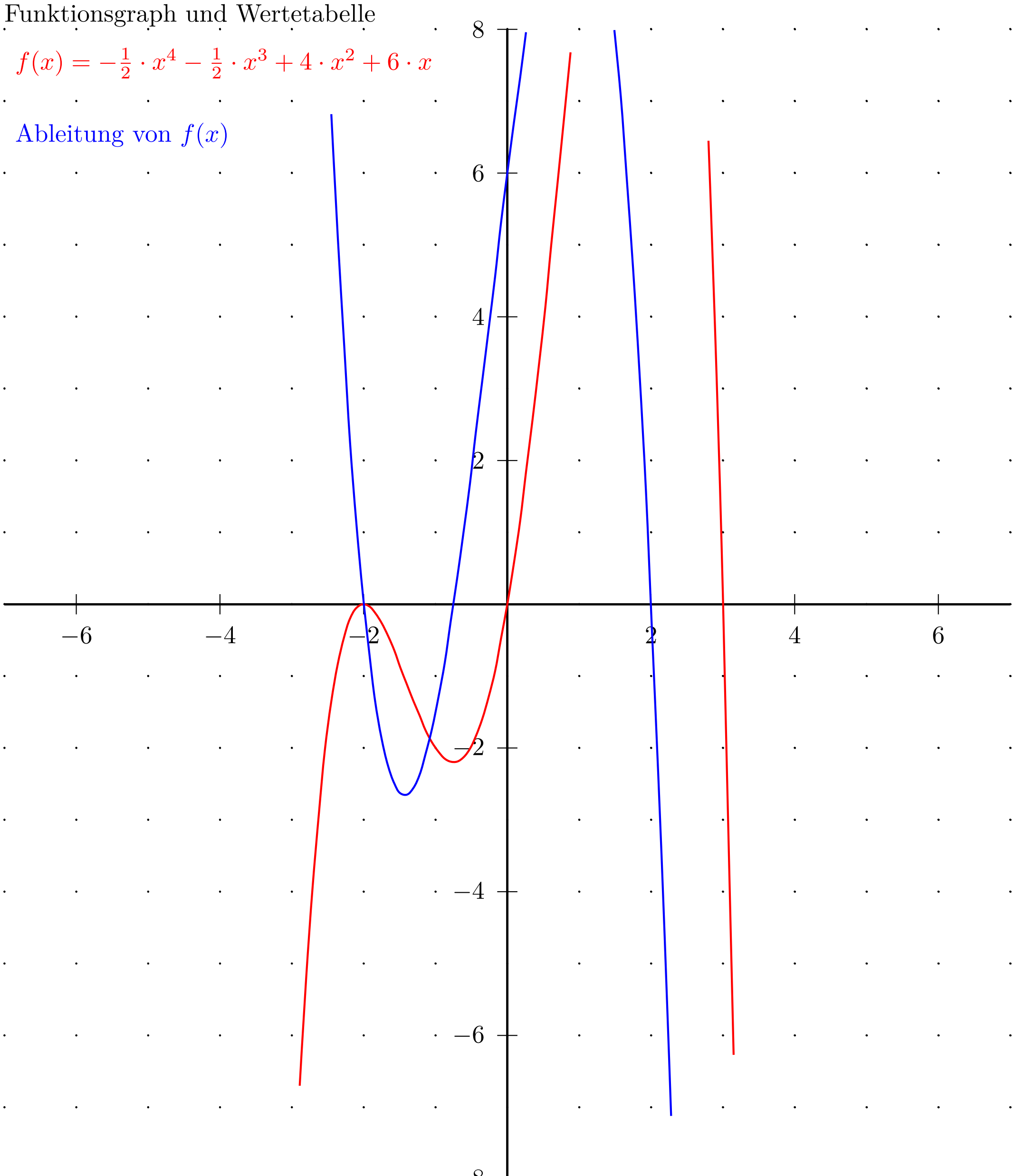
$\underline{\quad x \in]-1,43; 0,931[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1,43[\quad \cup \quad]0,931; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-2}^{0} \left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 6x\right) dx = \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + 1\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_{-2}^{0}$
$= \left(-\frac{1}{10} \cdot 0^5 - \frac{1}{8} \cdot 0^4 + 1\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2\right) - \left(-\frac{1}{10} \cdot (-2)^5 - \frac{1}{8} \cdot (-2)^4 + 1\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2\right)$
$= (0) - \left(2\frac{8}{15}\right) = -2\frac{8}{15}$
$A = \int_{0}^{3} \left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 6x\right) dx = \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + 1\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_{0}^{3}$
$= \left(-\frac{1}{10} \cdot 3^5 - \frac{1}{8} \cdot 3^4 + 1\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2\right) - \left(-\frac{1}{10} \cdot 0^5 - \frac{1}{8} \cdot 0^4 + 1\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2\right)$
$= \left(28\frac{23}{40}\right) - (0) = 28\frac{23}{40}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	-875	563	-265
$-6\frac{1}{2}$	$-625\frac{7}{32}$	440	-226
-6	-432	336	-190
$-5\frac{1}{2}$	$-286\frac{11}{32}$	249	-157
-5	-180	179	-127
$-4\frac{1}{2}$	$-105\frac{15}{32}$	122	-100
-4	-56	78	-76
$-3\frac{1}{2}$	$-25\frac{19}{32}$	$45,4$	-55
-3	-9	$22,5$	-37
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{23}{32}$	$7,88$	-22
-2	0	$0,00107$	-10
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{32}$	$-2,62$	-1
-1	-2	$-1,5$	5
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{31}{32}$	$1,88$	8
0	0	6	8

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	6	8
$\frac{1}{2}$	$3\frac{29}{32}$	$9,37$	5
1	9	$10,5$	-1
$1\frac{1}{2}$	$13\frac{25}{32}$	$7,87$	-10
2	16	$-0,00138$	-22
$2\frac{1}{2}$	$12\frac{21}{32}$	$-14,6$	-37
3	0	$-37,5$	-55
$3\frac{1}{2}$	$-26\frac{15}{32}$	$-70,1$	-76
4	-72	-114	-100
$4\frac{1}{2}$	$-142\frac{19}{32}$	-171	-127
5	-245	-242	-157
$5\frac{1}{2}$	$-386\frac{23}{32}$	-328	-190
6	-576	-432	-226
$6\frac{1}{2}$	$-821\frac{27}{32}$	-555	-265
7	$-1,13 \cdot 10^3$	-698	-307

Aufgabe (3)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4 = (x^2 + 0,784x + 0,81)(x - 1,51)(x - 3,28)$
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x = 4x(x - 0,382)(x - 2,62)$
$f''(x) = 12x^2 - 24x + 4 = 12(x - 0,184)(x - 1,82)$
$f'''(x) = 24x - 24$
$F(x) = \int (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4)dx = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-7,09), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 + 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4 = 0$

$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4$
$Numerische Suche:$

$x_1 = 1,51;$ 1-fache Nullstelle
$x_2 = 3,28;$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$1,51$	$< x <$	$3,28$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; 1,51[\quad \cup \quad]3,28; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]1,51; 3,28[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x = 0$
$x(4x^2 - 12x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 12x + 4 = 0$

$4x^2 - 12x + 4 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4}$$
$$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{80}}{8}$$
$$x_{1/2} = \frac{12 \pm 8,94}{8}$$
$$x_1 = \frac{12 + 8,94}{8} \qquad x_2 = \frac{12 - 8,94}{8}$$
$x_1 = 2,62 \qquad x_2 = 0,382$
$x_3 = 0;$ 1-fache Nullstelle
$x_4 = 0,382;$ 1-fache Nullstelle
$x_5 = 2,62;$ 1-fache Nullstelle
$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(0/4)$
$f''(0,382) = -3,42$
$f''(0,382) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(0,382/4,09)$

$f''(2,62) = 23,4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(2,62/-7,09)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	$0,382$	$< x <$	$2,62$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]0;0,382[\quad \cup \quad]2,62;\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0,382;2,62[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 4 = 0$

$12x^2 - 24x + 4 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 4}}{2 \cdot 12}$$

$$x_{1/2} = \frac{+24 \pm \sqrt{384}}{24}$$

$$x_{1/2} = \frac{24 \pm 19,6}{24}$$

$$x_1 = \frac{24 + 19,6}{24} \qquad x_2 = \frac{24 - 19,6}{24}$$

$x_1 = 1,82 \qquad x_2 = 0,184$

$x_6 = 0,184$; 1-fache Nullstelle

$x_7 = 1,82$; 1-fache Nullstelle

$f'''(0,184) = 4,04$

$f'''(0,184) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(0,184/4,04)$

$f'''(1,82) = -2,49$

$f'''(1,82) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(1,82/-2,49)$

• Kruemmung

	$x <$	$0,184$	$< x <$	$1,82$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0,184[\quad \cup \quad]1,82;\infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0,184;1,82[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

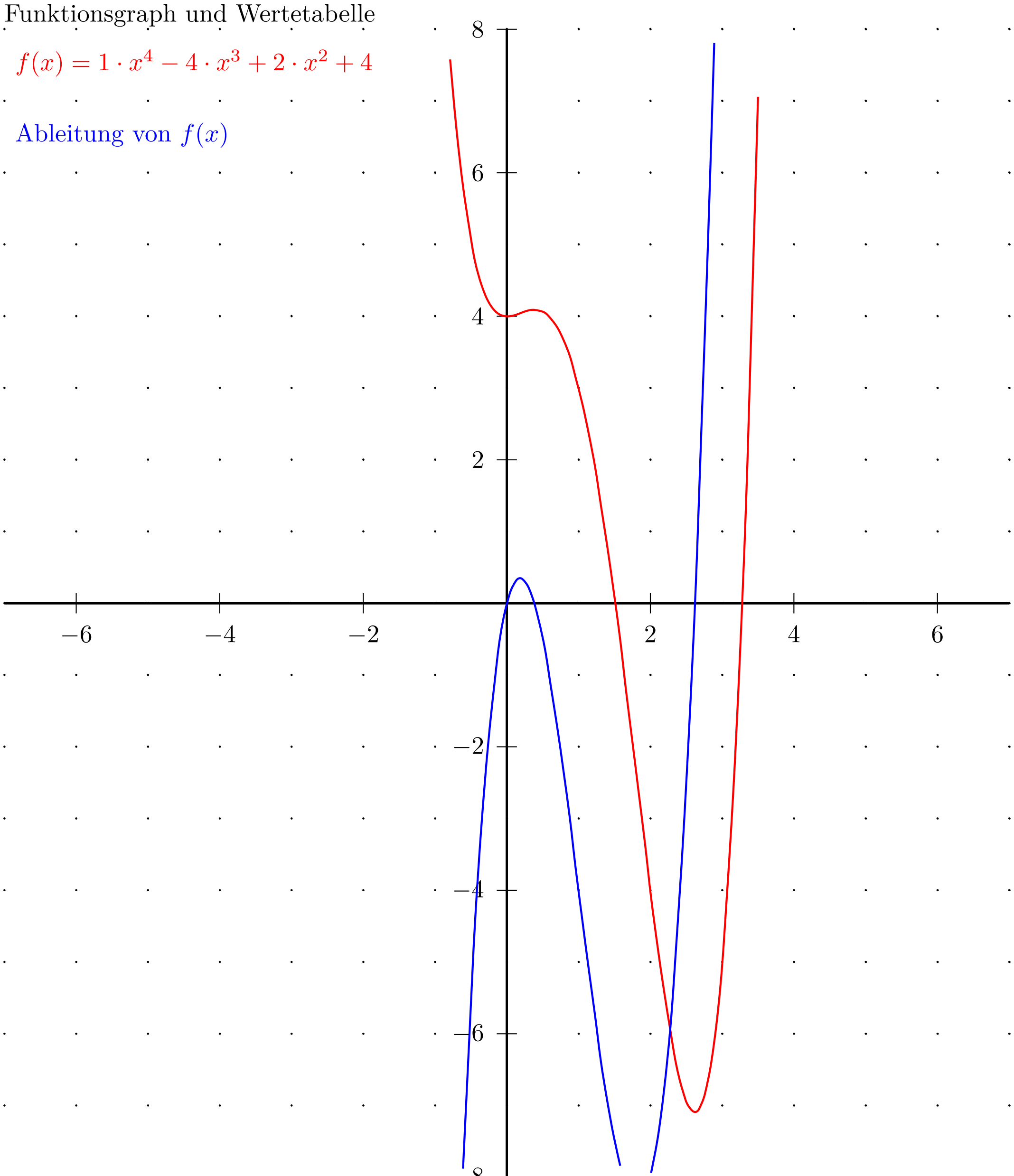
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{1,51}^{3,28} \left(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 4x\right]_{1,51}^{3,28}$$

$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 3,28^5 - 1 \cdot 3,28^4 + \frac{2}{3} \cdot 3,28^3 + 4 \cdot 3,28\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 1,51^5 - 1 \cdot 1,51^4 + \frac{2}{3} \cdot 1,51^3 + 4 \cdot 1,51\right)$$

$$= (-3,17) - (4,71) = -7,88$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$3,88 \cdot 10^3$	$-1,99 \cdot 10^3$	760
$-6\frac{1}{2}$	$2972\frac{1}{16}$	$-1,63 \cdot 10^3$	667
-6	$2,24 \cdot 10^3$	$-1,32 \cdot 10^3$	580
$-5\frac{1}{2}$	$1645\frac{1}{16}$	$-1,05 \cdot 10^3$	499
-5	$1,18 \cdot 10^3$	-820	424
$-4\frac{1}{2}$	$819\frac{1}{16}$	-626	355
-4	548	-464	292
$-3\frac{1}{2}$	$350\frac{1}{16}$	-333	235
-3	211	-228	184
$-2\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{16}$	-148	139
-2	60	-88	100
$-1\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{16}$	$-46,5$	67
-1	11	-20	40
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{16}$	$-5,5$	19
0	4	$-0,00123$	4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	$-0,00123$	4
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{16}$	$-0,501$	-5
1	3	-4	-8
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$-7,5$	-5
2	-4	-8	4
$2\frac{1}{2}$	$-6\frac{15}{16}$	$-2,5$	19
3	-5	12	40
$3\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{16}$	$38,5$	67
4	36	80	100
$4\frac{1}{2}$	$90\frac{1}{16}$	140	139
5	179	220	184
$5\frac{1}{2}$	$314\frac{1}{16}$	325	235
6	508	456	292
$6\frac{1}{2}$	$775\frac{1}{16}$	618	355
7	$1,13 \cdot 10^3$	812	424

Aufgabe (4)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 - 4x^3 - 16x - 16 = (x + 0,828)(x^2 + 4)(x - 4,83)$
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16 = 4(x^2 + 0,355x + 1,19)(x - 3,36)$
$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$
$f'''(x) = 24x - 24$
$F(x) = \int(x^4 - 4x^3 - 16x - 16)dx = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - 8x^2 - 16x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-94), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{16}{x^3} - \dfrac{16}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 - 16 \cdot (-x) - 16$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 - 4x^3 - 16x - 16 = 0$

$x^4 - 4x^3 - 16x - 16$
$Numerische Suche:$

$x_1 = -0,828;$ 1-fache Nullstelle
$x_2 = 4,83;$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-0,828$	$< x <$	$4,83$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -0,828[\quad \cup \quad]4,83; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-0,828; 4,83[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16 = 0$

$4x^3 - 12x^2 - 16 = 0$
$Numerische Suche:$
$x_3 = 3,36;$ 1-fache Nullstelle
$f''(3,36) = 54,6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(3,36/-94)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$3,36$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]3,36; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 3,36[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$
$x(12x - 24) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 12x - 24 = 0$
$12x - 24 = 0 \qquad / + 24$

$12x = 24 \qquad / : 12$
$x = \frac{24}{12}$
$x = 2$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(0) = -16$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/-16)}$
$f'''(2) = -64$
$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(2/-64)}$

• Kruemmung

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

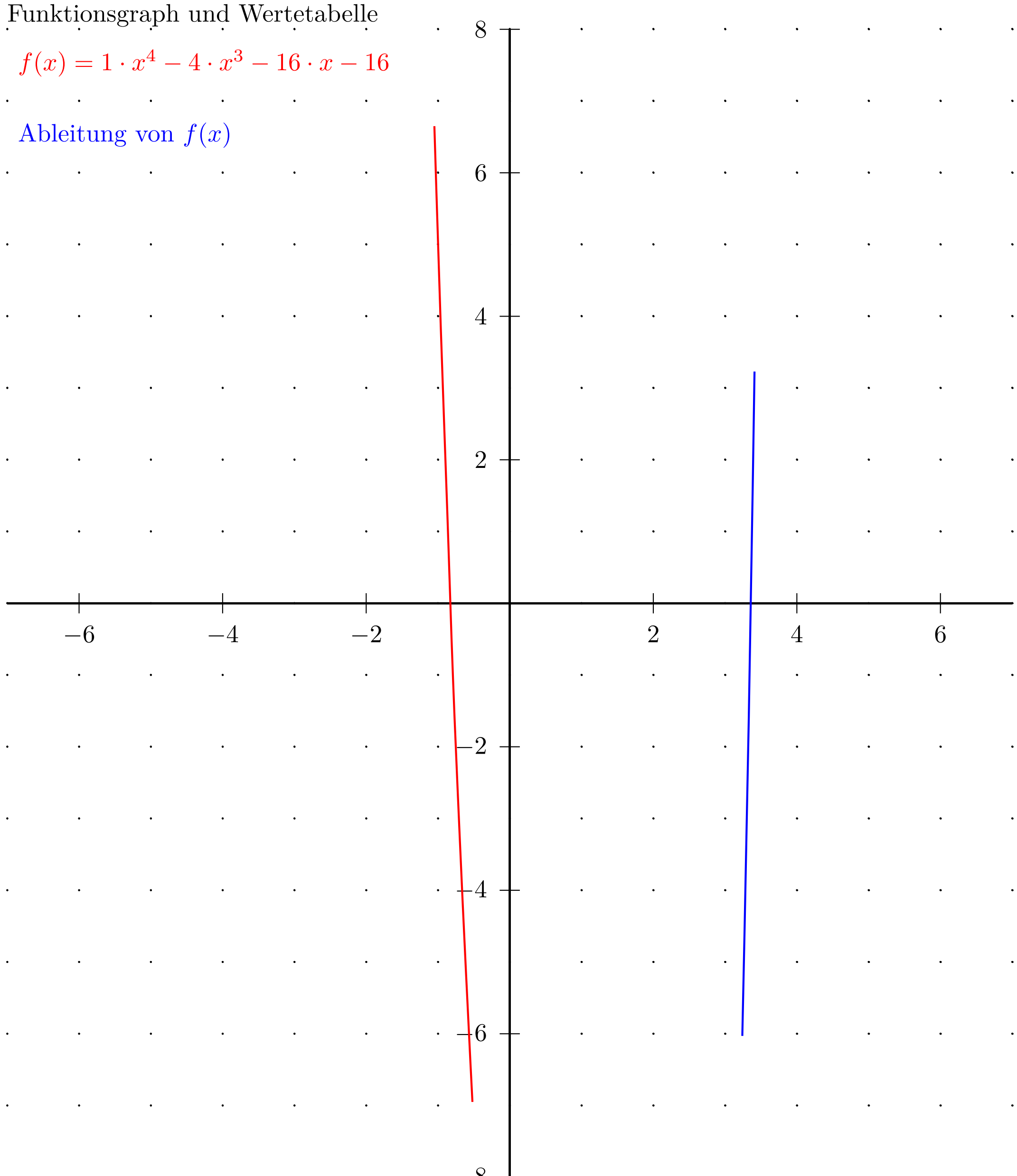
$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]0; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-0,828}^{4,83} \left(x^4 - 4x^3 - 16x - 16\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 - 8x^2 - 16x\right]_{-0,828}^{4,83}$
$= \left(\frac{1}{5} \cdot 4,83^5 - 1 \cdot 4,83^4 - 8 \cdot 4,83^2 - 16 \cdot 4,83\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-0,828)^5 - 1 \cdot (-0,828)^4 - 8 \cdot (-0,828)^2 - 16 \cdot (-0,828)\right)$
$= (-282) - (7,22) = -290$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$3,87 \cdot 10^3$	$-1,98 \cdot 10^3$	756
$-6\frac{1}{2}$	$2971\frac{9}{16}$	$-1,62 \cdot 10^3$	663
-6	$2,24 \cdot 10^3$	$-1,31 \cdot 10^3$	576
$-5\frac{1}{2}$	$1652\frac{9}{16}$	$-1,04 \cdot 10^3$	495
-5	$1,19 \cdot 10^3$	-816	420
$-4\frac{1}{2}$	$830\frac{9}{16}$	-624	351
-4	560	-464	288
$-3\frac{1}{2}$	$361\frac{9}{16}$	-335	231
-3	221	-232	180
$-2\frac{1}{2}$	$125\frac{9}{16}$	-154	135
-2	64	-96	96
$-1\frac{1}{2}$	$26\frac{9}{16}$	$-56,5$	63
-1	5	-32	36
$-\frac{1}{2}$	$-7\frac{7}{16}$	$-19,5$	15
0	-16	-16	$0,000612$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-16	-16	$0,000612$
$\frac{1}{2}$	$-24\frac{7}{16}$	$-18,5$	-9
1	-35	-24	-12
$1\frac{1}{2}$	$-48\frac{7}{16}$	$-29,5$	-9
2	-64	-32	$0,000612$
$2\frac{1}{2}$	$-79\frac{7}{16}$	$-28,5$	15
3	-91	-16	36
$3\frac{1}{2}$	$-93\frac{7}{16}$	$8,5$	63
4	-80	48	96
$4\frac{1}{2}$	$-42\frac{7}{16}$	106	135
5	29	184	180
$5\frac{1}{2}$	$145\frac{9}{16}$	287	231
6	320	416	288
$6\frac{1}{2}$	$566\frac{9}{16}$	576	351
7	901	768	420

Aufgabe (5)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 - 18x^2 + 81 = (x+3)^2(x-3)^2$
$f'(x) = 4x^3 - 36x = 4(x+3)x(x-3)$
$f''(x) = 12x^2 - 36 = 12(x+1,73)(x-1,73)$
$f'''(x) = 24x$
$F(x) = \int(x^4 - 18x^2 + 81)dx = \frac{1}{5}x^5 - 6x^3 + 81x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 - \dfrac{18}{x^2} + \dfrac{81}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 18 \cdot (-x)^2 + 81$
$f(-x) = 1 \cdot x^4 - 18 \cdot x^2 + 81$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 18u + 81 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1}$$
$$u_{1/2} = \frac{+18 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$u_{1/2} = \frac{18 \pm 0}{2}$$
$$u_1 = \frac{18+0}{2} \qquad u_2 = \frac{18-0}{2}$$
$u_1 = 9 \qquad u_2 = 9$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$\underline{x_1 = -3;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -3[\;\cup\;]-3; 3[\;\cup\;]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 - 36x = 0$
$x(4x^2 - 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 36 = 0$
$4x^2 - 36 = 0 \qquad / + 36$
$4x^2 = 36 \qquad / : 4$

$x^2 = \frac{36}{4}$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$\underline{x_3 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-3) = 72 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-3/0)}$
$f''(0) = -36$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/81)}$
$f''(3) = 72 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(3/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-3;0[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]0;3[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 - 36 = 0$

$12x^2 - 36 = 0 \qquad / + 36$
$12x^2 = 36 \qquad / : 12$
$x^2 = \frac{36}{12}$
$x = \pm\sqrt{3}$
$x_1 = 1,73 \qquad x_2 = -1,73$
$\underline{x_6 = -1,73;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 1,73;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1,73) = 36$
$f'''(-1,73) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1,73/36)}$
$f'''(1,73) = 36$
$f'''(1,73) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1,73/36)}$
• Kruemmung

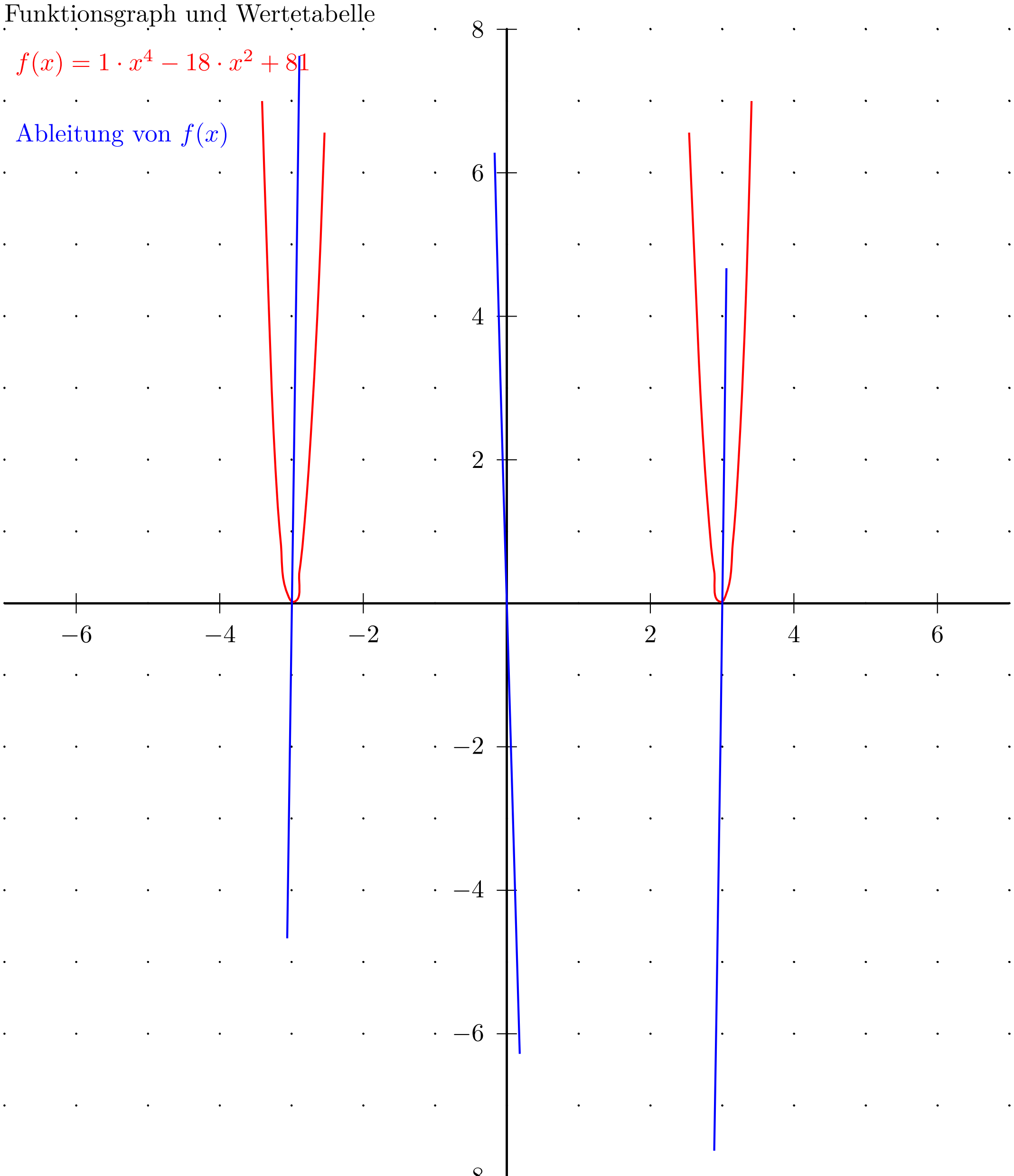
	$x <$	$-1,73$	$< x <$	$1,73$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1,73[\quad \cup \quad]1,73;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-1,73;1,73[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-3}^{3} \left(x^4 - 18x^2 + 81\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 6x^3 + 81x\right]_{-3}^{3}$$
$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 3^5 - 6 \cdot 3^3 + 81 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-3)^5 - 6 \cdot (-3)^3 + 81 \cdot (-3)\right)$$
$$= \left(129\frac{3}{5}\right) - \left(-129\frac{3}{5}\right) = 259\frac{1}{5}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1,6 \cdot 10^3$	$-1,12 \cdot 10^3$	552
$-6\frac{1}{2}$	$1105\frac{9}{16}$	-865	471
-6	729	-648	396
$-5\frac{1}{2}$	$451\frac{9}{16}$	-468	327
-5	256	-320	264
$-4\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	-203	207
-4	49	-112	156
$-3\frac{1}{2}$	$10\frac{9}{16}$	$-45,5$	111
-3	0	$-0,00368$	72
$-2\frac{1}{2}$	$7\frac{9}{16}$	$27,5$	39
-2	25	40	12
$-1\frac{1}{2}$	$45\frac{9}{16}$	$40,5$	-9
-1	64	32	-24
$-\frac{1}{2}$	$76\frac{9}{16}$	$17,5$	-33
0	81	0	-36

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	81	0	-36
$\frac{1}{2}$	$76\frac{9}{16}$	$-17,5$	-33
1	64	-32	-24
$1\frac{1}{2}$	$45\frac{9}{16}$	$-40,5$	-9
2	25	-40	12
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{9}{16}$	$-27,5$	39
3	0	$0,00368$	72
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{9}{16}$	$45,5$	111
4	49	112	156
$4\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	203	207
5	256	320	264
$5\frac{1}{2}$	$451\frac{9}{16}$	468	327
6	729	648	396
$6\frac{1}{2}$	$1105\frac{9}{16}$	865	471
7	$1,6 \cdot 10^3$	$1,12 \cdot 10^3$	552

Aufgabe (6)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -5\frac{2}{5}x^4 - 37\frac{4}{5}x^3 - 75\frac{3}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x = -5\frac{2}{5}(x+4)(x+2)(x+1)x$
$f'(x) = -21\frac{3}{5}x^3 - 113\frac{2}{5}x^2 - 151\frac{1}{5}x - 43\frac{1}{5} = -21\frac{3}{5}(x+3,33)(x+1,53)(x+0,393)$
$f''(x) = -64\frac{4}{5}x^2 - 226\frac{4}{5}x - 151\frac{1}{5} = -64\frac{4}{5}(x+2,6)(x+0,896)$
$f'''(x) = -129\frac{3}{5}x - 226\frac{4}{5}$
$F(x) = \int(-5\frac{2}{5}x^4 - 37\frac{4}{5}x^3 - 75\frac{3}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x)dx = -1\frac{2}{25}x^5 - 9\frac{9}{20}x^4 - 25\frac{1}{5}x^3 - 21\frac{3}{5}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 37,3[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-5\frac{2}{5} - \frac{37\frac{4}{5}}{x} - \frac{75\frac{3}{5}}{x^2} - \frac{43\frac{1}{5}}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-5\frac{2}{5} \cdot \infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-5\frac{2}{5} \cdot (-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -5\frac{2}{5} \cdot (-x)^4 - 37\frac{4}{5} \cdot (-x)^3 - 75\frac{3}{5} \cdot (-x)^2 - 43\frac{1}{5} \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -5\frac{2}{5}x^4 - 37\frac{4}{5}x^3 - 75\frac{3}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x = 0$
$x(-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} = 0$
$-5\frac{2}{5}x^3 - 37\frac{4}{5}x^2 - 75\frac{3}{5}x - 43\frac{1}{5} = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -2

$$\begin{array}{llllll}
(-5\frac{2}{5}x^3 & -37\frac{4}{5}x^2 & -75\frac{3}{5}x & -43\frac{1}{5} &) : (x+2) = -5\frac{2}{5}x^2 - 27x - 21\frac{3}{5} \\
-(-5\frac{2}{5}x^3 & -10\frac{4}{5}x^2) & & & \\
\hline
& -27x^2 & -75\frac{3}{5}x & -43\frac{1}{5} & \\
& -(-27x^2 & -54x) & & \\
\hline
& & -21\frac{3}{5}x & -43\frac{1}{5} & \\
& & -(-21\frac{3}{5}x & -43\frac{1}{5}) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$-5\frac{2}{5}x^2 - 27x - 21\frac{3}{5} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+27 \pm \sqrt{(-27)^2 - 4 \cdot (-5\frac{2}{5}) \cdot (-21\frac{3}{5})}}{2 \cdot (-5\frac{2}{5})}$$

$$x_{1/2} = \frac{+27 \pm \sqrt{262\frac{11}{25}}}{-10\frac{4}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{27 \pm 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}}$$

$$x_1 = \frac{27 + 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}} \qquad x_2 = \frac{27 - 16\frac{1}{5}}{-10\frac{4}{5}}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	-2	$< x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-4;-2[\quad \cup \quad]-1;0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]-2; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = -21\frac{3}{5}x^3 - 113\frac{2}{5}x^2 - 151\frac{1}{5}x - 43\frac{1}{5} = 0$

$-21\frac{3}{5}x^3 - 113\frac{2}{5}x^2 - 151\frac{1}{5}x - 43\frac{1}{5} = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_5 = -3,33; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = -1,53; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_7 = -0,393; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-3,33) = -114$

$f''(-3,33) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-3,33/37,3)}$

$f''(-1,53) = 44,1 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1,53/-5,08)}$

$f''(-0,393) = -72,1$

$f''(-0,393) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,393/7,47)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-3,33$	$< x <$	$-1,53$	$< x <$	$-0,393$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3,33[\quad \cup \quad]-1,53; -0,393[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-3,33; -1,53[\quad \cup \quad]-0,393; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = -64\frac{4}{5}x^2 - 226\frac{4}{5}x - 151\frac{1}{5} = 0$

$-64\frac{4}{5}x^2 - 226\frac{4}{5}x - 151\frac{1}{5} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+226\frac{4}{5} \pm \sqrt{\left(-226\frac{4}{5}\right)^2 - 4 \cdot \left(-64\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-151\frac{1}{5}\right)}}{2 \cdot \left(-64\frac{4}{5}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+226\frac{4}{5} \pm \sqrt{12247\frac{1}{5}}}{-129\frac{3}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{226\frac{4}{5} \pm 111}{-129\frac{3}{5}}$$

$$x_1 = \frac{226\frac{4}{5} + 111}{-129\frac{3}{5}} \qquad x_2 = \frac{226\frac{4}{5} - 111}{-129\frac{3}{5}}$$

$x_1 = -2,6 \qquad x_2 = -0,896$

$\underline{x_8 = -2,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_9 = -0,896; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-2,6) = 19$

$f'''(-2,6) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-2,6/19)}$

$f'''(-0,896) = 1,72$

$f'''(-0,896) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,896/1,72)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-2,6$	$< x <$	$-0,896$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2,6; -0,896[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -2,6[\quad \cup \quad]-0,896; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-4}^{-2} \left(-5\frac{2}{5}x^4 - 37\frac{4}{5}x^3 - 75\frac{3}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x\right) dx = \left[-1\frac{2}{25}x^5 - 9\frac{9}{20}x^4 - 25\frac{1}{5}x^3 - 21\frac{3}{5}x^2\right]_{-4}^{-2}$

$= \left(-1\frac{2}{25} \cdot (-2)^5 - 9\frac{9}{20} \cdot (-2)^4 - 25\frac{1}{5} \cdot (-2)^3 - 21\frac{3}{5} \cdot (-2)^2\right) - \left(-1\frac{2}{25} \cdot (-4)^5 - 9\frac{9}{20} \cdot (-4)^4 - 25\frac{1}{5} \cdot (-4)^3 - 21\frac{3}{5} \cdot (-4)^2\right)$

$= \left(-1\frac{11}{25}\right) - \left(-46\frac{2}{25}\right) = 44\frac{16}{25}$

$A = \int_{-2}^{-1} \left(-5\frac{2}{5}x^4 - 37\frac{4}{5}x^3 - 75\frac{3}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x\right) dx = \left[-1\frac{2}{25}x^5 - 9\frac{9}{20}x^4 - 25\frac{1}{5}x^3 - 21\frac{3}{5}x^2\right]_{-2}^{-1}$

$= \left(-1\frac{2}{25} \cdot (-1)^5 - 9\frac{9}{20} \cdot (-1)^4 - 25\frac{1}{5} \cdot (-1)^3 - 21\frac{3}{5} \cdot (-1)^2\right) - \left(-1\frac{2}{25} \cdot (-2)^5 - 9\frac{9}{20} \cdot (-2)^4 - 25\frac{1}{5} \cdot (-2)^3 - 21\frac{3}{5} \cdot (-2)^2\right)$

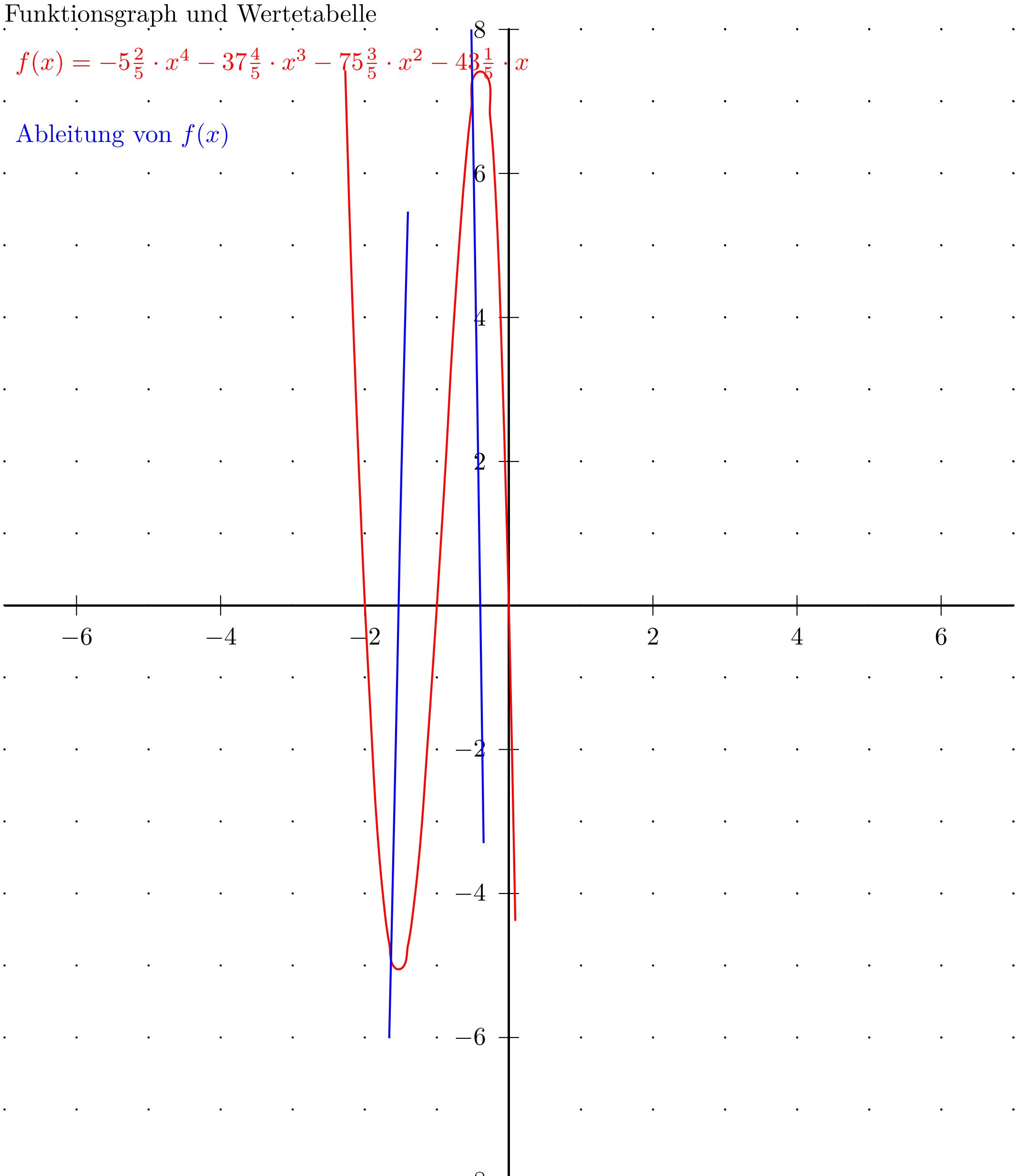
$= (-4,77) - \left(-1\frac{11}{25}\right) = -3,33$

$A = \int_{-1}^{0} \left(-5\frac{2}{5}x^4 - 37\frac{4}{5}x^3 - 75\frac{3}{5}x^2 - 43\frac{1}{5}x\right) dx = \left[-1\frac{2}{25}x^5 - 9\frac{9}{20}x^4 - 25\frac{1}{5}x^3 - 21\frac{3}{5}x^2\right]_{-1}^{0}$

$= \left(-1\frac{2}{25} \cdot 0^5 - 9\frac{9}{20} \cdot 0^4 - 25\frac{1}{5} \cdot 0^3 - 21\frac{3}{5} \cdot 0^2\right) - \left(-1\frac{2}{25} \cdot (-1)^5 - 9\frac{9}{20} \cdot (-1)^4 - 25\frac{1}{5} \cdot (-1)^3 - 21\frac{3}{5} \cdot (-1)^2\right)$

$= (0) - (-4,77) = 4,77$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-3,4 \cdot 10^3$	$2,87 \cdot 10^3$	$-1,74 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-2171\frac{13}{16}$	$2,08 \cdot 10^3$	$-1,41 \cdot 10^3$
-6	$-1,3 \cdot 10^3$	$1,45 \cdot 10^3$	$-1,12 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-701\frac{53}{80}$	952	-864
-5	-324	578	-637
$-4\frac{1}{2}$	$-106\frac{5}{16}$	309	-443
-4	0	130	-281
$-3\frac{1}{2}$	$35\frac{7}{16}$	23	-151
-3	$32\frac{2}{5}$	-27	-54
$-2\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{16}$	$-36,4$	$10,8$
-2	0	$-21,6$	$43,2$
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{16}$	$1,35$	$43,2$
-1	0	$16,2$	$10,8$
$-\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{80}$	$6,74$	-54
0	0	$-43,2$	-151

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-43,2$	-151
$\frac{1}{2}$	$-45\frac{9}{16}$	-150	-281
1	-162	-329	-443
$1\frac{1}{2}$	$-389\frac{13}{16}$	-598	-637
2	$-777\frac{3}{5}$	-972	-864
$2\frac{1}{2}$	$-1382\frac{1}{16}$	$-1,47 \cdot 10^3$	$-1,12 \cdot 10^3$
3	$-2,27 \cdot 10^3$	$-2,1 \cdot 10^3$	$-1,41 \cdot 10^3$
$3\frac{1}{2}$	$-3508\frac{5}{16}$	$-2,89 \cdot 10^3$	$-1,74 \cdot 10^3$
4	$-5,18 \cdot 10^3$	$-3,84 \cdot 10^3$	$-2,1 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$-7384\frac{13}{80}$	$-4,99 \cdot 10^3$	$-2,48 \cdot 10^3$
5	$-1,02 \cdot 10^4$	$-6,33 \cdot 10^3$	$-2,91 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$-13754\frac{13}{16}$	$-7898\frac{44}{49}$	$-3,36 \cdot 10^3$
6	$-1,81 \cdot 10^4$	$-9,7 \cdot 10^3$	$-3,84 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$-23495\frac{1}{16}$	$-1,17 \cdot 10^4$	$-4,36 \cdot 10^3$
7	$-29937\frac{3}{5}$	$-1,41 \cdot 10^4$	$-4,91 \cdot 10^3$

Aufgabe (7)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -6\frac{3}{4}x^4 - 13\frac{1}{2}x^3 = -6\frac{3}{4}(x+2)x^3$
$f'(x) = -27x^3 - 40\frac{1}{2}x^2 = -27(x+1\frac{1}{2})x^2$
$f''(x) = -81x^2 - 81x = -81(x+1)x$
$f'''(x) = -162x - 81$
$F(x) = \int(-6\frac{3}{4}x^4 - 13\frac{1}{2}x^3)dx = -1\frac{7}{20}x^5 - 3\frac{3}{8}x^4 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 11\frac{25}{64}[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-6\frac{3}{4} - \frac{13\frac{1}{2}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-6\frac{3}{4} \cdot \infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-6\frac{3}{4} \cdot (-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -6\frac{3}{4} \cdot (-x)^4 - 13\frac{1}{2} \cdot (-x)^3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -6\frac{3}{4}x^4 - 13\frac{1}{2}x^3 = 0$
$x^3(-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0$
$-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 13\frac{1}{2}$
$-6\frac{3}{4}x = 13\frac{1}{2} \qquad / : (-6\frac{3}{4})$
$x = \frac{13\frac{1}{2}}{-6\frac{3}{4}}$
$x = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-2; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -27x^3 - 40\frac{1}{2}x^2 = 0$
$x^2(-27x - 40\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -27x - 40\frac{1}{2} = 0$
$-27x - 40\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 40\frac{1}{2}$
$-27x = 40\frac{1}{2} \qquad / : (-27)$
$x = \frac{40\frac{1}{2}}{-27}$
$x = -1\frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$f''(-1\frac{1}{2}) = -60\frac{3}{4}$

$f''(-1\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{Hochpunkt:}(-1\frac{1}{2}/11\frac{25}{64})}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1\frac{1}{2}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1\frac{1}{2}; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -81x^2 - 81x = 0$
$x(-81x - 81) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -81x - 81 = 0$
$-81x - 81 = 0 \qquad / + 81$
$-81x = 81 \qquad / : (-81)$
$x = \frac{81}{-81}$
$x = -1$
$\underline{x_5 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1) = 6\frac{3}{4}$
$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1/6\frac{3}{4})}$
$f'''(0) = 0$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/0)}$

• Kruemmung

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

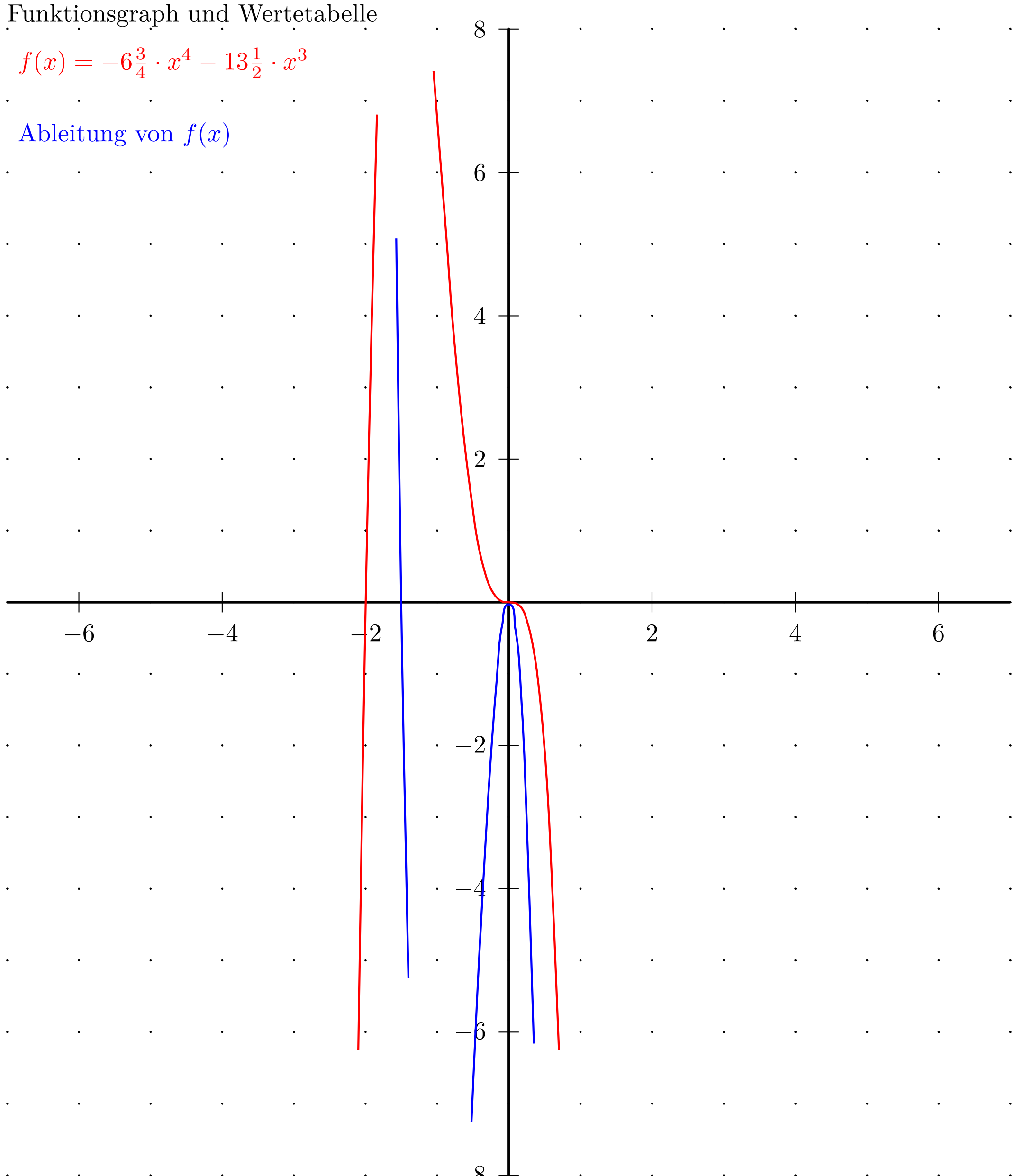
$\underline{x \in]-1; 0[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{0} \left(-6\frac{3}{4}x^4 - 13\frac{1}{2}x^3\right) dx = \left[-1\frac{7}{20}x^5 - 3\frac{3}{8}x^4\right]_{-2}^{0}$$
$$= \left(-1\frac{7}{20} \cdot 0^5 - 3\frac{3}{8} \cdot 0^4\right) - \left(-1\frac{7}{20} \cdot (-2)^5 - 3\frac{3}{8} \cdot (-2)^4\right)$$
$$= (0) - \left(-10\frac{4}{5}\right) = 10\frac{4}{5}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-11576\frac{1}{4}$	$7,28 \cdot 10^3$	$-3,4 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-8341\frac{47}{64}$	$5,7 \cdot 10^3$	$-2,9 \cdot 10^3$
-6	$-5,83 \cdot 10^3$	$4,37 \cdot 10^3$	$-2,43 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-3930\frac{39}{64}$	$3,27 \cdot 10^3$	$-2 \cdot 10^3$
-5	$-2531\frac{1}{4}$	$2,36 \cdot 10^3$	$-1,62 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-1537\frac{47}{64}$	$1,64 \cdot 10^3$	$-1,28 \cdot 10^3$
-4	-864	$1,08 \cdot 10^3$	-972
$-3\frac{1}{2}$	$-434\frac{7}{64}$	662	-709
-3	$-182\frac{1}{4}$	365	-486
$-2\frac{1}{2}$	$-52\frac{47}{64}$	169	-304
-2	0	54	-162
$-1\frac{1}{2}$	$11\frac{25}{64}$	$0,00827$	$-60,8$
-1	$6\frac{3}{4}$	$-13,5$	$-0,00413$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{17}{64}$	$-6\frac{3}{4}$	$20,2$
0	0	$-0,00413$	$-0,00413$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,00413$	$-0,00413$
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{7}{64}$	$-13,5$	$-60,8$
1	$-20\frac{1}{4}$	$-67,5$	-162
$1\frac{1}{2}$	$-79\frac{47}{64}$	-182	-304
2	-216	-378	-486
$2\frac{1}{2}$	$-474\frac{39}{64}$	-675	-709
3	$-911\frac{1}{4}$	$-1,09 \cdot 10^3$	-972
$3\frac{1}{2}$	$-1591\frac{47}{64}$	$-1,65 \cdot 10^3$	$-1,28 \cdot 10^3$
4	$-2,59 \cdot 10^3$	$-2,38 \cdot 10^3$	$-1,62 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$-3998\frac{7}{64}$	$-3,28 \cdot 10^3$	$-2 \cdot 10^3$
5	$-5906\frac{1}{4}$	$-4,39 \cdot 10^3$	$-2,43 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$-8422\frac{47}{64}$	$-5,72 \cdot 10^3$	$-2,9 \cdot 10^3$
6	$-1,17 \cdot 10^4$	$-7,29 \cdot 10^3$	$-3,4 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$-15756\frac{39}{64}$	$-9,13 \cdot 10^3$	$-3,95 \cdot 10^3$
7	$-20837\frac{1}{4}$	$-1,12 \cdot 10^4$	$-4,54 \cdot 10^3$

Aufgabe (8)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - 2\frac{2}{3}x^2 - 8x = \frac{2}{3}(x+3)(x+2)x(x-2)$
$f'(x) = 2\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 5\frac{1}{3}x - 8 = 2\frac{2}{3}(x+2,57)(x+0,93)(x-1,25)$
$f''(x) = 8x^2 + 12x - 5\frac{1}{3} = 8(x+1,86)(x-0,359)$
$f'''(x) = 16x + 12$
$F(x) = \int(\frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - 2\frac{2}{3}x^2 - 8x)dx = \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{9}x^3 - 4x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-8,63),\infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(\frac{2}{3} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\frac{2}{3}}{x^2} - \dfrac{8}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{2}{3} \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{2}{3} \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{2}{3} \cdot (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^3 - 2\frac{2}{3} \cdot (-x)^2 - 8 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - 2\frac{2}{3}x^2 - 8x = 0$
$x(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8 = 0$
$\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}x - 8 = 0$
$Numerische Suche:$
$\underline{x_1 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-2;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-3;-2[\quad \cup \quad]0;2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 5\frac{1}{3}x - 8 = 0$

$2\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 5\frac{1}{3}x - 8 = 0$
$Numerische Suche:$
$\underline{x_5 = -2,57;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = -0,93;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 1,25;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,57) = 16,8 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2,57/-1,92)}$
$f''(-0,93) = -9,58$
$f''(-0,93) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,93/4,02)}$
$f''(1,25) = 22,3 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1,25/-8,63)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,57$	$< x <$	$-0,93$	$< x <$	$1,25$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2,57;-0,93[\quad \cup \quad]1,25;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$x \in]-\infty; -2,57[\quad \cup \quad]-0,93; 1,25[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 8x^2 + 12x - 5\frac{1}{3} = 0$

$8x^2 + 12x - 5\frac{1}{3} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 8 \cdot \left(-5\frac{1}{3}\right)}}{2 \cdot 8}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{314\frac{2}{3}}}{16}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm 17,7}{16}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 17,7}{16} \qquad x_2 = \frac{-12 - 17,7}{16}$$

$x_1 = 0,359 \qquad x_2 = -1,86$

$x_8 = -1,86;$ 1-fache Nullstelle

$x_9 = 0,359;$ 1-fache Nullstelle

$f'''(-1,86) = 0,771$

$f'''(-1,86) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(-1,86/0,771)$

$f'''(0,359) = -3,11$

$f'''(0,359) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(0,359/-3,11)$

• Kruemmung

	$x <$	$-1,86$	$< x <$	$0,359$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,86[\quad \cup \quad]0,359; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-1,86; 0,359[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-3}^{-2} \left(\frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - 2\frac{2}{3}x^2 - 8x\right) dx = \left[\frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{9}x^3 - 4x^2\right]_{-3}^{-2}$$

$$= \left(\frac{2}{15} \cdot (-2)^5 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^4 - \frac{8}{9} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2\right) - \left(\frac{2}{15} \cdot (-3)^5 + \frac{1}{2} \cdot (-3)^4 - \frac{8}{9} \cdot (-3)^3 - 4 \cdot (-3)^2\right)$$

$$= \left(-5\frac{7}{45}\right) - \left(-3\frac{9}{10}\right) = -1\frac{23}{90}$$

$$A = \int_{-2}^{0} \left(\frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - 2\frac{2}{3}x^2 - 8x\right) dx = \left[\frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{9}x^3 - 4x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= \left(\frac{2}{15} \cdot 0^5 + \frac{1}{2} \cdot 0^4 - \frac{8}{9} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{2}{15} \cdot (-2)^5 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^4 - \frac{8}{9} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2\right)$$

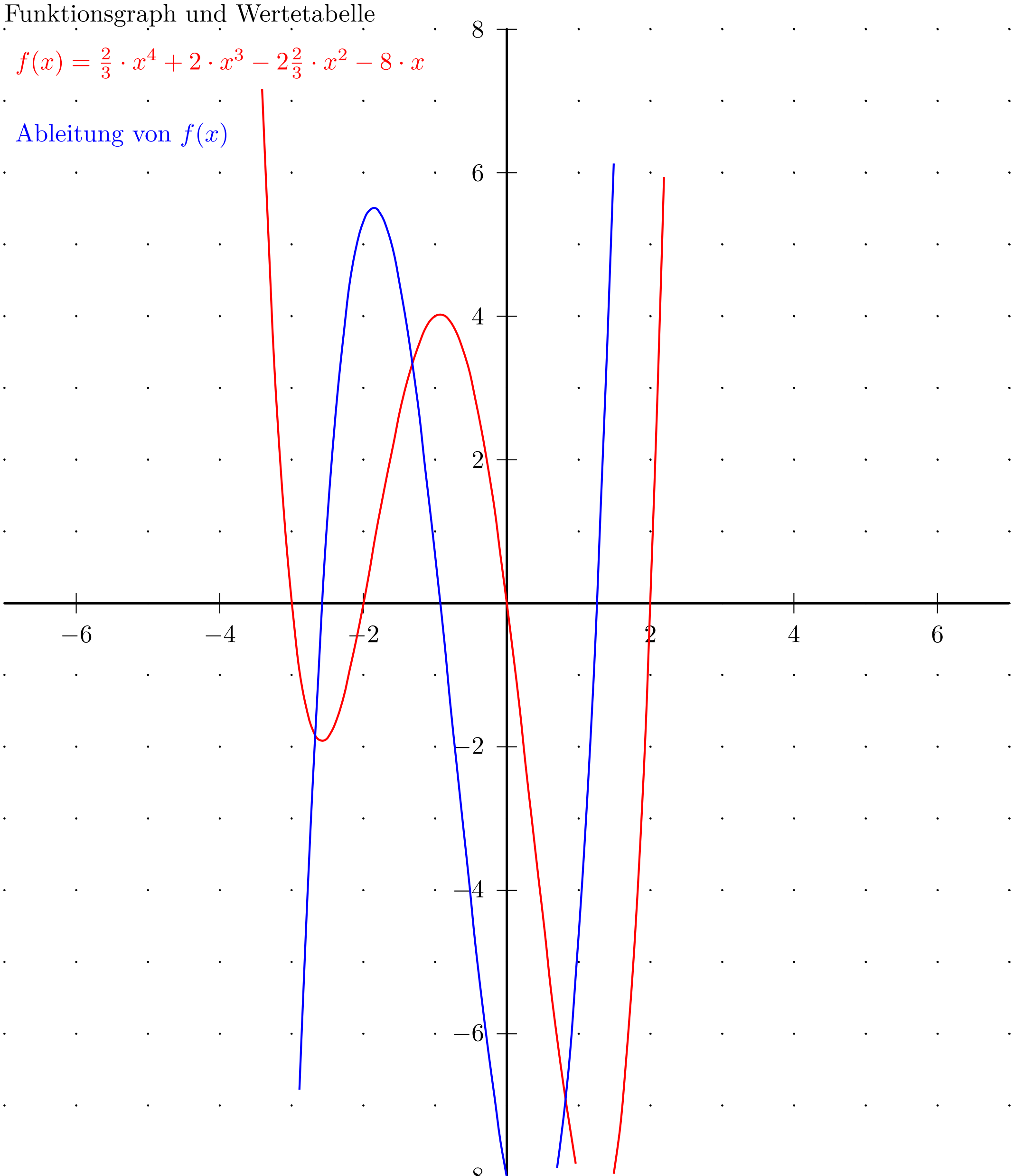
$$= (0) - \left(-5\frac{7}{45}\right) = 5\frac{7}{45}$$

$$A = \int_{0}^{2} \left(\frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - 2\frac{2}{3}x^2 - 8x\right) dx = \left[\frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{9}x^3 - 4x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \left(\frac{2}{15} \cdot 2^5 + \frac{1}{2} \cdot 2^4 - \frac{8}{9} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2\right) - \left(\frac{2}{15} \cdot 0^5 + \frac{1}{2} \cdot 0^4 - \frac{8}{9} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2\right)$$

$$= \left(-10\frac{38}{45}\right) - (0) = -10\frac{38}{45}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	840	-591	303
$-6\frac{1}{2}$	$580\frac{1}{8}$	-452	255
-6	384	-336	211
$-5\frac{1}{2}$	$240\frac{5}{8}$	-241	171
-5	140	-165	135
$-4\frac{1}{2}$	$73\frac{1}{8}$	-106	103
-4	32	$-61,3$	$74,7$
$-3\frac{1}{2}$	$9\frac{5}{8}$	$-30,2$	$50,7$
-3	0	-10	$30,7$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{8}$	$1,17$	$14,7$
-2	0	$5,33$	$2,67$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{8}$	$4,5$	$-5,33$
-1	4	$0,666$	$-9,33$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{8}$	$-4,17$	$-9,33$
0	0	-8	$-5,33$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-8	$-5,33$
$\frac{1}{2}$	$-4\frac{3}{8}$	$-8,83$	$2,67$
1	-8	$-4,67$	$14,7$
$1\frac{1}{2}$	$-7\frac{7}{8}$	$6,5$	$30,7$
2	0	$26,7$	$50,7$
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{5}{8}$	$57,8$	$74,7$
3	60	102	103
$3\frac{1}{2}$	$125\frac{1}{8}$	161	135
4	224	237	171
$4\frac{1}{2}$	$365\frac{5}{8}$	333	211
5	560	449	255
$5\frac{1}{2}$	$818\frac{1}{8}$	588	303
6	$1,15 \cdot 10^3$	752	355
$6\frac{1}{2}$	$1574\frac{5}{8}$	943	411
7	$2,1 \cdot 10^3$	$1,16 \cdot 10^3$	471

Aufgabe (9)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = -\frac{1}{4}x^3(x - 2\frac{2}{3})$
$f'(x) = -x^3 + 2x^2 = -x^2(x - 2)$
$f''(x) = -3x^2 + 4x = -3x(x - 1\frac{1}{3})$
$f'''(x) = -6x + 4$
$F(x) = \int(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3)dx = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 1\frac{1}{3}[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-\frac{1}{4} + \frac{\frac{2}{3}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot \infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-x)^3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = 0$
$x^3(-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0$
$-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0 \qquad / - \frac{2}{3}$
$-\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3} \qquad / : (-\frac{1}{4})$
$x = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{4}}$
$x = 2\frac{2}{3}$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2\frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	$2\frac{2}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0; 2\frac{2}{3}[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]2\frac{2}{3}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -x^3 + 2x^2 = 0$
$x^2(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x + 2 = 0$
$-1x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-1x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = \frac{-2}{-1}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/0)}$
$f''(2) = -4$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/1\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 2[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -3x^2 + 4x = 0$
$x(-3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3x + 4 = 0$
$-3x + 4 = 0 \qquad / -4$
$-3x = -4 \qquad / : (-3)$
$x = \frac{-4}{-3}$
$x = 1\frac{1}{3}$
$x_5 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle
$x_6 = 1\frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f'''(0) = 0$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(0/0)$
$f'''(1\frac{1}{3}) = \frac{64}{81}$
$f'''(1\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(1\frac{1}{3}/\frac{64}{81})$
• Kruemmung

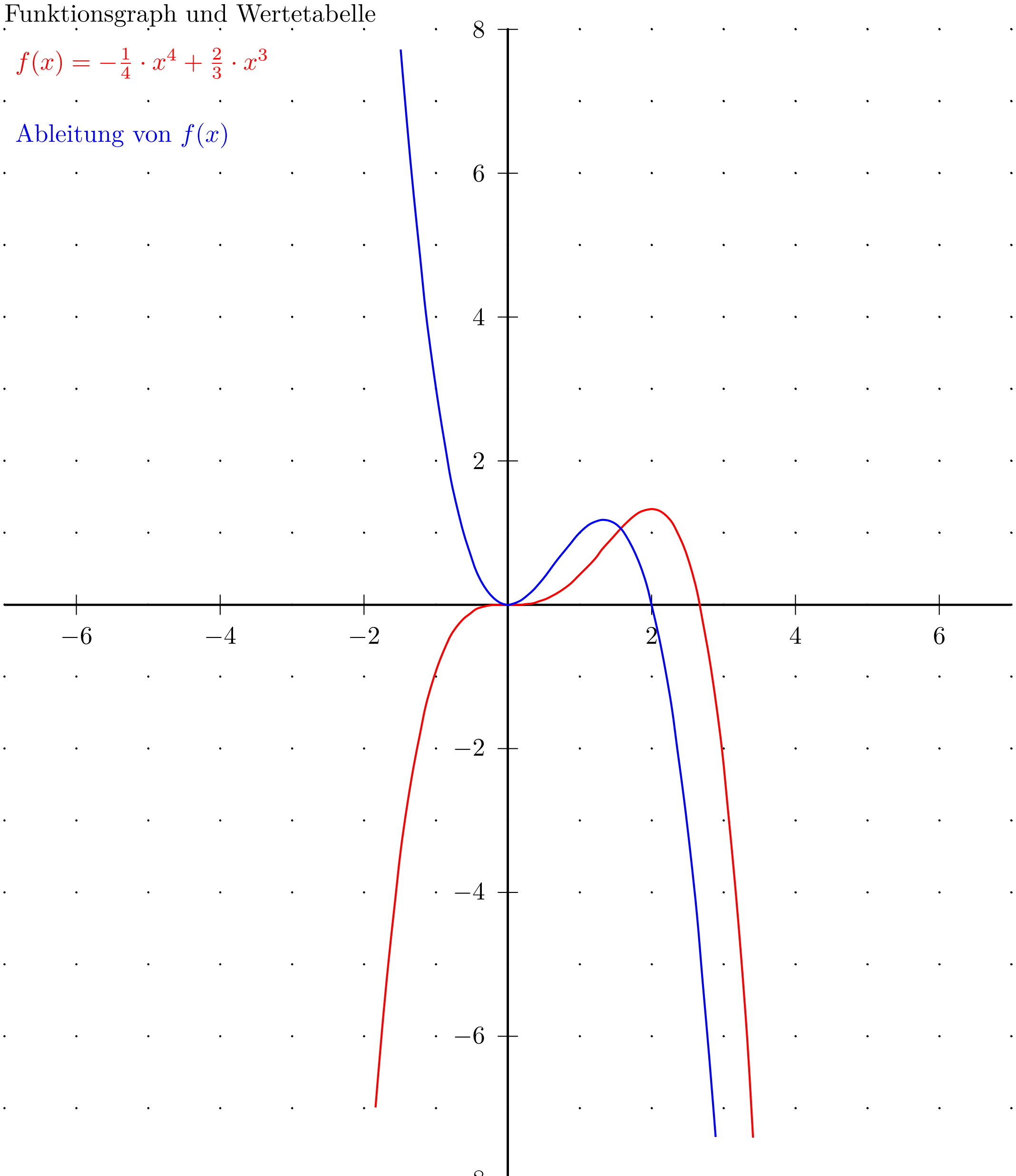
	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0; 1\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]1\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^{2\frac{2}{3}} \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right) dx = \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4\right]_0^{2\frac{2}{3}}$$
$$= \left(-\frac{1}{20} \cdot 2\frac{2}{3}^5 + \frac{1}{6} \cdot 2\frac{2}{3}^4\right) - \left(-\frac{1}{20} \cdot 0^5 + \frac{1}{6} \cdot 0^4\right)$$
$$= (1,69) - (0) = 1,69$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-828\frac{11}{12}$	441	-175
$-6\frac{1}{2}$	-629	359	-153
-6	-468	288	-132
$-5\frac{1}{2}$	-340	227	-113
-5	$-239\frac{7}{12}$	175	-95
$-4\frac{1}{2}$	$-163\frac{17}{64}$	132	$-78,8$
-4	$-106\frac{2}{3}$	96	-64
$-3\frac{1}{2}$	$-66,1$	$67,4$	$-50,8$
-3	$-38\frac{1}{4}$	45	-39
$-2\frac{1}{2}$	$-20,2$	$28,1$	$-28,8$
-2	$-9\frac{1}{3}$	16	-20
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{33}{64}$	$7,88$	$-12,8$
-1	$-\frac{11}{12}$	3	-7
$-\frac{1}{2}$	$-0,099$	$0,625$	$-2,75$
0	0	$0,000204$	$-0,000153$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,000204$	$-0,000153$
$\frac{1}{2}$	$0,0677$	$0,375$	$1,25$
1	$\frac{5}{12}$	1	1
$1\frac{1}{2}$	$\frac{63}{64}$	$1,12$	$-0,75$
2	$1\frac{1}{3}$	$-0,000408$	-4
$2\frac{1}{2}$	$0,651$	$-3,13$	$-8,75$
3	$-2\frac{1}{4}$	-9	-15
$3\frac{1}{2}$	$-8,93$	$-18,4$	$-22,8$
4	$-21\frac{1}{3}$	-32	-32
$4\frac{1}{2}$	$-41\frac{49}{64}$	$-50,6$	$-42,8$
5	$-72\frac{11}{12}$	-75	-55
$5\frac{1}{2}$	-118	-106	$-68,8$
6	-180	-144	-84
$6\frac{1}{2}$	-263	-190	-101
7	$-371\frac{7}{12}$	-245	-119

Aufgabe (10)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = -\frac{1}{4}x^3(x - 2\frac{2}{3})$
$f'(x) = -x^3 + 2x^2 = -x^2(x - 2)$
$f''(x) = -3x^2 + 4x = -3x(x - 1\frac{1}{3})$
$f'''(x) = -6x + 4$
$F(x) = \int(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3)dx = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 1\frac{1}{3}[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-\frac{1}{4} + \frac{\frac{2}{3}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot \infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-x)^3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = 0$
$x^3(-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0$
$-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0 \qquad / -\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3} \qquad / : \left(-\frac{1}{4}\right)$
$x = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{4}}$
$x = 2\dfrac{2}{3}$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2\dfrac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	$2\frac{2}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0; 2\dfrac{2}{3}[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]2\dfrac{2}{3}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -x^3 + 2x^2 = 0$
$x^2(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x + 2 = 0$
$-1x + 2 = 0 \qquad / -2$
$-1x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = \dfrac{-2}{-1}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/0)}$
$f''(2) = -4$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/1\dfrac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;2[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]2;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = -3x^2 + 4x = 0$

$x(-3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3x + 4 = 0$

$-3x + 4 = 0 \qquad / - 4$

$-3x = -4 \qquad / : (-3)$

$x = \frac{-4}{-3}$

$x = 1\frac{1}{3}$

$x_5 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_6 = 1\frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f'''(0) = 0$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:(0/0)

$f'''(1\frac{1}{3}) = \frac{64}{81}$

$f'''(1\frac{1}{3}) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(1\frac{1}{3}/\frac{64}{81})$

• Kruemmung

	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0;1\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]1\frac{1}{3};\infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

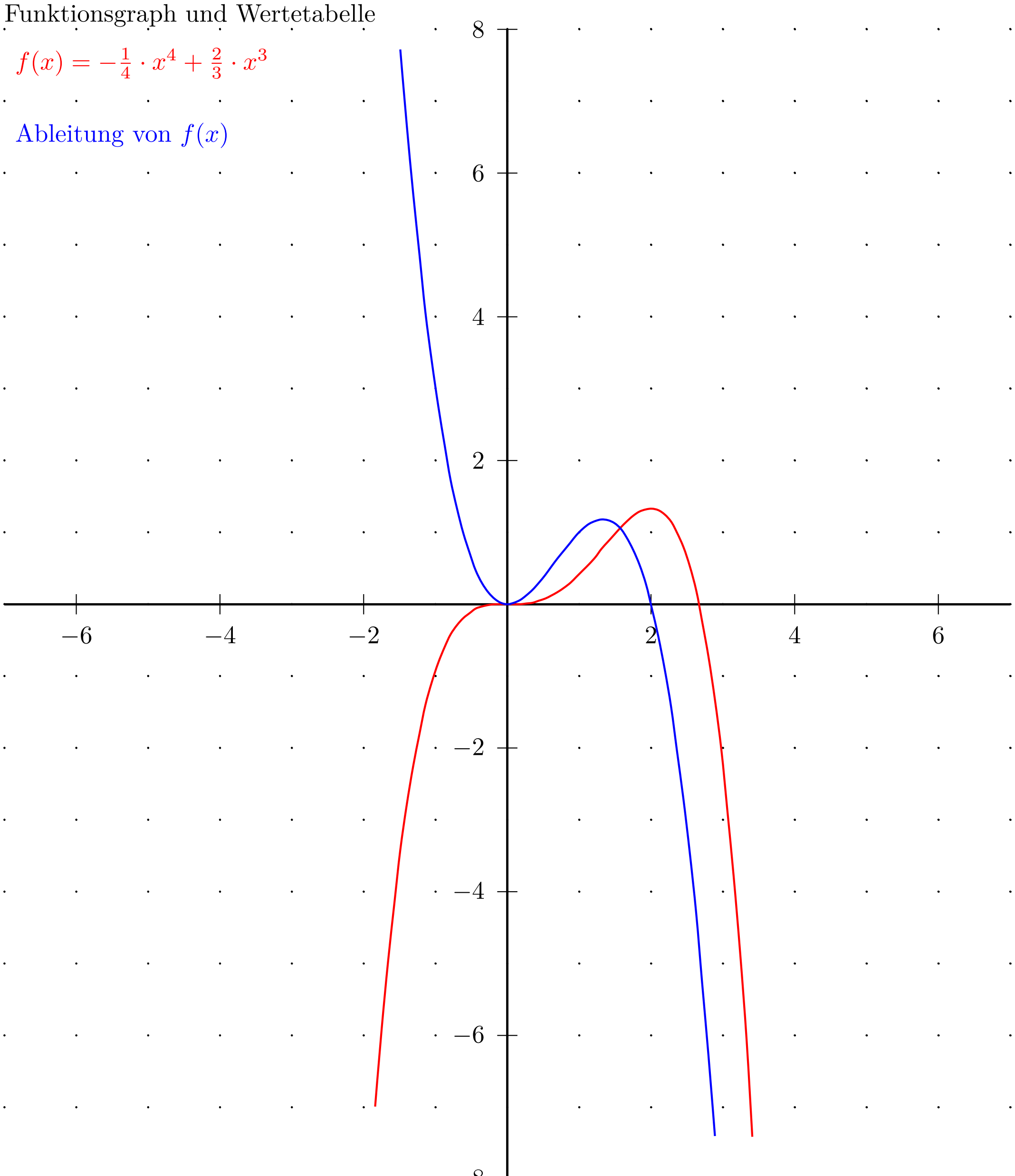
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_0^{2\frac{2}{3}} \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right) dx = \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4\right]_0^{2\frac{2}{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{20} \cdot 2\frac{2}{3}^5 + \frac{1}{6} \cdot 2\frac{2}{3}^4\right) - \left(-\frac{1}{20} \cdot 0^5 + \frac{1}{6} \cdot 0^4\right)$$

$$= (1,69) - (0) = 1,69$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-828\frac{11}{12}$	441	-175
$-6\frac{1}{2}$	-629	359	-153
-6	-468	288	-132
$-5\frac{1}{2}$	-340	227	-113
-5	$-239\frac{7}{12}$	175	-95
$-4\frac{1}{2}$	$-163\frac{17}{64}$	132	$-78,8$
-4	$-106\frac{2}{3}$	96	-64
$-3\frac{1}{2}$	$-66,1$	$67,4$	$-50,8$
-3	$-38\frac{1}{4}$	45	-39
$-2\frac{1}{2}$	$-20,2$	$28,1$	$-28,8$
-2	$-9\frac{1}{3}$	16	-20
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{33}{64}$	$7,88$	$-12,8$
-1	$-\frac{11}{12}$	3	-7
$-\frac{1}{2}$	$-0,099$	$0,625$	$-2,75$
0	0	$0,000204$	$-0,000153$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,000204$	$-0,000153$
$\frac{1}{2}$	$0,0677$	$0,375$	$1,25$
1	$\frac{5}{12}$	1	1
$1\frac{1}{2}$	$\frac{63}{64}$	$1,12$	$-0,75$
2	$1\frac{1}{3}$	$-0,000408$	-4
$2\frac{1}{2}$	$0,651$	$-3,13$	$-8,75$
3	$-2\frac{1}{4}$	-9	-15
$3\frac{1}{2}$	$-8,93$	$-18,4$	$-22,8$
4	$-21\frac{1}{3}$	-32	-32
$4\frac{1}{2}$	$-41\frac{49}{64}$	$-50,6$	$-42,8$
5	$-72\frac{11}{12}$	-75	-55
$5\frac{1}{2}$	-118	-106	$-68,8$
6	-180	-144	-84
$6\frac{1}{2}$	-263	-190	-101
7	$-371\frac{7}{12}$	-245	-119

Aufgabe (11)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 + 16$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$
$f'''(x) = 24x$
$F(x) = \int(x^4 + 16)dx = \frac{1}{5}x^5 + 16x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]16, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 + \dfrac{16}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 + 16$
$f(-x) = 1 \cdot x^4 + 16$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 + 16 = 0$

$1x^4 + 16 = 0 \qquad / - 16$
$1x^4 = -16 \qquad / : 1$
$x^4 = \dfrac{-16}{1}$
$x = \sqrt[4]{-16}$
keine Lösung
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 = 0$
$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_1 = 0;$ 3-fache Nullstelle
$f''(0) = 16$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
Extremwert:(0/16)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

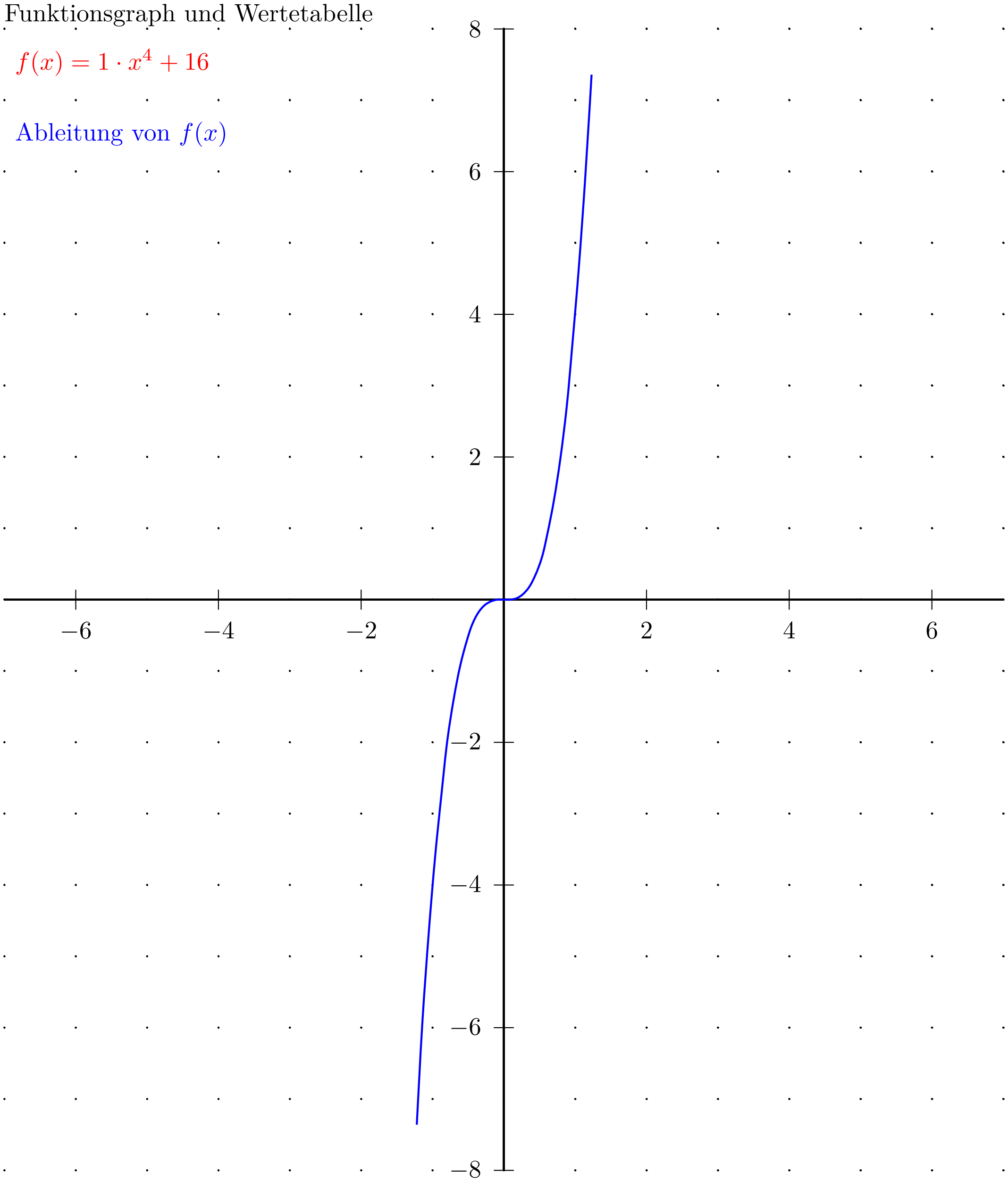
• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_2 = 0;$ 2-fache Nullstelle
• Kruemmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2,42 \cdot 10^3$	$-1,37 \cdot 10^3$	588
$-6\frac{1}{2}$	$1801\frac{1}{16}$	$-1,1 \cdot 10^3$	507
-6	$1,31 \cdot 10^3$	-864	432
$-5\frac{1}{2}$	$931\frac{1}{16}$	-666	363
-5	641	-500	300
$-4\frac{1}{2}$	$426\frac{1}{16}$	-365	243
-4	272	-256	192
$-3\frac{1}{2}$	$166\frac{1}{16}$	-172	147
-3	97	-108	108
$-2\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{16}$	$-62,5$	75
-2	32	-32	48
$-1\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{16}$	$-13,5$	27
-1	17	-4	12
$-\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{16}$	$-0,501$	3
0	16	0	$0,000612$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	16	0	$0,000612$
$\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{16}$	$0,501$	3
1	17	4	12
$1\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{16}$	$13,5$	27
2	32	32	48
$2\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{16}$	$62,5$	75
3	97	108	108
$3\frac{1}{2}$	$166\frac{1}{16}$	172	147
4	272	256	192
$4\frac{1}{2}$	$426\frac{1}{16}$	365	243
5	641	500	300
$5\frac{1}{2}$	$931\frac{1}{16}$	666	363
6	$1,31 \cdot 10^3$	864	432
$6\frac{1}{2}$	$1801\frac{1}{16}$	$1,1 \cdot 10^3$	507
7	$2,42 \cdot 10^3$	$1,37 \cdot 10^3$	588

Aufgabe (12)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 - 16 = (x+2)(x-2)(x^2+4)$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$
$f'''(x) = 24x$
$F(x) = \int (x^4 - 16)dx = \frac{1}{5}x^5 - 16x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-16), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 - \dfrac{16}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 16$
$f(-x) = 1 \cdot x^4 - 16$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 - 16 = 0$

$1x^4 - 16 = 0 \qquad / + 16$
$1x^4 = 16 \qquad / : 1$
$x^4 = \dfrac{16}{1}$
$x = \sqrt[4]{16}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
Polynomdivision:$(x+2)((x-2)$

$$\begin{array}{l}
(x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad -16 \quad) : (x^2 - 4) = x^2 + 4 \\
-(x^4 \qquad -4x^2) \\
\hline
\qquad 4x^2 \qquad\qquad -16 \\
\qquad\qquad -(4x^2 \qquad -16) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$1x^2 + 4 = 0 \qquad / - 4$
$1x^2 = -4 \qquad / : 1$
$x^2 = \dfrac{-4}{1}$
keine Lösung
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 = 0$
$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -16$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$
Extremwert:$(0/-16)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;0[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_4 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle
• Kruemmung

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

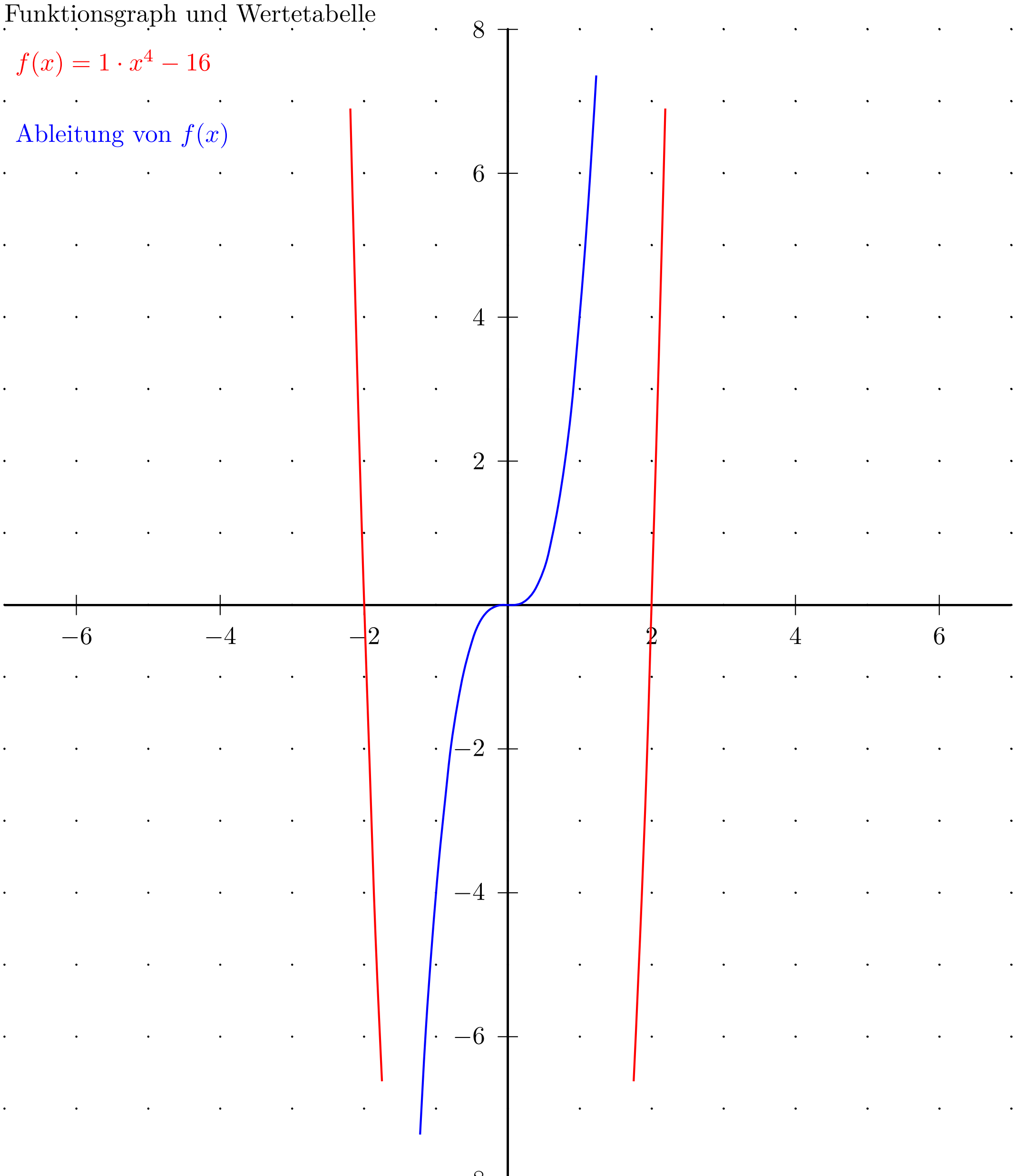
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 16\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 16x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - 16 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 - 16 \cdot (-2)\right)$$

$$= \left(-25\frac{3}{5}\right) - \left(25\frac{3}{5}\right) = -51\frac{1}{5}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2,39 \cdot 10^3$	$-1,37 \cdot 10^3$	588
$-6\frac{1}{2}$	$1769\frac{1}{16}$	$-1,1 \cdot 10^3$	507
-6	$1,28 \cdot 10^3$	-864	432
$-5\frac{1}{2}$	$899\frac{1}{16}$	-666	363
-5	609	-500	300
$-4\frac{1}{2}$	$394\frac{1}{16}$	-365	243
-4	240	-256	192
$-3\frac{1}{2}$	$134\frac{1}{16}$	-172	147
-3	65	-108	108
$-2\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{16}$	$-62,5$	75
-2	0	-32	48
$-1\frac{1}{2}$	$-10\frac{15}{16}$	$-13,5$	27
-1	-15	-4	12
$-\frac{1}{2}$	$-15\frac{15}{16}$	$-0,501$	3
0	-16	0	$0,000612$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-16	0	$0,000612$
$\frac{1}{2}$	$-15\frac{15}{16}$	$0,501$	3
1	-15	4	12
$1\frac{1}{2}$	$-10\frac{15}{16}$	$13,5$	27
2	0	32	48
$2\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{16}$	$62,5$	75
3	65	108	108
$3\frac{1}{2}$	$134\frac{1}{16}$	172	147
4	240	256	192
$4\frac{1}{2}$	$394\frac{1}{16}$	365	243
5	609	500	300
$5\frac{1}{2}$	$899\frac{1}{16}$	666	363
6	$1,28 \cdot 10^3$	864	432
$6\frac{1}{2}$	$1769\frac{1}{16}$	$1,1 \cdot 10^3$	507
7	$2,39 \cdot 10^3$	$1,37 \cdot 10^3$	588

Aufgabe (13)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 - 3x^3 = x^3(x-3)$
$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 = 4x^2(x - 2\frac{1}{4})$
$f''(x) = 12x^2 - 18x = 12x(x - 1\frac{1}{2})$
$f'''(x) = 24x - 18$
$F(x) = \int (x^4 - 3x^3)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-8,54), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 - \dfrac{3}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 - 3x^3 = 0$
$x^3(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x - 3 = 0$
$x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$x = 3$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]0;3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 = 0$
$x^2(4x - 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x - 9 = 0$
$4x - 9 = 0 \qquad / + 9$
$4x = 9 \qquad / : 4$
$x = \dfrac{9}{4}$
$x = 2\dfrac{1}{4}$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2\dfrac{1}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/0)}$
$f''(2\dfrac{1}{4}) = 20\dfrac{1}{4} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2\dfrac{1}{4}/-8,54)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	$2\frac{1}{4}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]2\frac{1}{4}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 2\frac{1}{4}[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 - 18x = 0$
$x(12x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 12x - 18 = 0$
$12x - 18 = 0 \qquad / + 18$
$12x = 18 \qquad / : 12$
$x = \frac{18}{12}$
$x = 1\frac{1}{2}$
$x_5 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle
$x_6 = 1\frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f'''(0) = 0$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:(0/0)
$f'''(1\frac{1}{2}) = -5\frac{1}{16}$
$f'''(1\frac{1}{2}) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(1\frac{1}{2}/ - 5\frac{1}{16})$
• Kruemmung

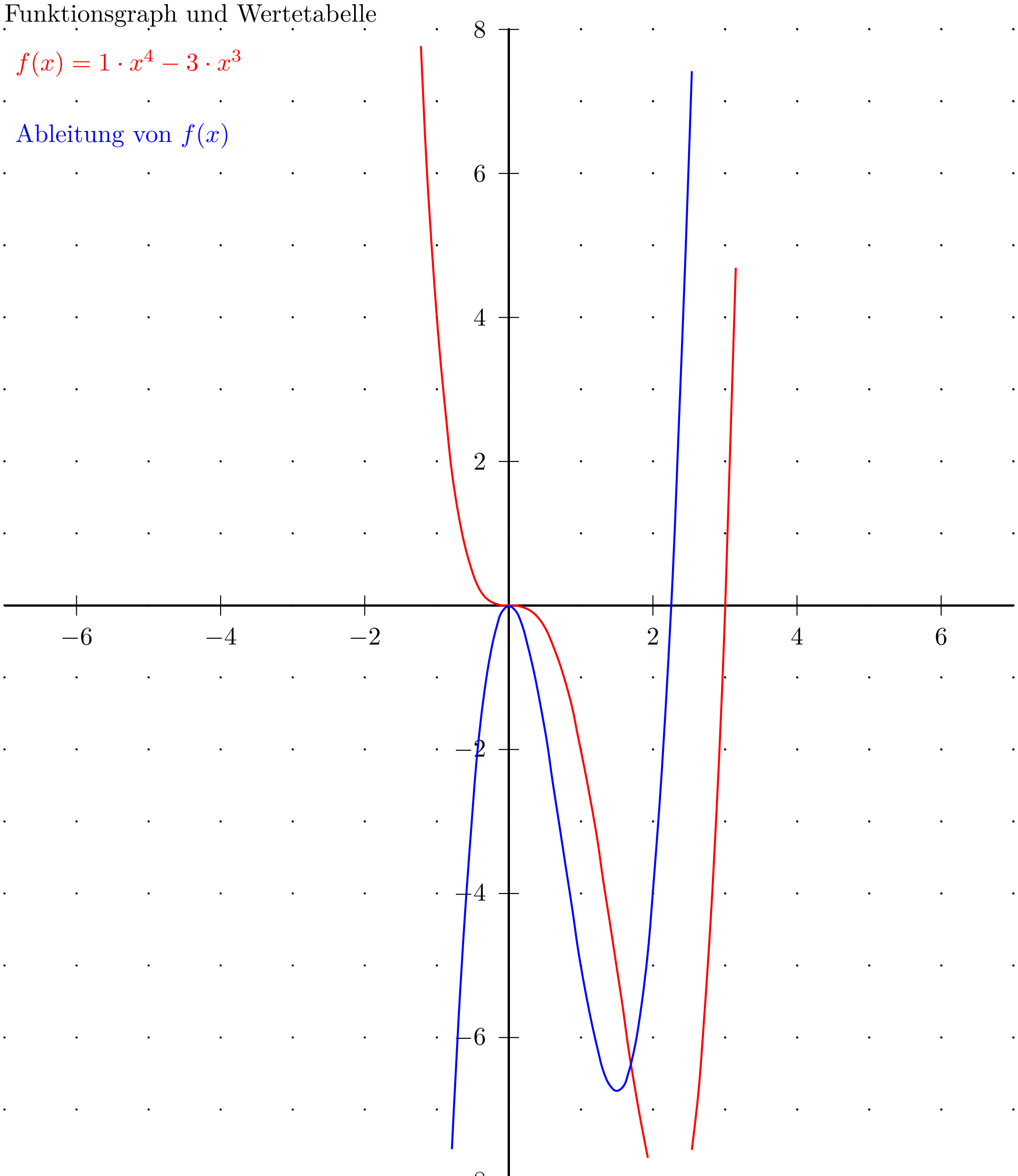
	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]0; 1\frac{1}{2}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^3 \left(x^4 - 3x^3\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^3$$
$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 3^5 - \frac{3}{4} \cdot 3^4\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 0^5 - \frac{3}{4} \cdot 0^4\right)$$
$$= \left(-12\frac{3}{20}\right) - (0) = -12\frac{3}{20}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$3,43 \cdot 10^3$	$-1,81 \cdot 10^3$	714
$-6\frac{1}{2}$	$2608\frac{15}{16}$	$-1,48 \cdot 10^3$	624
-6	$1,94 \cdot 10^3$	$-1,19 \cdot 10^3$	540
$-5\frac{1}{2}$	$1414\frac{3}{16}$	-938	462
-5	10^3	-725	390
$-4\frac{1}{2}$	$683\frac{7}{16}$	-547	324
-4	448	-400	264
$-3\frac{1}{2}$	$278\frac{11}{16}$	-282	210
-3	162	-189	162
$-2\frac{1}{2}$	$85\frac{15}{16}$	-119	120
-2	40	-68	84
$-1\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{16}$	$-33,8$	54
-1	4	-13	30
$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$-2,75$	12
0	0	$-0,000919$	$0,000612$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,000919$	$0,000612$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{16}$	$-1,75$	-6
1	-2	-5	-6
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{16}$	$-6,75$	$0,000613$
2	-8	-4	12
$2\frac{1}{2}$	$-7\frac{13}{16}$	$6,25$	30
3	0	27	54
$3\frac{1}{2}$	$21\frac{7}{16}$	$61,3$	84
4	64	112	120
$4\frac{1}{2}$	$136\frac{11}{16}$	182	162
5	250	275	210
$5\frac{1}{2}$	$415\frac{15}{16}$	393	264
6	648	540	324
$6\frac{1}{2}$	$961\frac{3}{16}$	718	390
7	$1,37 \cdot 10^3$	931	462

Aufgabe (14)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x = \frac{1}{2}(x^2 - 1,59x + 2,52)(x + 1,59)x$
$f'(x) = 2x^3 + 2 = 2(x^2 - x + 1)(x + 1)$
$f''(x) = 6x^2 = 6x^2$
$f'''(x) = 12x$
$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^4 + 2x)dx = \frac{1}{10}x^5 + x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-1\frac{1}{2}), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(\frac{1}{2} + \dfrac{2}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^4 + 2 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x = 0$
$x(\frac{1}{2}x^3 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^3 + 2 = 0$
$\frac{1}{2}x^3 + 2 = 0\frac{1}{2}x^3 + 2 = 0 \qquad / - 2$
$\frac{1}{2}x^3 = -2 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x^3 = \dfrac{-2}{\frac{1}{2}}$
$x = \sqrt[3]{-4}$
$x = -1,59$
Polynomdivision:$(-1,59)$

$$\begin{array}{llll}
(\frac{1}{2}x^3 & & & +2 \quad) : (x + 1,59) = \frac{1}{2}x^2 - 0,794x + 1,26 \\
-(\frac{1}{2}x^3 & +0,794x^2) & & \\
\hline
& -0,794x^2 & & +2 \\
& -(-0,794x^2 & -1,26x) & \\
\hline
& & 1,26x & +2 \\
& & -(1,26x & +2) \\
\hline
& & & 0
\end{array}$$

$\dfrac{1}{2}x^2 - 0,794x + 1,26 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+0,794 \pm \sqrt{(-0,794)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,26}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$
$x_{1/2} = \dfrac{+0,794 \pm \sqrt{-1,89}}{1}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_1 = -1,59; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,59$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1,59[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1,59; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = 2x^3 + 2 = 0$

$2x^3 + 2 = 02x^3 + 2 = 0 \qquad / - 2$
$2x^3 = -2 \qquad / : 2$
$x^3 = \dfrac{-2}{2}$
$x = \sqrt[3]{-1}$
$x = -1$
Polynomdivision:(-1)

$$
\begin{array}{llll}
(2x^3 & & +2 &) : (x+1) = 2x^2 - 2x + 2 \\
-(2x^3 & +2x^2) & & \\
\hline
 & -2x^2 & +2 & \\
 & -(-2x^2 \quad -2x) & & \\
\hline
 & \quad 2x & +2 & \\
 & -(2x & +2) & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

$2x^2 - 2x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$
$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{-12}}{4}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1/-1\frac{1}{2})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 6x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
• Kruemmung

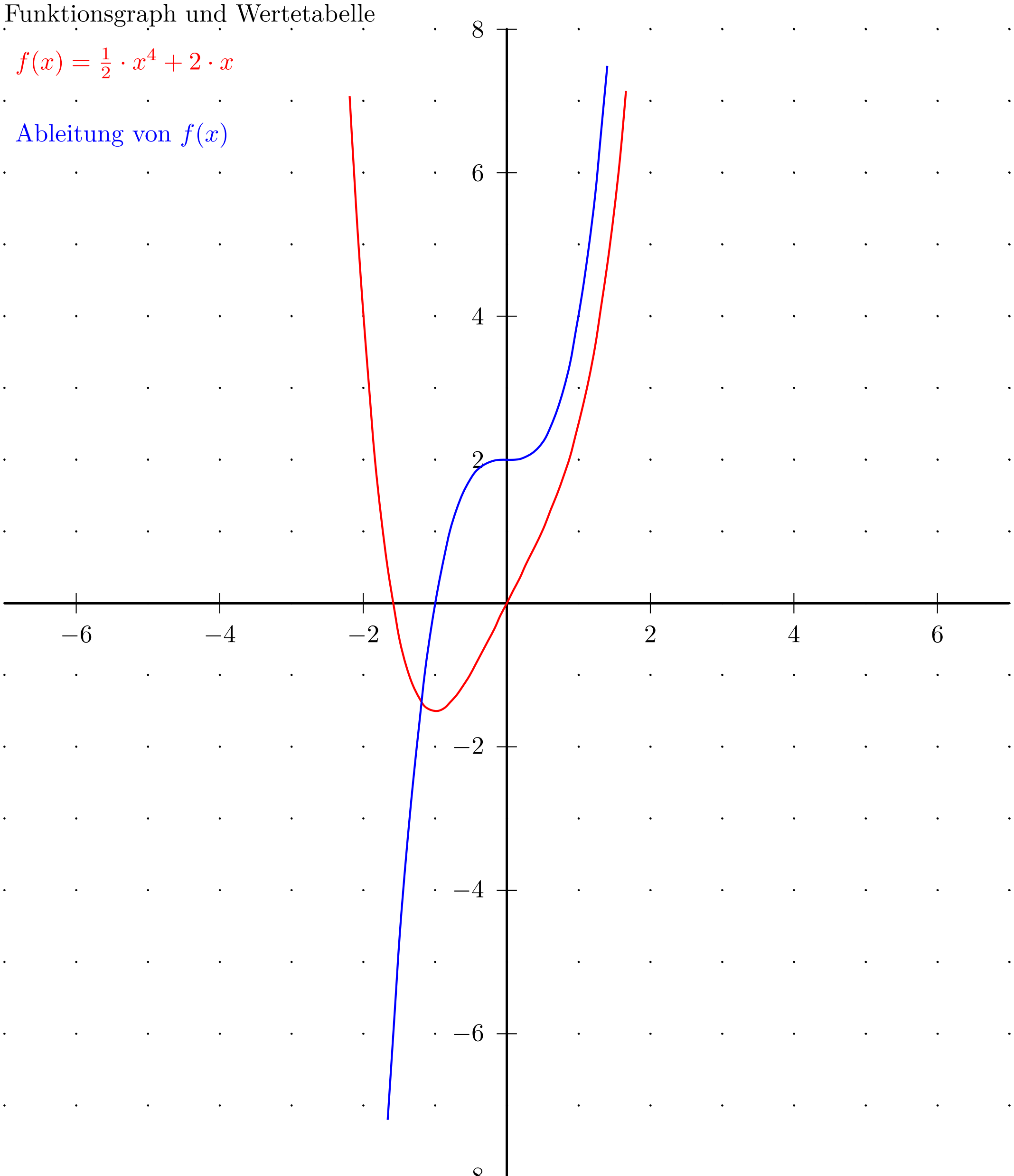
	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1,59}^{0} \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x\right) dx = \left[\frac{1}{10}x^5 + x^2\right]_{-1,59}^{0}$$
$$= \left(\frac{1}{10} \cdot 0^5 + 1 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{10} \cdot (-1,59)^5 + 1 \cdot (-1,59)^2\right)$$
$$= (0) - \left(1\frac{43}{84}\right) = -1\frac{43}{84}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1186\frac{1}{2}$	-684	294
$-6\frac{1}{2}$	$879\frac{17}{32}$	-547	254
-6	636	-430	216
$-5\frac{1}{2}$	$446\frac{17}{32}$	-331	182
-5	$302\frac{1}{2}$	-248	150
$-4\frac{1}{2}$	$196\frac{1}{32}$	-180	122
-4	120	-126	96
$-3\frac{1}{2}$	$68\frac{1}{32}$	$-83,8$	$73,5$
-3	$34\frac{1}{2}$	-52	54
$-2\frac{1}{2}$	$14\frac{17}{32}$	$-29,3$	$37,5$
-2	4	-14	24
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{32}$	$-4,75$	$13,5$
-1	$-1\frac{1}{2}$	$-0,000613$	6
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{31}{32}$	$1,75$	$1,5$
0	0	2	$0,000306$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	2	$0,000306$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{32}$	$2,25$	$1,5$
1	$2\frac{1}{2}$	4	6
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{17}{32}$	$8,75$	$13,5$
2	12	18	24
$2\frac{1}{2}$	$24\frac{17}{32}$	$33,3$	$37,5$
3	$46\frac{1}{2}$	56	54
$3\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{32}$	$87,8$	$73,5$
4	136	130	96
$4\frac{1}{2}$	$214\frac{1}{32}$	184	122
5	$322\frac{1}{2}$	252	150
$5\frac{1}{2}$	$468\frac{17}{32}$	335	182
6	660	434	216
$6\frac{1}{2}$	$905\frac{17}{32}$	551	254
7	$1214\frac{1}{2}$	688	294

Aufgabe (15)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + 2x^2 = -\frac{1}{6}(x+3,46)x^2(x-3,46)$
$f'(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x = -\frac{2}{3}(x+2,45)x(x-2,45)$
$f''(x) = -2x^2 + 4 = -2(x+1,41)(x-1,41)$
$f'''(x) = -4x$
$F(x) = \int(-\frac{1}{6}x^4 + 2x^2)dx = -\frac{1}{30}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 6[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-\frac{1}{6} + \dfrac{2}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-\frac{1}{6} \cdot \infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-\frac{1}{6} \cdot (-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -\frac{1}{6} \cdot (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2$
$f(-x) = -\frac{1}{6} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + 2x^2 = 0$
$x^2(-\frac{1}{6}x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0$
$-\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-\frac{1}{6}x^2 = -2 \qquad / : \left(-\frac{1}{6}\right)$
$x^2 = \dfrac{-2}{-\frac{1}{6}}$
$x = \pm\sqrt{12}$
$x_1 = 3,46 \qquad x_2 = -3,46$
$\underline{x_1 = -3,46; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 3,46; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,46$	$< x <$	0	$< x <$	$3,46$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-3,46; 0[\quad \cup \quad]0; 3,46[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -3,46[\quad \cup \quad]3,46; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + 4x = 0$
$x(-\dfrac{2}{3}x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\dfrac{2}{3}x^2 + 4 = 0$
$-\dfrac{2}{3}x^2 + 4 = 0 \qquad / - 4$
$-\dfrac{2}{3}x^2 = -4 \qquad / : \left(-\dfrac{2}{3}\right)$
$x^2 = \dfrac{-4}{-\frac{2}{3}}$
$x = \pm\sqrt{6}$
$x_1 = 2,45 \qquad x_2 = -2,45$
$\underline{x_4 = -2,45; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = 2,45; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,45) = -8$
$f''(-2,45) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2,45/6)}$
$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/0)}$
$f''(2,45) = -8$
$f''(2,45) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2,45/6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,45$	$< x <$	0	$< x <$	$2,45$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2,45[\quad \cup \quad]0; 2,45[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-2,45; 0[\quad \cup \quad]2,45; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -2x^2 + 4 = 0$

$-2x^2 + 4 = 0 \qquad / -4$
$-2x^2 = -4 \qquad / : (-2)$
$x^2 = \frac{-4}{-2}$
$x = \pm\sqrt{2}$
$x_1 = 1,41 \qquad x_2 = -1,41$
$\underline{x_7 = -1,41; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 1,41; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1,41) = 3\frac{1}{3}$
$f'''(-1,41) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1,41/3\frac{1}{3})}$
$f'''(1,41) = 3\frac{1}{3}$
$f'''(1,41) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1,41/3\frac{1}{3})}$

• Kruemmung

	$x <$	$-1,41$	$< x <$	$1,41$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

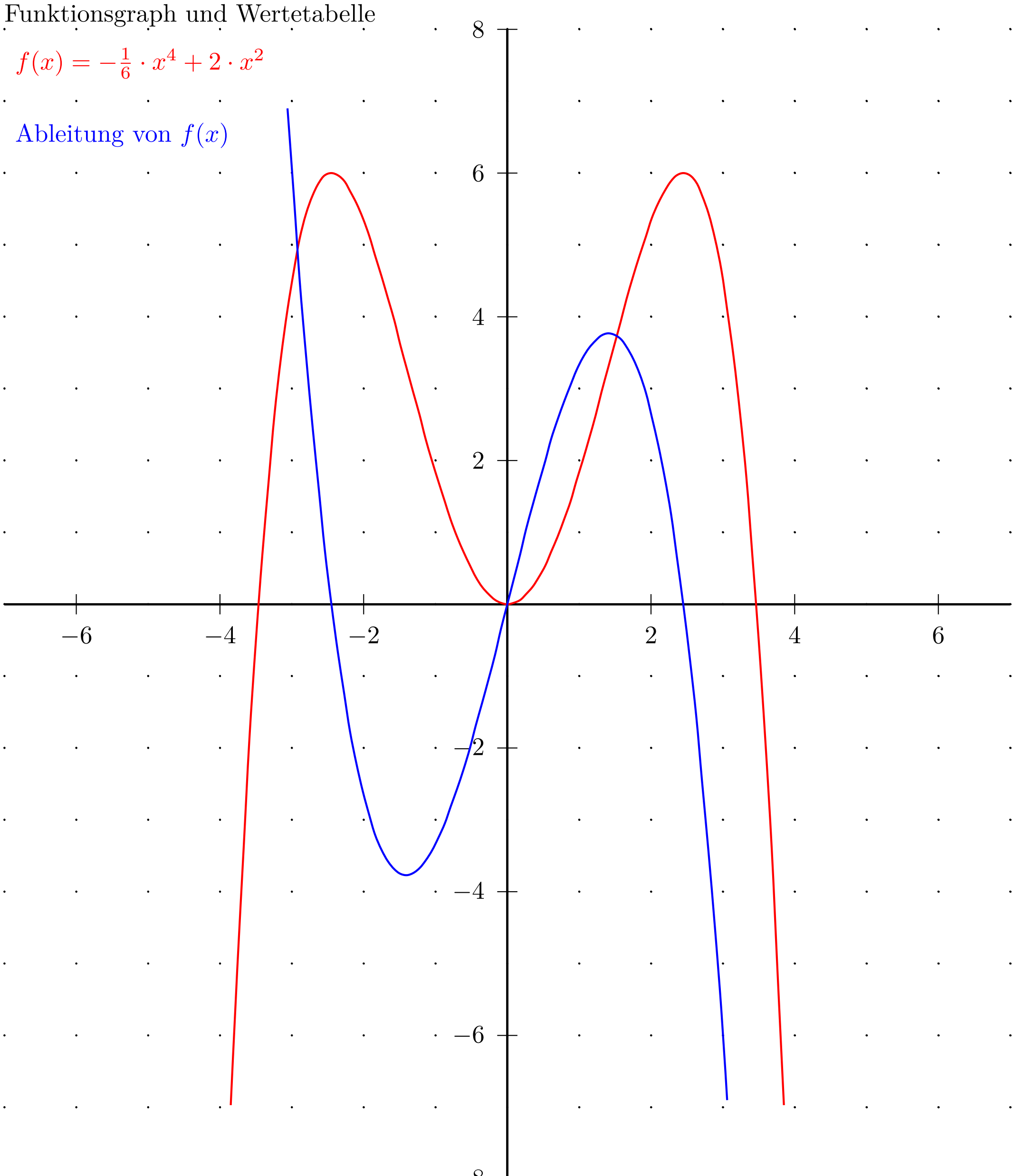
$x \in]-1,41; 1,41[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -1,41[\quad \cup \quad]1,41; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-3,46}^{0} \left(-\frac{1}{6}x^4 + 2x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{30}x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-3,46}^{0}$$
$$= \left(-\frac{1}{30} \cdot 0^5 + \frac{2}{3} \cdot 0^3\right) - \left(-\frac{1}{30} \cdot (-3,46)^5 + \frac{2}{3} \cdot (-3,46)^3\right)$$
$$= (0) - (-11,1) = 11,1$$
$$A = \int_{0}^{3,46} \left(-\frac{1}{6}x^4 + 2x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{30}x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{3,46}$$
$$= \left(-\frac{1}{30} \cdot 3,46^5 + \frac{2}{3} \cdot 3,46^3\right) - \left(-\frac{1}{30} \cdot 0^5 + \frac{2}{3} \cdot 0^3\right)$$
$$= (11,1) - (0) = 11,1$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-302\frac{1}{6}$	201	-94
$-6\frac{1}{2}$	$-213\frac{1}{96}$	157	$-80,5$
-6	-144	120	-68
$-5\frac{1}{2}$	$-92\frac{1}{96}$	$88,9$	$-56,5$
-5	$-54\frac{1}{6}$	$63,3$	-46
$-4\frac{1}{2}$	$-27\frac{27}{32}$	$42,8$	$-36,5$
-4	$-10\frac{2}{3}$	$26,7$	-28
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{49}{96}$	$14,6$	$-20,5$
-3	$4\frac{1}{2}$	6	-14
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{95}{96}$	$0,417$	$-8,5$
-2	$5\frac{1}{3}$	$-2,67$	-4
$-1\frac{1}{2}$	$3\frac{21}{32}$	$-3,75$	$-0,5$
-1	$1\frac{5}{6}$	$-3,33$	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{47}{96}$	$-1,92$	$3,5$
0	0	0	4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{96}$	$1,92$	$3,5$
1	$1\frac{5}{6}$	$3,33$	2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{21}{32}$	$3,75$	$-0,5$
2	$5\frac{1}{3}$	$2,67$	-4
$2\frac{1}{2}$	$5\frac{95}{96}$	$-0,417$	$-8,5$
3	$4\frac{1}{2}$	-6	-14
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{49}{96}$	$-14,6$	$-20,5$
4	$-10\frac{2}{3}$	$-26,7$	-28
$4\frac{1}{2}$	$-27\frac{27}{32}$	$-42,8$	$-36,5$
5	$-54\frac{1}{6}$	$-63,3$	-46
$5\frac{1}{2}$	$-92\frac{1}{96}$	$-88,9$	$-56,5$
6	-144	-120	-68
$6\frac{1}{2}$	$-213\frac{1}{96}$	-157	$-80,5$
7	$-302\frac{1}{6}$	-201	-94

Aufgabe (16)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 10)x^2$
$f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x = 2x(x-2)(x-2\frac{1}{2})$
$f''(x) = 6x^2 - 18x + 10 = 6(x-0,736)(x-2,26)$
$f'''(x) = 12x - 18$
$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2)dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 1\frac{2}{3}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(\frac{1}{2} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{2}\cdot\infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{2}\cdot(-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{2}\cdot(-x)^4 - 3\cdot(-x)^3 + 5\cdot(-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2 = 0$
$x^2(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$
$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 5}}{2\cdot\frac{1}{2}}$
$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{-1}}{1}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x = 0$
$x(2x^2 - 9x + 10) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x^2 - 9x + 10 = 0$

$2x^2 - 9x + 10 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4\cdot 2\cdot 10}}{2\cdot 2}$
$x_{1/2} = \dfrac{+9 \pm \sqrt{1}}{4}$
$x_{1/2} = \dfrac{9 \pm 1}{4}$
$x_1 = \dfrac{9+1}{4} \qquad x_2 = \dfrac{9-1}{4}$
$x_1 = 2\dfrac{1}{2} \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(0) = 10 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(0/0)
$f''(2) = -2$
$f''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:(2/4)
$f''(2\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(2\frac{1}{2}/3\frac{29}{32})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x <$	$2\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]0;2[\quad \cup \quad]2\frac{1}{2};\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]2;2\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 6x^2 - 18x + 10 = 0$

$6x^2 - 18x + 10 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 10}}{2 \cdot 6}$$

$$x_{1/2} = \frac{+18 \pm \sqrt{84}}{12}$$

$$x_{1/2} = \frac{18 \pm 9,17}{12}$$

$$x_1 = \frac{18 + 9,17}{12} \qquad x_2 = \frac{18 - 9,17}{12}$$

$x_1 = 2,26 \qquad x_2 = 0,736$
$x_5 = 0,736;$ 1-fache Nullstelle
$x_6 = 2,26;$ 1-fache Nullstelle
$f'''(0,736) = 1,66$
$f'''(0,736) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(0,736/1,66)$
$f'''(2,26) = 3,95$
$f'''(2,26) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(2,26/3,95)$
• Kruemmung

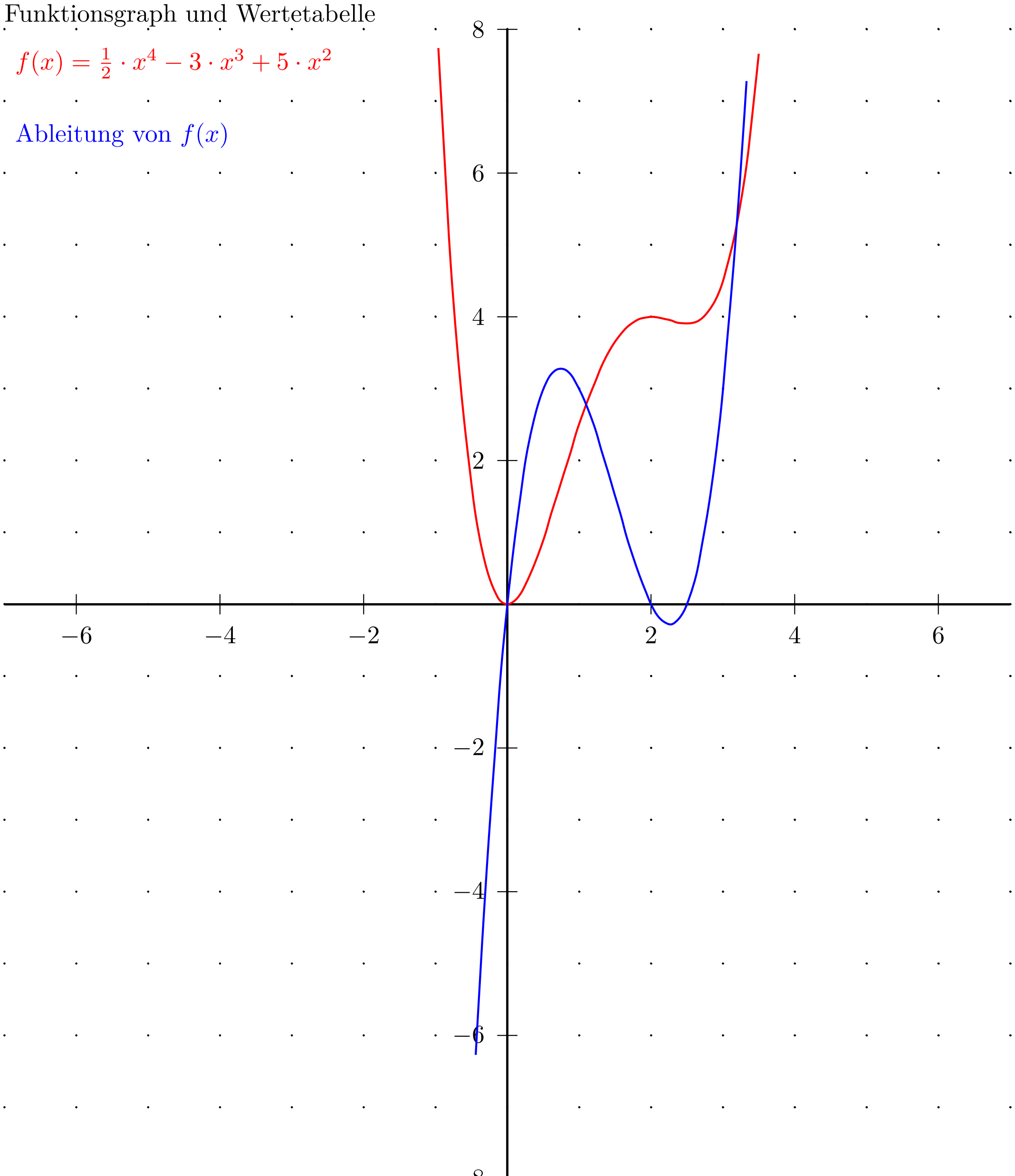
	$x <$	$0,736$	$< x <$	$2,26$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0,736[\quad \cup \quad]2,26;\infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0,736;2,26[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2474\frac{1}{2}$	$-1,2 \cdot 10^3$	430
$-6\frac{1}{2}$	$1927\frac{21}{32}$	-995	381
-6	$1,48 \cdot 10^3$	-816	334
$-5\frac{1}{2}$	$1107\frac{29}{32}$	-660	291
-5	$812\frac{1}{2}$	-525	250
$-4\frac{1}{2}$	$579\frac{21}{32}$	-410	213
-4	400	-312	178
$-3\frac{1}{2}$	$264\frac{29}{32}$	-231	147
-3	$166\frac{1}{2}$	-165	118
$-2\frac{1}{2}$	$97\frac{21}{32}$	-113	$92,5$
-2	52	-72	70
$-1\frac{1}{2}$	$23\frac{29}{32}$	-42	$50,5$
-1	$8\frac{1}{2}$	-21	34
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{21}{32}$	$-7,5$	$20,5$
0	0	$-0,000919$	10

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,000919$	10
$\frac{1}{2}$	$\frac{29}{32}$	3	$2,5$
1	$2\frac{1}{2}$	3	-2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{21}{32}$	$1\frac{1}{2}$	$-3,5$
2	4	$0,000306$	-2
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{29}{32}$	$0,000612$	$2,5$
3	$4\frac{1}{2}$	3	10
$3\frac{1}{2}$	$7\frac{21}{32}$	$10,5$	$20,5$
4	16	24	34
$4\frac{1}{2}$	$32\frac{29}{32}$	45	$50,5$
5	$62\frac{1}{2}$	75	70
$5\frac{1}{2}$	$109\frac{21}{32}$	116	$92,5$
6	180	168	118
$6\frac{1}{2}$	$279\frac{29}{32}$	234	147
7	$416\frac{1}{2}$	315	178

Aufgabe (17)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x = -(x+1)^2 x(x-2)$
$f'(x) = -4x^3 + 6x + 2 = -4(x+1)(x+0,366)(x-1,37)$
$f''(x) = -12x^2 + 6 = -12(x+0,707)(x-0,707)$
$f'''(x) = -24x$
$F(x) = \int(-x^4 + 3x^2 + 2x)dx = -\frac{1}{5}x^5 + x^3 + x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 4,85[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-1 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1 \cdot (-x)^4 + 3 \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x = 0$
$x(-x^3 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^3 + 3x + 2 = 0$
$-x^3 + 3x + 2 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{llll}
(-x^3 & & +3x & +2 \quad) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & x^2 & +3x & +2 \\
 & -(x^2 & +x) & \\
\hline
 & & 2x & +2 \\
 & & -(2x & +2) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$-x^2 + x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm 3}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-1-3}{-2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0;2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -4x^3 + 6x + 2 = 0$

$-4x^3 + 6x + 2 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{lllll}
(-4x^3 & & +6x & +2 &) : (x+1) = -4x^2 + 4x + 2 \\
-(-4x^3 & -4x^2) & & & \\
\hline
 & 4x^2 & +6x & +2 & \\
 & -(4x^2 & +4x) & & \\
\hline
 & & 2x & +2 & \\
 & & -(2x & +2) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$-4x^2 + 4x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2}}{2 \cdot (-4)}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{48}}{-8}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 6,93}{-8}$

$x_1 = \dfrac{-4 + 6,93}{-8} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 6,93}{-8}$

$x_1 = -0,366 \qquad x_2 = 1,37$

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = -0,366; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = 1,37; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-1) = -6$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1/0)}$

$f''(-0,366) = 4,39 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-0,366/-0,348)}$

$f''(1,37) = -16,4$

$f''(1,37) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,37/4,85)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-1	$< x <$	$-0,366$	$< x <$	$1,37$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-0,366; 1,37[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1; -0,366[\quad \cup \quad]1,37; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = -12x^2 + 6 = 0$

$-12x^2 + 6 = 0 \qquad / -6$

$-12x^2 = -6 \qquad / : (-12)$

$x^2 = \dfrac{-6}{-12}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$x_1 = 0,707 \qquad x_2 = -0,707$

$\underline{x_7 = -0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = 0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-0,707) = -0,164$

$f'''(-0,707) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,707/-0,164)}$

$f'''(0,707) = 2,66$

$f'''(0,707) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,707/2,66)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-0,707$	$< x <$	$0,707$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-0,707; 0,707[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -0,707[\quad \cup \quad]0,707; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{0} \left(-x^4 + 3x^2 + 2x\right) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + x^3 + x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left(-\frac{1}{5} \cdot 0^5 + 1 \cdot 0^3 + 1 \cdot 0^2\right) - \left(-\frac{1}{5} \cdot (-1)^5 + 1 \cdot (-1)^3 + 1 \cdot (-1)^2\right)$$

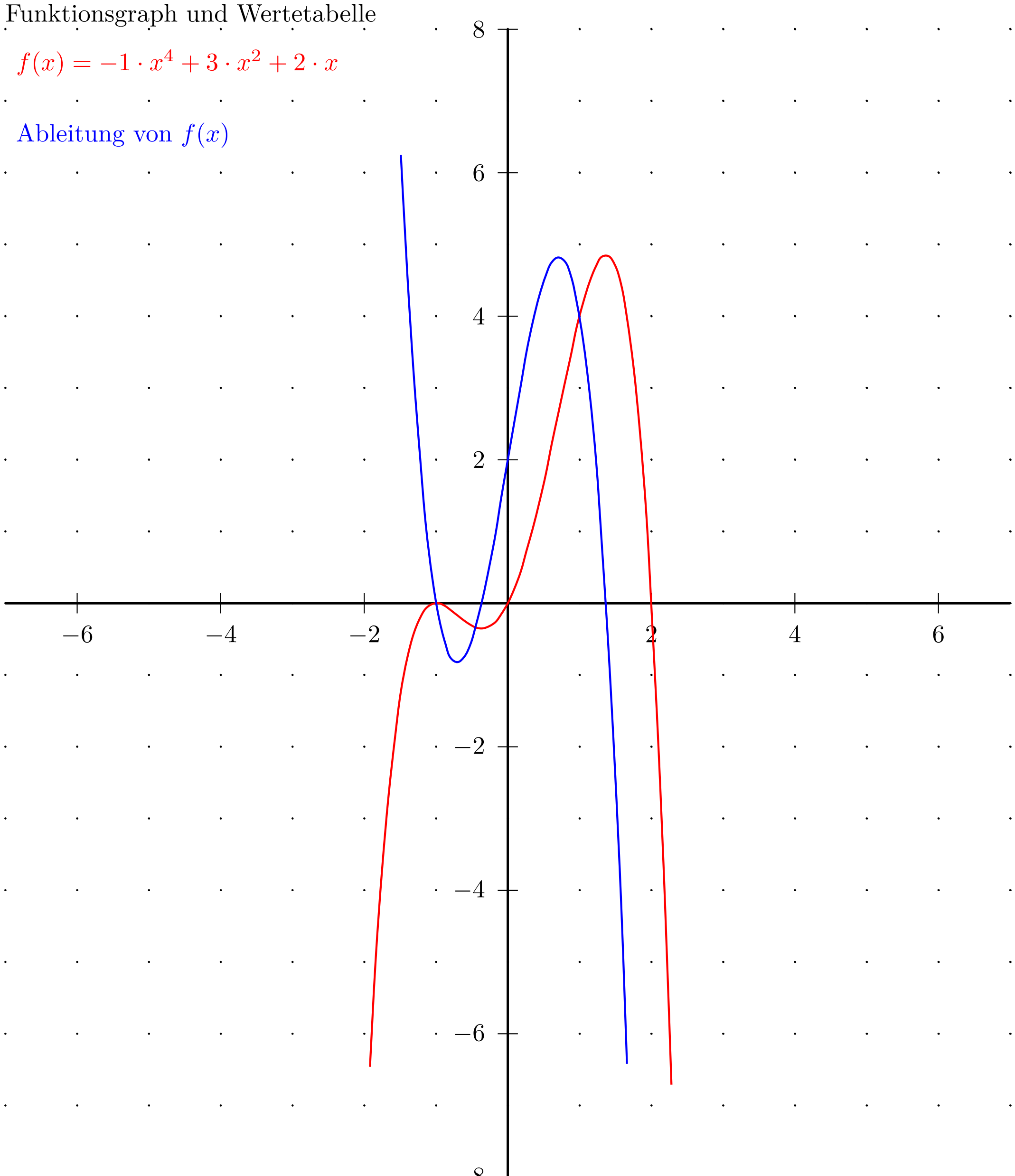
$$= (0) - \left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

$$A = \int_{0}^{2} \left(-x^4 + 3x^2 + 2x\right) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + x^3 + x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{5} \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2\right) - \left(-\frac{1}{5} \cdot 0^5 + 1 \cdot 0^3 + 1 \cdot 0^2\right)$$

$$= \left(5\frac{3}{5}\right) - (0) = 5\frac{3}{5}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2,27 \cdot 10^3$	$1,33 \cdot 10^3$	-582
$-6\frac{1}{2}$	$-1671\frac{5}{16}$	$1,06 \cdot 10^3$	-501
-6	$-1,2 \cdot 10^3$	830	-426
$-5\frac{1}{2}$	$-835\frac{5}{16}$	635	-357
-5	-560	472	-294
$-4\frac{1}{2}$	$-358\frac{5}{16}$	340	-237
-4	-216	234	-186
$-3\frac{1}{2}$	$-120\frac{5}{16}$	153	-141
-3	-60	92	-102
$-2\frac{1}{2}$	$-25\frac{5}{16}$	$49,5$	-69
-2	-8	22	-42
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{16}$	$6,5$	-21
-1	0	$0,00122$	-6
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{16}$	$-0,499$	3
0	0	2	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	2	6
$\frac{1}{2}$	$1\frac{11}{16}$	$4,5$	3
1	4	4	-6
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{11}{16}$	$-2,5$	-21
2	0	-18	-42
$2\frac{1}{2}$	$-15\frac{5}{16}$	$-45,5$	-69
3	-48	-88	-102
$3\frac{1}{2}$	$-106\frac{5}{16}$	-149	-141
4	-200	-230	-186
$4\frac{1}{2}$	$-340\frac{5}{16}$	-336	-237
5	-540	-468	-294
$5\frac{1}{2}$	$-813\frac{5}{16}$	-631	-357
6	$-1,18 \cdot 10^3$	-826	-426
$6\frac{1}{2}$	$-1645\frac{5}{16}$	$-1,06 \cdot 10^3$	-501
7	$-2,24 \cdot 10^3$	$-1,33 \cdot 10^3$	-582

Aufgabe (18)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x = -(x+1)x(x-2)^2$
$f'(x) = -4x^3 + 9x^2 - 4 = -4(x+0,593)(x-0,843)(x-2)$
$f''(x) = -12x^2 + 18x = -12x(x-1\frac{1}{2})$
$f'''(x) = -24x + 18$
$F(x) = \int(-x^4 + 3x^3 - 4x)dx = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 2x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 1,62[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1 \cdot (-x)^4 + 3 \cdot (-x)^3 - 4 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x = 0$
$x(-x^3 + 3x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{rrrrl}
(-x^3 & +3x^2 & & -4 &) : (x+1) = -x^2 + 4x - 4 \\
-(-x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 & \\
 & -(4x^2 & +4x) & & \\
\hline
 & & -4x & -4 & \\
 & & -(-4x & -4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$-x^2 + 4x - 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-4+0}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-4-0}{-2}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-1; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -4x^3 + 9x^2 - 4 = 0$

$-4x^3 + 9x^2 - 4 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:2

$$\begin{array}{llll}
(-4x^3 & +9x^2 & & -4 \quad) : (x-2) = -4x^2 + x + 2 \\
-(-4x^3 & +8x^2) & & \\
\hline
 & x^2 & & -4 \\
 & -(x^2 & -2x) & \\
\hline
 & & 2x & -4 \\
 & & -(2x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-4x^2 + x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2}}{2 \cdot (-4)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{33}}{-8}$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm 5,74}{-8}$
$x_1 = \dfrac{-1 + 5,74}{-8} \qquad x_2 = \dfrac{-1 - 5,74}{-8}$
$x_1 = -0,593 \qquad x_2 = 0,843$
$\underline{x_4 = -0,593; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 0,843; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-0,593) = -14,9$
$f''(-0,593) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,593/1,62)}$
$f''(0,843) = 6,65 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,843/-2,08)}$
$f''(2) = -12$
$f''(2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-0,593$	$< x <$	$0,843$	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -0,593[\quad \cup \quad]0,843; 2[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-0,593; 0,843[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -12x^2 + 18x = 0$
$x(-12x + 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -12x + 18 = 0$
$-12x + 18 = 0 \qquad / -18$
$-12x = -18 \qquad / : (-12)$
$x = \dfrac{-18}{-12}$
$x = 1\dfrac{1}{2}$
$\underline{x_7 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(0) = 0$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/0)}$
$f'''(1\frac{1}{2}) = -\dfrac{15}{16}$
$f'''(1\frac{1}{2}) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(1\frac{1}{2}/-\frac{15}{16})$

• Kruemmung

	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

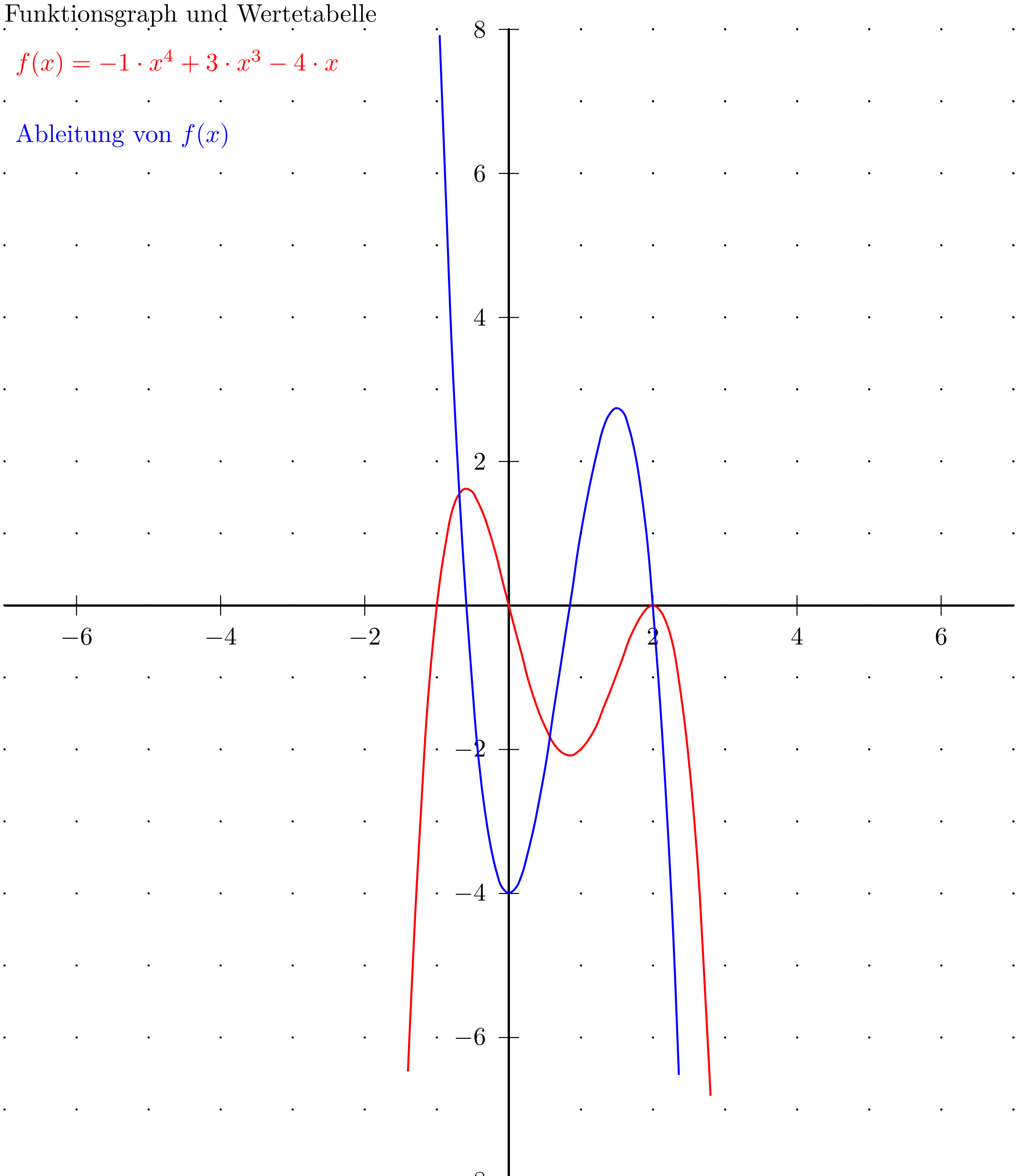
$x \in]0; 1\frac{1}{2}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{0} \left(-x^4 + 3x^3 - 4x\right) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$= \left(-\frac{1}{5} \cdot 0^5 + \frac{3}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2\right) - \left(-\frac{1}{5} \cdot (-1)^5 + \frac{3}{4} \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2\right)$$
$$= (0) - \left(-1\frac{1}{20}\right) = 1\frac{1}{20}$$
$$A = \int_{0}^{2} \left(-x^4 + 3x^3 - 4x\right) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left(-\frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{3}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2\right) - \left(-\frac{1}{5} \cdot 0^5 + \frac{3}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2\right)$$
$$= \left(-2\frac{2}{5}\right) - (0) = -2\frac{2}{5}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-3,4 \cdot 10^3$	$1,81 \cdot 10^3$	-714
$-6\frac{1}{2}$	$-2582\frac{15}{16}$	$1,47 \cdot 10^3$	-624
-6	$-1,92 \cdot 10^3$	$1,18 \cdot 10^3$	-540
$-5\frac{1}{2}$	$-1392\frac{3}{16}$	934	-462
-5	-980	721	-390
$-4\frac{1}{2}$	$-665\frac{7}{16}$	543	-324
-4	-432	396	-264
$-3\frac{1}{2}$	$-264\frac{11}{16}$	278	-210
-3	-150	185	-162
$-2\frac{1}{2}$	$-75\frac{15}{16}$	115	-120
-2	-32	64	-84
$-1\frac{1}{2}$	$-9\frac{3}{16}$	$29,8$	-54
-1	0	9	-30
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$-1,25$	-12
0	0	-4	$-0,000613$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-4	$-0,000613$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{16}$	$-2,25$	6
1	-2	1	6
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{16}$	$2,75$	$-0,000613$
2	0	$-0,00153$	-12
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{16}$	$-10,3$	-30
3	-12	-31	-54
$3\frac{1}{2}$	$-35\frac{7}{16}$	$-65,3$	-84
4	-80	-116	-120
$4\frac{1}{2}$	$-154\frac{11}{16}$	-186	-162
5	-270	-279	-210
$5\frac{1}{2}$	$-437\frac{15}{16}$	-397	-264
6	-672	-544	-324
$6\frac{1}{2}$	$-987\frac{3}{16}$	-722	-390
7	$-1,4 \cdot 10^3$	-935	-462

Aufgabe (19)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 4(x+2)x^2(x - \frac{3}{4})$
$f'(x) = 16x^3 + 15x^2 - 12x = 16(x+1,45)x(x-0,516)$
$f''(x) = 48x^2 + 30x - 12 = 48(x+0,902)(x-0,277)$
$f'''(x) = 96x + 30$
$F(x) = \int(4x^4 + 5x^3 - 6x^2)dx = \frac{4}{5}x^5 + 1\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-10,2), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(4 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [4 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 4 \cdot (-x)^4 + 5 \cdot (-x)^3 - 6 \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$
$x^2(4x^2 + 5x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 5x - 6 = 0$

$4x^2 + 5x - 6 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4}$
$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8}$
$x_{1/2} = \frac{-5 \pm 11}{8}$
$x_1 = \frac{-5+11}{8} \qquad x_2 = \frac{-5-11}{8}$
$x_1 = \frac{3}{4} \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = \frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{3}{4}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]\frac{3}{4}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; 0[\quad \cup \quad]0; \frac{3}{4}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 16x^3 + 15x^2 - 12x = 0$
$x(16x^2 + 15x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 16x^2 + 15x - 12 = 0$

$16x^2 + 15x - 12 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-12)}}{2 \cdot 16}$
$x_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{32}$

$x_{1/2} = \frac{-15 \pm 31,5}{32}$
$x_1 = \frac{-15 + 31,5}{32} \qquad x_2 = \frac{-15 - 31,5}{32}$
$x_1 = 0,516 \qquad x_2 = -1,45$
$\underline{x_4 = -1,45; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 0,516; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1,45) = 45,8 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1,45/-10,2)}$
$f''(0) = -12$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/0)}$
$f''(0,516) = 16,3 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,516/-0,627)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,45$	$< x <$	0	$< x <$	$0,516$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1,45; 0[\quad \cup \quad]0,516; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1,45[\quad \cup \quad]0; 0,516[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 48x^2 + 30x - 12 = 0$

$48x^2 + 30x - 12 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 48 \cdot (-12)}}{2 \cdot 48}$
$x_{1/2} = \frac{-30 \pm \sqrt{3,2 \cdot 10^3}}{96}$
$x_{1/2} = \frac{-30 \pm 56,6}{96}$
$x_1 = \frac{-30 + 56,6}{96} \qquad x_2 = \frac{-30 - 56,6}{96}$
$x_1 = 0,277 \qquad x_2 = -0,902$
$\underline{x_7 = -0,902; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 0,277; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-0,902) = -5,9$
$f'''(-0,902) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,902/-5,9)}$
$f'''(0,277) = -0,331$
$f'''(0,277) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,277/-0,331)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-0,902$	$< x <$	$0,277$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -0,902[\quad \cup \quad]0,277; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

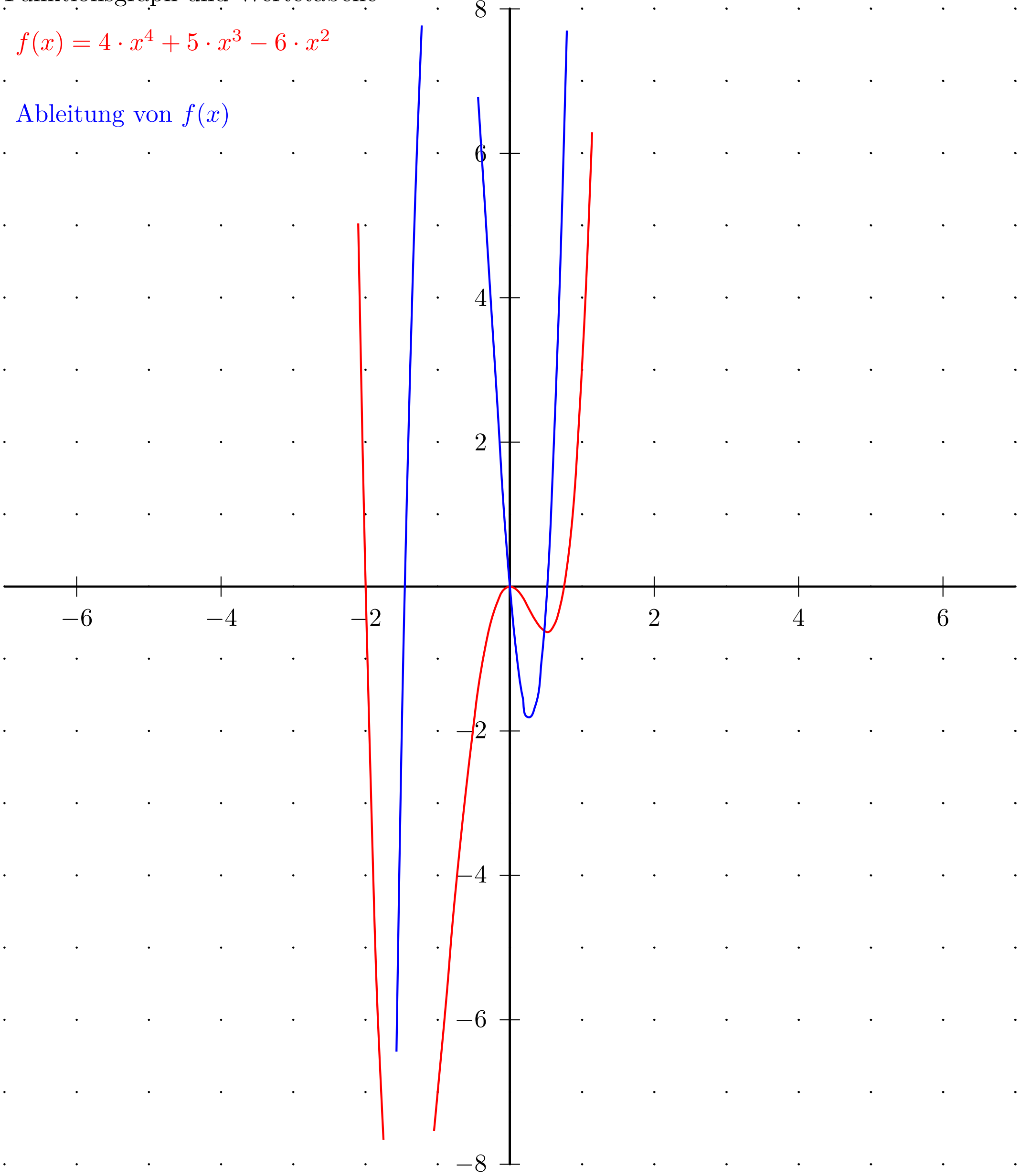
$\underline{x \in]-0,902; 0,277[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{0} \left(4x^4 + 5x^3 - 6x^2\right) dx = \left[\frac{4}{5}x^5 + 1\frac{1}{4}x^4 - 2x^3\right]_{-2}^{0}$$
$$= \left(\frac{4}{5} \cdot 0^5 + 1\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^3\right) - \left(\frac{4}{5} \cdot (-2)^5 + 1\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3\right)$$
$$= (0) - \left(10\frac{2}{5}\right) = -10\frac{2}{5}$$

$$A = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(4x^4 + 5x^3 - 6x^2\right) dx = \left[\frac{4}{5}x^5 + 1\frac{1}{4}x^4 - 2x^3\right]_0^{\frac{3}{4}}$$
$$= \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}^5 + 1\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}^4 - 2 \cdot \frac{3}{4}^3\right) - \left(\frac{4}{5} \cdot 0^5 + 1\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^3\right)$$
$$= (-0,258) - (0) = -0,258$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$7,6 \cdot 10^3$	$-4,67 \cdot 10^3$	$2,13 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$5513\frac{5}{8}$	$-3,68 \cdot 10^3$	$1,82 \cdot 10^3$
-6	$3,89 \cdot 10^3$	$-2,84 \cdot 10^3$	$1,54 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$2646\frac{7}{8}$	$-2,14 \cdot 10^3$	$1,28 \cdot 10^3$
-5	$1,73 \cdot 10^3$	$-1,57 \cdot 10^3$	$1,04 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$1063\frac{1}{8}$	$-1,1 \cdot 10^3$	825
-4	608	-736	636
$-3\frac{1}{2}$	$312\frac{3}{8}$	-460	471
-3	135	-261	330
$-2\frac{1}{2}$	$40\frac{5}{8}$	-126	213
-2	0	-44	120
$-1\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{8}$	$-2,26$	51
-1	-7	11	6
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{8}$	$7,75$	-15
0	0	$0,00153$	-12

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,00153$	-12
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$-0,246$	15
1	3	19	66
$1\frac{1}{2}$	$23\frac{5}{8}$	$69,8$	141
2	80	164	240
$2\frac{1}{2}$	$196\frac{7}{8}$	314	363
3	405	531	510
$3\frac{1}{2}$	$741\frac{1}{8}$	828	681
4	$1,25 \cdot 10^3$	$1,22 \cdot 10^3$	876
$4\frac{1}{2}$	$1974\frac{3}{8}$	$1,71 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^3$
5	$2,98 \cdot 10^3$	$2,32 \cdot 10^3$	$1,34 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$4310\frac{5}{8}$	$3,05 \cdot 10^3$	$1,61 \cdot 10^3$
6	$6,05 \cdot 10^3$	$3,92 \cdot 10^3$	$1,9 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$8259\frac{7}{8}$	$4,95 \cdot 10^3$	$2,21 \cdot 10^3$
7	$1,1 \cdot 10^4$	$6,14 \cdot 10^3$	$2,55 \cdot 10^3$

Aufgabe (20)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x+1)^2(x-1)^2$
$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4(x+1)x(x-1)$
$f''(x) = 12x^2 - 4 = 12(x+0,577)(x-0,577)$
$f'''(x) = 24x$
$F(x) = \int(x^4 - 2x^2 + 1)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]0, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 + 1$
$f(-x) = 1 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 2u + 1 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$u_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$u_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$
$$u_1 = \frac{2+0}{2} \qquad u_2 = \frac{2-0}{2}$$
$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$
$x(4x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 4 = 0$
$4x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$
$4x^2 = 4 \qquad / : 4$

$x^2 = \frac{4}{4}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1/0)}$
$f''(0) = -4$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/1)}$
$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-1;0[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]0;1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0$

$12x^2 - 4 = 0 \qquad /+4$
$12x^2 = 4 \qquad /:12$
$x^2 = \frac{4}{12}$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
$x_1 = 0,577 \qquad x_2 = -0,577$
$\underline{x_6 = -0,577; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 0,577; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-0,577) = \frac{4}{9}$
$f'''(-0,577) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,577/\frac{4}{9})}$
$f'''(0,577) = \frac{4}{9}$
$f'''(0,577) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,577/\frac{4}{9})}$

• Kruemmung

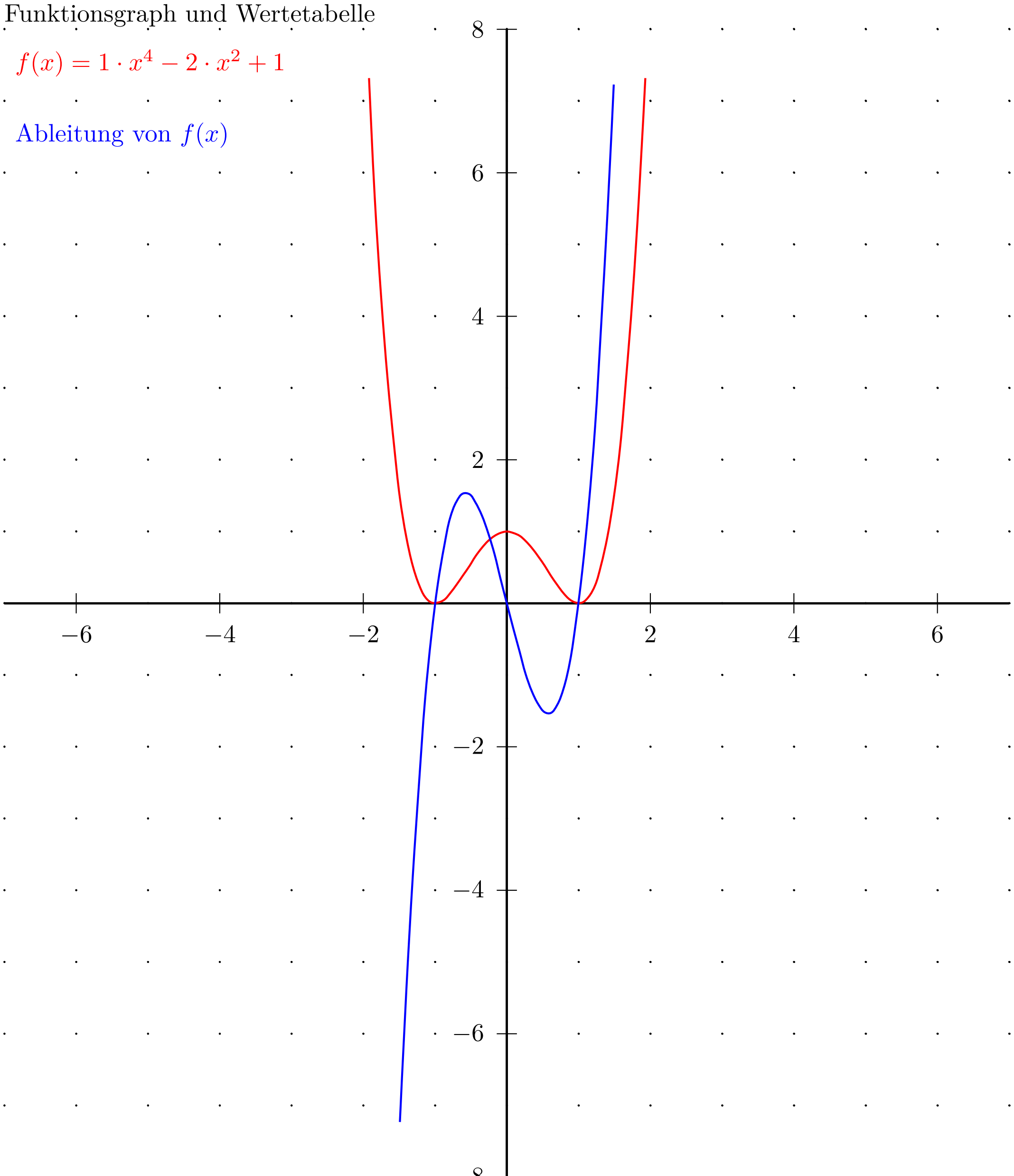
	$x <$	$-0,577$	$< x <$	$0,577$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-0,577[\quad \cup \quad]0,577;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-0,577;0,577[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1}$
$= \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-1)^5 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + 1 \cdot (-1)\right)$
$= \left(\frac{8}{15}\right) - \left(-\frac{8}{15}\right) = 1\frac{1}{15}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2,3 \cdot 10^3$	$-1,34 \cdot 10^3$	584
$-6\frac{1}{2}$	$1701\frac{9}{16}$	$-1,07 \cdot 10^3$	503
-6	$1,23 \cdot 10^3$	-840	428
$-5\frac{1}{2}$	$855\frac{9}{16}$	-644	359
-5	576	-480	296
$-4\frac{1}{2}$	$370\frac{9}{16}$	-347	239
-4	225	-240	188
$-3\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	-158	143
-3	64	-96	104
$-2\frac{1}{2}$	$27\frac{9}{16}$	$-52,5$	71
-2	9	-24	44
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$-7,5$	23
-1	0	$-0,00122$	8
$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$1,5$	$-0,999$
0	1	0	-4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	-4
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$-1,5$	$-0,999$
1	0	$0,00122$	8
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$7,5$	23
2	9	24	44
$2\frac{1}{2}$	$27\frac{9}{16}$	$52,5$	71
3	64	96	104
$3\frac{1}{2}$	$126\frac{9}{16}$	158	143
4	225	240	188
$4\frac{1}{2}$	$370\frac{9}{16}$	347	239
5	576	480	296
$5\frac{1}{2}$	$855\frac{9}{16}$	644	359
6	$1,23 \cdot 10^3$	840	428
$6\frac{1}{2}$	$1701\frac{9}{16}$	$1,07 \cdot 10^3$	503
7	$2,3 \cdot 10^3$	$1,34 \cdot 10^3$	584

Aufgabe (21)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
$f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$
$f''(x) = 12x^2 + 4 = 12(x^2 + \frac{1}{3})$
$f'''(x) = 24x$
$F(x) = \int (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]1, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2 + 1$
$f(-x) = 1 \cdot x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 + 2u + 1 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$
$u_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$
$u_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$
$u_1 = \dfrac{-2 + 0}{2} \qquad u_2 = \dfrac{-2 - 0}{2}$
$u_1 = -1 \qquad u_2 = -1$
$x^2 = -1x = \pm\sqrt{-1}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$x^2 = -1x = \pm\sqrt{-1}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 + 4x = 0$
$x(4x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 4 = 0$
$4x^2 + 4 = 0 \qquad / - 4$
$4x^2 = -4 \qquad / : 4$
$x^2 = \dfrac{-4}{4}$
keine Lösung
$x_1 = 0$; 1-fache Nullstelle
$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:(0/1)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

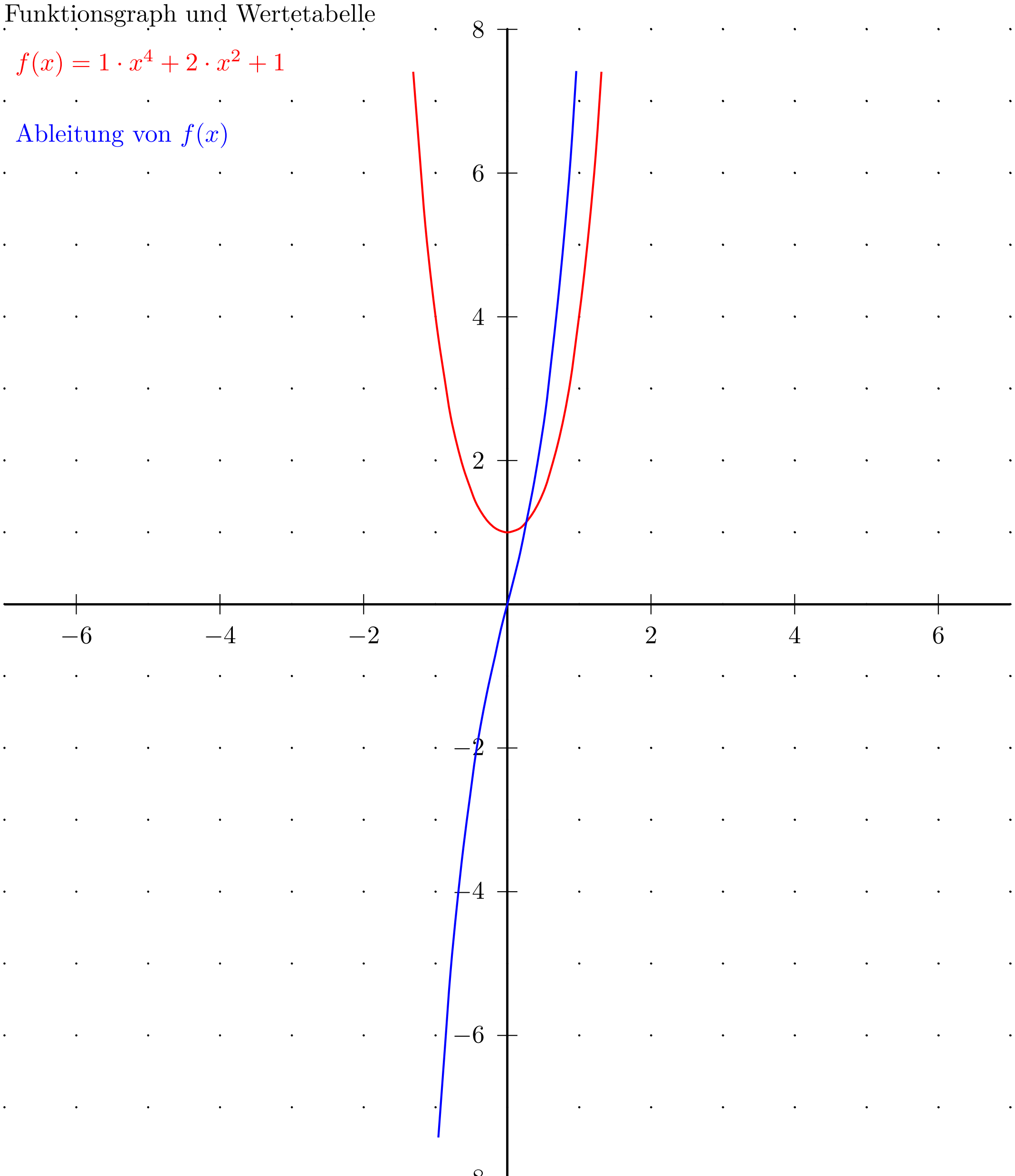
$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 + 4 = 0$

$12x^2 + 4 = 0 \qquad / - 4$
$12x^2 = -4 \qquad / : 12$
$x^2 = \frac{-4}{12}$
keine Lösung
• Kruemmung
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2,5 \cdot 10^3$	$-1,4 \cdot 10^3$	592
$-6\frac{1}{2}$	$1870\frac{9}{16}$	$-1,12 \cdot 10^3$	511
-6	$1,37 \cdot 10^3$	-888	436
$-5\frac{1}{2}$	$976\frac{9}{16}$	-688	367
-5	676	-520	304
$-4\frac{1}{2}$	$451\frac{9}{16}$	-383	247
-4	289	-272	196
$-3\frac{1}{2}$	$175\frac{9}{16}$	-186	151
-3	100	-120	112
$-2\frac{1}{2}$	$52\frac{9}{16}$	$-72,5$	79
-2	25	-40	52
$-1\frac{1}{2}$	$10\frac{9}{16}$	$-19,5$	31
-1	4	-8	16
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$-2,5$	7
0	1	0	4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	4
$\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$	$2,5$	7
1	4	8	16
$1\frac{1}{2}$	$10\frac{9}{16}$	$19,5$	31
2	25	40	52
$2\frac{1}{2}$	$52\frac{9}{16}$	$72,5$	79
3	100	120	112
$3\frac{1}{2}$	$175\frac{9}{16}$	186	151
4	289	272	196
$4\frac{1}{2}$	$451\frac{9}{16}$	383	247
5	676	520	304
$5\frac{1}{2}$	$976\frac{9}{16}$	688	367
6	$1,37 \cdot 10^3$	888	436
$6\frac{1}{2}$	$1870\frac{9}{16}$	$1,12 \cdot 10^3$	511
7	$2,5 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^3$	592

Aufgabe (22)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = (x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$
$f'(x) = 4x^3 - 26x = 4(x+2,55)x(x-2,55)$
$f''(x) = 12x^2 - 26 = 12(x+1,47)(x-1,47)$
$f'''(x) = 24x$
$F(x) = \int(x^4 - 13x^2 + 36)dx = \frac{1}{5}x^5 - 4\frac{1}{3}x^3 + 36x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-6\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 - \dfrac{13}{x^2} + \dfrac{36}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 - 13 \cdot (-x)^2 + 36$
$f(-x) = 1 \cdot x^4 - 13 \cdot x^2 + 36$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 13u + 36 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$$
$$u_{1/2} = \frac{+13 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$u_{1/2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$
$$u_1 = \frac{13+5}{2} \qquad u_2 = \frac{13-5}{2}$$
$u_1 = 9 \qquad u_2 = 4$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-2;2[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-3;-2[\quad \cup \quad]2;3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = 4x^3 - 26x = 0$
$x(4x^2 - 26) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 - 26 = 0$
$4x^2 - 26 = 0 \qquad / + 26$
$4x^2 = 26 \qquad / : 4$
$x^2 = \frac{26}{4}$
$x = \pm\sqrt{6\frac{1}{2}}$
$x_1 = 2,55 \qquad x_2 = -2,55$
$\underline{x_5 = -2,55; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 2,55; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,55) = 52 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2,55/-6\frac{1}{4})}$
$f''(0) = -26$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/36)}$
$f''(2,55) = 52 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2,55/-6\frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,55$	$< x <$	0	$< x <$	$2,55$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-2,55;0[\quad \cup \quad]2,55;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-2,55[\quad \cup \quad]0;2,55[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 - 26 = 0$

$12x^2 - 26 = 0 \qquad / + 26$
$12x^2 = 26 \qquad / : 12$
$x^2 = \frac{26}{12}$
$x = \pm\sqrt{2\frac{1}{6}}$
$x_1 = 1,47 \qquad x_2 = -1,47$
$\underline{x_8 = -1,47; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_9 = 1,47; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1,47) = 12\frac{19}{36}$
$f'''(-1,47) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1,47/12\frac{19}{36})}$
$f'''(1,47) = 12\frac{19}{36}$
$f'''(1,47) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1,47/12\frac{19}{36})}$
• Kruemmung

	$x <$	$-1,47$	$< x <$	$1,47$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

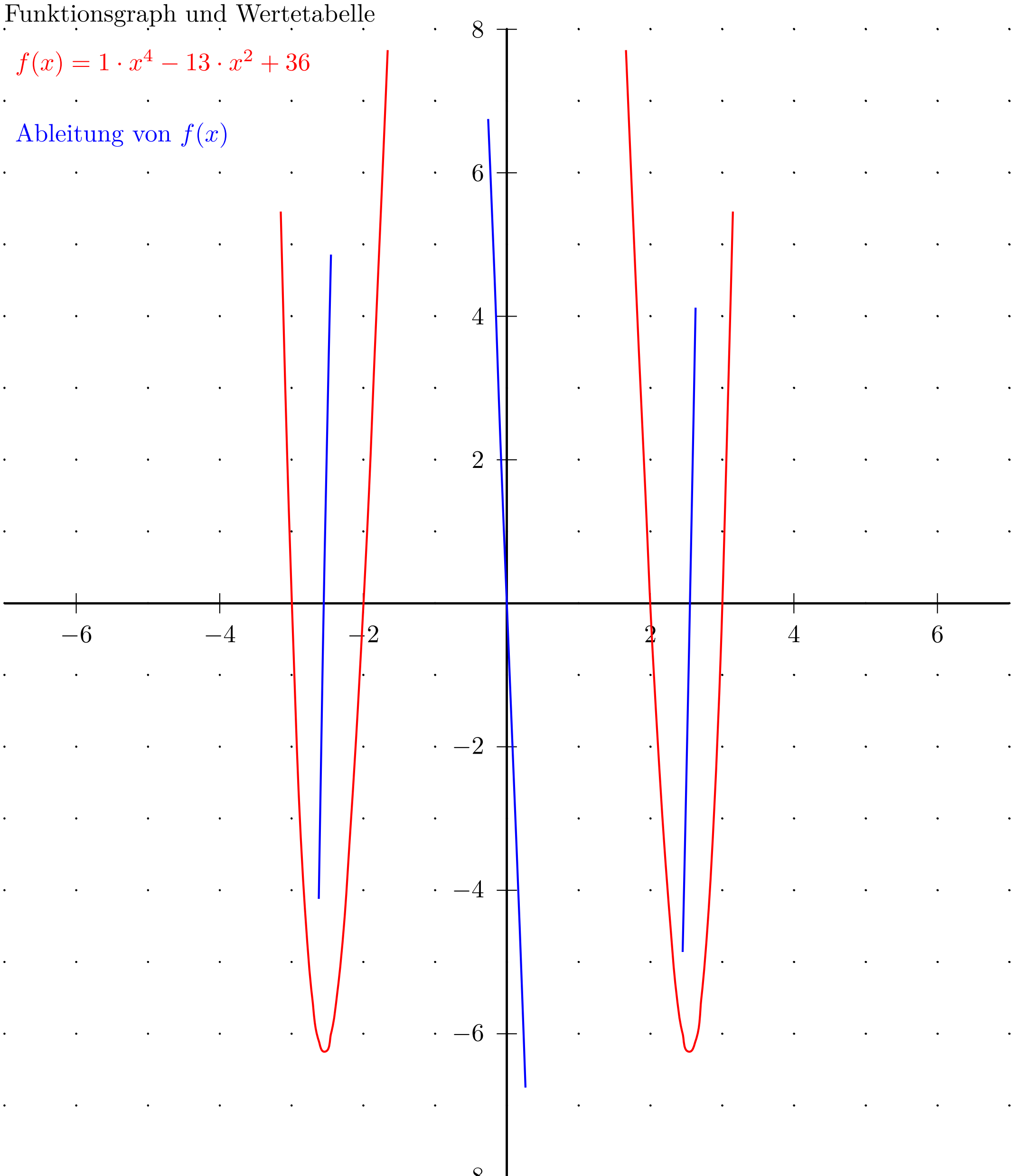
$\underline{\quad x \in]-\infty;-1,47[\quad \cup \quad]1,47;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-1,47;1,47[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-3}^{-2} \left(x^4 - 13x^2 + 36\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 4\frac{1}{3}x^3 + 36x\right]_{-3}^{-2}$$
$$= \left(\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 - 4\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 36 \cdot (-2)\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-3)^5 - 4\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 36 \cdot (-3)\right)$$
$$= \left(-43\frac{11}{15}\right) - \left(-39\frac{3}{5}\right) = -4\frac{2}{15}$$
$$A = \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 13x^2 + 36\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 4\frac{1}{3}x^3 + 36x\right]_{-2}^{2}$$
$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - 4\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 36 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 - 4\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 36 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(43\frac{11}{15}\right) - \left(-43\frac{11}{15}\right) = 87\frac{7}{15}$$
$$A = \int_{2}^{3} \left(x^4 - 13x^2 + 36\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 4\frac{1}{3}x^3 + 36x\right]_{2}^{3}$$
$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 3^5 - 4\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 36 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - 4\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 36 \cdot 2\right)$$
$$= \left(39\frac{3}{5}\right) - \left(43\frac{11}{15}\right) = -4\frac{2}{15}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1,8 \cdot 10^3$	$-1,19 \cdot 10^3$	562
$-6\frac{1}{2}$	$1271\frac{13}{16}$	-930	481
-6	864	-708	406
$-5\frac{1}{2}$	$557\frac{13}{16}$	-523	337
-5	336	-370	274
$-4\frac{1}{2}$	$182\frac{13}{16}$	-248	217
-4	84	-152	166
$-3\frac{1}{2}$	$26\frac{13}{16}$	$-80,5$	121
-3	0	-30	82
$-2\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	$2,5$	49
-2	0	20	22
$-1\frac{1}{2}$	$11\frac{13}{16}$	$25,5$	1
-1	24	22	-14
$-\frac{1}{2}$	$32\frac{13}{16}$	$12,5$	-23
0	36	0	-26

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	36	0	-26
$\frac{1}{2}$	$32\frac{13}{16}$	$-12,5$	-23
1	24	-22	-14
$1\frac{1}{2}$	$11\frac{13}{16}$	$-25,5$	1
2	0	-20	22
$2\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{16}$	$-2,5$	49
3	0	30	82
$3\frac{1}{2}$	$26\frac{13}{16}$	$80,5$	121
4	84	152	166
$4\frac{1}{2}$	$182\frac{13}{16}$	248	217
5	336	370	274
$5\frac{1}{2}$	$557\frac{13}{16}$	523	337
6	864	708	406
$6\frac{1}{2}$	$1271\frac{13}{16}$	930	481
7	$1,8 \cdot 10^3$	$1,19 \cdot 10^3$	562

Aufgabe (23)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7 = (x + 2,97)(x + 1,08)(x - 1,13)(x - 1,92)$
$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 14x - 1 = 4(x + 2,25)(x + 0,0705)(x - 1,57)$
$f''(x) = 12x^2 + 6x - 14 = 12(x + 1,36)(x - 0,859)$
$f'''(x) = 24x + 6$
$F(x) = \int(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-11,9), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(1 + x - \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^4})$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^4 + 1 \cdot (-x)^3 - 7 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) + 7$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7 = 0$

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7$
$Numerische Suche:$

$\underline{x_1 = -2,97;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1,08;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 1,13;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1,92;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,97$	$< x <$	$-1,08$	$< x <$	$1,13$	$< x <$	$1,92$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2,97[\quad \cup \quad]-1,08; 1,13[\quad \cup \quad]1,92; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2,97; -1,08[\quad \cup \quad]1,13; 1,92[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 14x - 1 = 0$

$4x^3 + 3x^2 - 14x - 1 = 0$
$Numerische Suche:$
$\underline{x_5 = -2,25;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = -0,0705;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 1,57;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,25) = 33,4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2,25/-11,9)}$
$f''(-0,0705) = -14,4$
$f''(-0,0705) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,0705/7,04)}$
$f''(1,57) = 25,2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1,57/-1,88)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,25$	$< x <$	$-0,0705$	$< x <$	$1,57$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2,25; -0,0705[\quad \cup \quad]1,57; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$x \in]-\infty; -2,25[\quad \cup \quad]-0,0705; 1,57[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 12x^2 + 6x - 14 = 0$

$12x^2 + 6x - 14 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-14)}}{2 \cdot 12}$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{708}}{24}$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 26,6}{24}$
$x_1 = \frac{-6 + 26,6}{24} \qquad x_2 = \frac{-6 - 26,6}{24}$
$x_1 = 0,859 \qquad x_2 = -1,36$
$x_8 = -1,36;\quad$ 1-fache Nullstelle
$x_9 = 0,859;\quad$ 1-fache Nullstelle
$f'''(-1,36) = -3,66$
$f'''(-1,36) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(-1,36/-3,66)$
$f'''(0,859) = 2,16$
$f'''(0,859) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(0,859/2,16)$
• Kruemmung

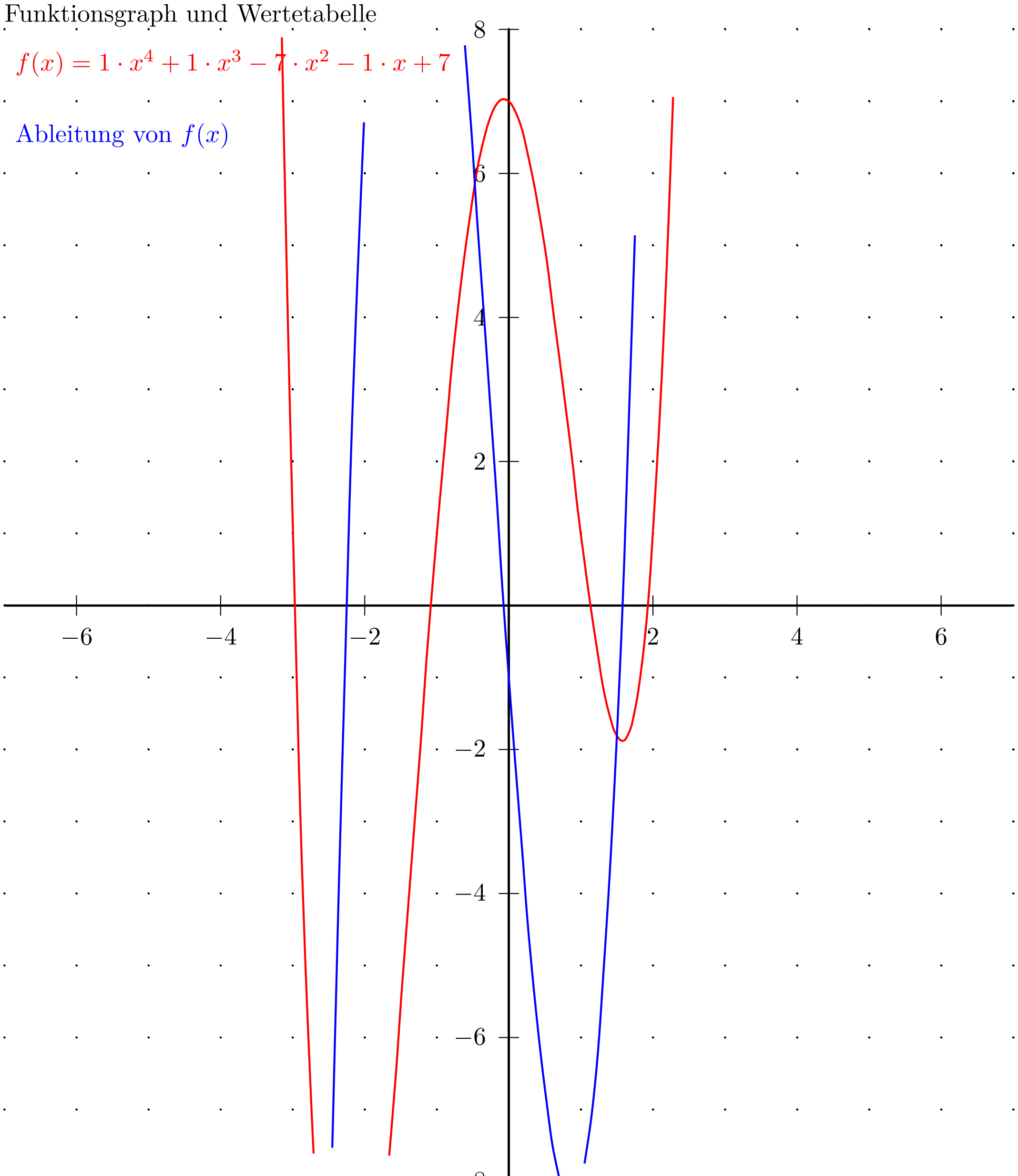
	$x <$	$-1,36$	$< x <$	$0,859$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,36[\quad \cup \quad]0,859; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-1,36; 0,859[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-2,97}^{-1,08} \left(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x\right]_{-2,97}^{-1,08}$
$= \left(\frac{1}{5} \cdot (-1,08)^5 + \frac{1}{4} \cdot (-1,08)^4 - 2\frac{1}{3} \cdot (-1,08)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1,08)^2 + 7 \cdot (-1,08)\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-2,97)^5 + \frac{1}{4} \cdot (-2,97)^4 - 2\frac{1}{3} \cdot (-2,97)^3 -\right.$
$= (-5,16) - (9,16) = -14,3$
$A = \int_{-1,08}^{1,13} \left(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x\right]_{-1,08}^{1,13}$
$= \left(\frac{1}{5} \cdot 1,13^5 + \frac{1}{4} \cdot 1,13^4 - 2\frac{1}{3} \cdot 1,13^3 - \frac{1}{2} \cdot 1,13^2 + 7 \cdot 1,13\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-1,08)^5 + \frac{1}{4} \cdot (-1,08)^4 - 2\frac{1}{3} \cdot (-1,08)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1,08)^2 + 7\right.$
$= (4,68) - (-5,16) = 9,84$
$A = \int_{1,13}^{1,92} \left(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 7\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x\right]_{1,13}^{1,92}$
$= \left(\frac{1}{5} \cdot 1,92^5 + \frac{1}{4} \cdot 1,92^4 - 2\frac{1}{3} \cdot 1,92^3 - \frac{1}{2} \cdot 1,92^2 + 7 \cdot 1,92\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 1,13^5 + \frac{1}{4} \cdot 1,13^4 - 2\frac{1}{3} \cdot 1,13^3 - \frac{1}{2} \cdot 1,13^2 + 7 \cdot 1,13\right)$
$= (3,7) - (4,68) = -0,984$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1,73 \cdot 10^3$	$-1,13 \cdot 10^3$	532
$-6\frac{1}{2}$	$1228\frac{3}{16}$	-882	454
-6	841	-673	382
$-5\frac{1}{2}$	$549\frac{7}{16}$	-499	316
-5	337	-356	256
$-4\frac{1}{2}$	$188\frac{11}{16}$	-242	202
-4	91	-153	154
$-3\frac{1}{2}$	$31\frac{15}{16}$	$-86,8$	112
-3	1	-40	76
$-2\frac{1}{2}$	$-10\frac{13}{16}$	$-9,75$	46
-2	-11	7	22
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{9}{16}$	$13,2$	4
-1	1	12	-8
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{16}$	$6,25$	-14
0	7	-1	-14

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	7	-1	-14
$\frac{1}{2}$	$4\frac{15}{16}$	$-6,75$	-8
1	1	-8	4
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{16}$	$-1,75$	22
2	1	15	46
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{7}{16}$	$45,3$	76
3	49	92	112
$3\frac{1}{2}$	$110\frac{11}{16}$	158	154
4	211	247	202
$4\frac{1}{2}$	$361\frac{15}{16}$	361	256
5	577	504	316
$5\frac{1}{2}$	$871\frac{3}{16}$	678	382
6	$1,26 \cdot 10^3$	887	454
$6\frac{1}{2}$	$1764\frac{7}{16}$	$1,13 \cdot 10^3$	532
7	$2,4 \cdot 10^3$	$1,42 \cdot 10^3$	616

Aufgabe (24)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12 = 4\frac{1}{2}(x^2 + 2,32x + 1,61)(x - 1,65)$
$f'(x) = 13\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10 = 13\frac{1}{2}(x + 1\frac{1}{9})(x - \frac{2}{3})$
$f''(x) = 27x + 6 = 27(x + \frac{2}{9})$
$f'''(x) = 27$
$F(x) = \int(4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12)dx = 1\frac{1}{8}x^4 + x^3 - 5x^2 - 12x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^3(4\frac{1}{2} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{10}{x^2} - \dfrac{12}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [4\frac{1}{2} \cdot \infty^3] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [4\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^3] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 4\frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 - 10 \cdot (-x) - 12$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12 = 0$

$4\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 10x - 12 = 0$
$Numerische Suche:$
$x_1 = 1,65;$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$1,65$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]1,65;\infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;1,65[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 13\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10 = 0$

$13\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 13\frac{1}{2} \cdot (-10)}}{2 \cdot 13\frac{1}{2}}$$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{576}}{27}$$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 24}{27}$$
$$x_1 = \frac{-6 + 24}{27} \qquad x_2 = \frac{-6 - 24}{27}$$
$$x_1 = \frac{2}{3} \qquad x_2 = -1\frac{1}{9}$$
$x_2 = -1\dfrac{1}{9};$ 1-fache Nullstelle
$x_3 = \dfrac{2}{3};$ 1-fache Nullstelle
$f''(-1\dfrac{1}{9}) = -24$

$f''(-1\frac{1}{9}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1\frac{1}{9}/-3\frac{29}{81})}$

$f''(\frac{2}{3}) = 24 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\frac{2}{3}/-16)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{9}$	$< x <$	$\frac{2}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1\frac{1}{9}[\quad \cup \quad]\frac{2}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}$

$x \in]-1\frac{1}{9}; \frac{2}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = 27x + 6 = 0$

$27x + 6 = 0 \qquad / -6$

$27x = -6 \qquad / : 27$

$x = \frac{-6}{27}$

$x = -\frac{2}{9}$

$x_4 = -\frac{2}{9}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$

$f'''(-\frac{2}{9}) = -9\frac{55}{81}$

$f'''(-\frac{2}{9}) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-\frac{2}{9}/-9\frac{55}{81})}$

• Kruemmung

	$x <$	$-\frac{2}{9}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

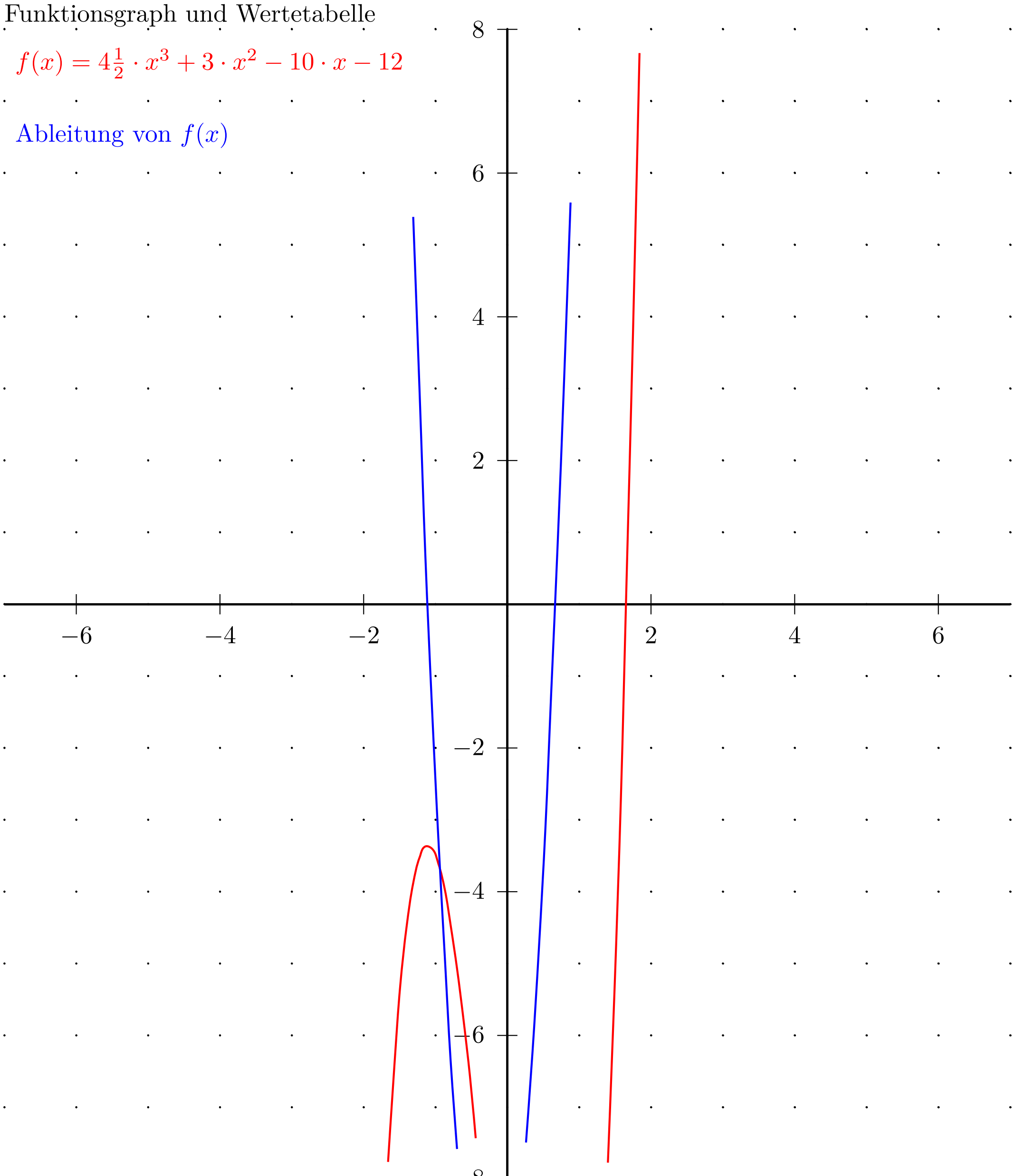
$x \in]-\frac{2}{9}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

$x \in]-\infty; -\frac{2}{9}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1338\frac{1}{2}$	610	-183
$-6\frac{1}{2}$	$-1056\frac{1}{16}$	521	$-169\frac{1}{2}$
-6	-816	440	-156
$-5\frac{1}{2}$	$-614\frac{15}{16}$	365	$-142\frac{1}{2}$
-5	$-449\frac{1}{2}$	298	-129
$-4\frac{1}{2}$	$-316\frac{5}{16}$	236	$-115\frac{1}{2}$
-4	-212	182	-102
$-3\frac{1}{2}$	$-133\frac{3}{16}$	134	$-88\frac{1}{2}$
-3	$-76\frac{1}{2}$	$93,5$	-75
$-2\frac{1}{2}$	$-38\frac{9}{16}$	$59,4$	$-61\frac{1}{2}$
-2	-16	32	-48
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{7}{16}$	$11,4$	$-34\frac{1}{2}$
-1	$-3\frac{1}{2}$	$-2,5$	-21
$-\frac{1}{2}$	$-6\frac{13}{16}$	$-9,62$	$-7\frac{1}{2}$
0	-12	-10	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-12	-10	6
$\frac{1}{2}$	$-15\frac{11}{16}$	$-3,62$	$19\frac{1}{2}$
1	$-14\frac{1}{2}$	$9,5$	33
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{16}$	$29,4$	$46\frac{1}{2}$
2	16	56	60
$2\frac{1}{2}$	$52\frac{1}{16}$	$89,4$	$73\frac{1}{2}$
3	$106\frac{1}{2}$	130	87
$3\frac{1}{2}$	$182\frac{11}{16}$	176	$100\frac{1}{2}$
4	284	230	114
$4\frac{1}{2}$	$413\frac{13}{16}$	290	$127\frac{1}{2}$
5	$575\frac{1}{2}$	358	141
$5\frac{1}{2}$	$772\frac{7}{16}$	431	$154\frac{1}{2}$
6	$1,01\cdot 10^3$	512	168
$6\frac{1}{2}$	$1285\frac{9}{16}$	599	$181\frac{1}{2}$
7	$1608\frac{1}{2}$	694	195

Aufgabe (25)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 18x^2 + 124x - 48 = 2(x^2 + 0,66x + 5,71)(x + 11,7)(x - 0,359)$
$f'(x) = 8x^3 + 72x^2 + 36x + 124 = 8(x^2 + 0,313x + 1,78)(x + 8,69)$
$f''(x) = 24x^2 + 144x + 36 = 24(x + 5,74)(x + 0,261)$
$f'''(x) = 48x + 144$
$F(x) = \int(2x^4 + 24x^3 + 18x^2 + 124x - 48)dx = \frac{2}{5}x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 62x^2 - 48x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-4,11 \cdot 10^{3)}, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(2 + \frac{24}{x} + \frac{18}{x^2} + \frac{124}{x^3} - \frac{48}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [2 \cdot \infty^4] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [2 \cdot (-\infty)^4] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 2 \cdot (-x)^4 + 24 \cdot (-x)^3 + 18 \cdot (-x)^2 + 124 \cdot (-x) - 48$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 18x^2 + 124x - 48 = 0$

$2x^4 + 24x^3 + 18x^2 + 124x - 48$
$Numerische Suche:$

$x_1 = -11,7;$ 1-fache Nullstelle
$x_2 = 0,359;$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-11,7$	$< x <$	$0,359$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -11,7[\quad \cup \quad]0,359; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-11,7; 0,359[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 8x^3 + 72x^2 + 36x + 124 = 0$

$8x^3 + 72x^2 + 36x + 124 = 0$
$Numerische Suche:$
$x_3 = -8,69;$ 1-fache Nullstelle
$f''(-8,69) = 596 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(-8,69/-4,11 \cdot 10^3)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-8,69$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-8,69; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -8,69[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 24x^2 + 144x + 36 = 0$

$24x^2 + 144x + 36 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-144 \pm \sqrt{144^2 - 4 \cdot 24 \cdot 36}}{2 \cdot 24}$

$x_{1/2} = \dfrac{-144 \pm \sqrt{1,73 \cdot 10^4}}{48}$

$x_{1/2} = \dfrac{-144 \pm 131}{48}$

$x_1 = \dfrac{-144 + 131}{48} \qquad x_2 = \dfrac{-144 - 131}{48}$

$x_1 = -0,261 \qquad x_2 = -5,74$

$\underline{x_4 = -5,74; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = -0,261; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-5,74) = -2,53 \cdot 10^3$

$f'''(-5,74) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-5,74/-2,53 \cdot 10^3)}$

$f'''(-0,261) = -79,6$

$f'''(-0,261) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,261/-79,6)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-5,74$	$< x <$	$-0,261$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -5,74[\quad \cup \quad]-0,261; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-5,74; -0,261[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

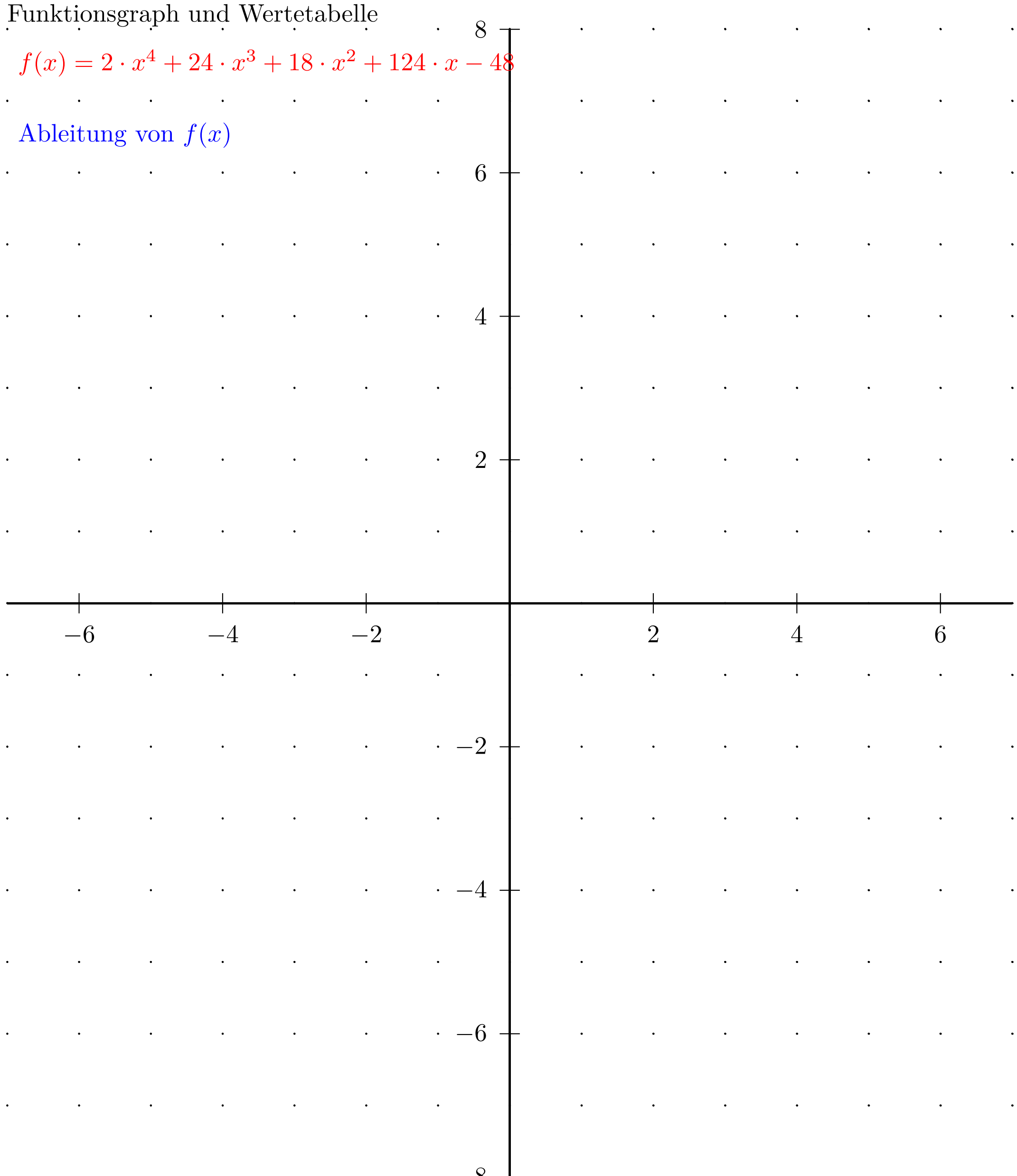
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-11,7}^{0,359} \left(2x^4 + 24x^3 + 18x^2 + 124x - 48\right) dx = \left[\frac{2}{5}x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 62x^2 - 48x\right]_{-11,7}^{0,359}$

$= \left(\frac{2}{5} \cdot 0,359^5 + 6 \cdot 0,359^4 + 6 \cdot 0,359^3 + 62 \cdot 0,359^2 - 48 \cdot 0,359\right) - \left(\frac{2}{5} \cdot (-11,7)^5 + 6 \cdot (-11,7)^4 + 6 \cdot (-11,7)^3 + 62 \cdot (-11,7)^2\right.$

$= (-8,86) - \left(2,42 \cdot 10^4\right) = -2,42 \cdot 10^4$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-3,46 \cdot 10^3$	656	204
$-6\frac{1}{2}$	$-3114\frac{3}{8}$	735	114
-6	$-2,74 \cdot 10^3$	772	36
$-5\frac{1}{2}$	$-2348\frac{3}{8}$	773	-30
-5	$-1,97 \cdot 10^3$	744	-84
$-4\frac{1}{2}$	$-1608\frac{3}{8}$	691	-126
-4	$-1,28 \cdot 10^3$	620	-156
$-3\frac{1}{2}$	$-990\frac{3}{8}$	537	-174
-3	-744	448	-180
$-2\frac{1}{2}$	$-542\frac{3}{8}$	359	-174
-2	-384	276	-156
$-1\frac{1}{2}$	$-264\frac{3}{8}$	205	-126
-1	-176	152	-84
$-\frac{1}{2}$	$-108\frac{3}{8}$	123	-30
0	-48	124	36

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-48	124	36
$\frac{1}{2}$	$21\frac{5}{8}$	161	114
1	120	240	204
$1\frac{1}{2}$	$269\frac{5}{8}$	367	306
2	496	548	420
$2\frac{1}{2}$	$827\frac{5}{8}$	789	546
3	$1,3 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^3$	684
$3\frac{1}{2}$	$1935\frac{5}{8}$	$1,48 \cdot 10^3$	834
4	$2,78 \cdot 10^3$	$1,93 \cdot 10^3$	996
$4\frac{1}{2}$	$3881\frac{5}{8}$	$2,47 \cdot 10^3$	$1,17 \cdot 10^3$
5	$5,27 \cdot 10^3$	$3,1 \cdot 10^3$	$1,36 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$7001\frac{5}{8}$	$3,83 \cdot 10^3$	$1,55 \cdot 10^3$
6	$9,12 \cdot 10^3$	$4,66 \cdot 10^3$	$1,76 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$11679\frac{5}{8}$	$5,6 \cdot 10^3$	$1,99 \cdot 10^3$
7	$1,47 \cdot 10^4$	$6,65 \cdot 10^3$	$2,22 \cdot 10^3$

Aufgabe (26)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -6x^4 + 72x^3 - 324x^2 + 648x - 486$
$f'(x) = -24x^3 + 216x^2 - 648x + 648$
$f''(x) = -72x^2 + 432x - 648$
$f'''(x) = -144x + 432$
$F(x) = \int(-6x^4 + 72x^3 - 324x^2 + 648x - 486)dx = -1\frac{1}{5}x^5 + 18x^4 - 108x^3 + 324x^2 - 486x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 0[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^4(-6 + \frac{72}{x} - \frac{324}{x^2} + \frac{648}{x^3} - \frac{486}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-6 \cdot \infty^4] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-6 \cdot (-\infty)^4] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -6 \cdot (-x)^4 + 72 \cdot (-x)^3 - 324 \cdot (-x)^2 + 648 \cdot (-x) - 486$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -6x^4 + 72x^3 - 324x^2 + 648x - 486 = 0$

$-6x^4 + 72x^3 - 324x^2 + 648x - 486$
Nullstelle für Polynomdivision erraten:3

$$
\begin{array}{llllll}
(-6x^4 & +72x^3 & -324x^2 & +648x & -486 &) : (x-3) = -6x^3 + 54x^2 - 162x + 162 \\
-(-6x^4 & +18x^3) & & & & \\
\hline
 & 54x^3 & -324x^2 & +648x & -486 & \\
 & -(54x^3 & -162x^2) & & & \\
\hline
 & & -162x^2 & +648x & -486 & \\
 & & -(-162x^2 & +486x) & & \\
\hline
 & & & 162x & -486 & \\
 & & & -(162x & -486) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$-6x^3 + 54x^2 - 162x + 162 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$
\begin{array}{lllll}
(-6x^3 & +54x^2 & -162x & +162 &) : (x-3) = -6x^2 + 36x - 54 \\
-(-6x^3 & +18x^2) & & & \\
\hline
 & 36x^2 & -162x & +162 & \\
 & -(36x^2 & -108x) & & \\
\hline
 & & -54x & +162 & \\
 & & -(-54x & +162) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$-6x^2 + 36x - 54 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-54)}}{2 \cdot (-6)}$
$x_{1/2} = \frac{-36 \pm \sqrt{0}}{-12}$
$x_{1/2} = \frac{-36 \pm 0}{-12}$
$x_1 = \frac{-36 + 0}{-12}$ $x_2 = \frac{-36 - 0}{-12}$
$x_1 = 3$ $x_2 = 3$
$\underline{x_1 = 3; \quad \text{4-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -24x^3 + 216x^2 - 648x + 648 = 0$

$-24x^3 + 216x^2 - 648x + 648 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$\begin{array}{llll}
(-24x^3 & +216x^2 & -648x & +648 \quad) : (x-3) = -24x^2 + 144x - 216 \\
-(-24x^3 & +72x^2) & & \\
\hline
 & 144x^2 & -648x & +648 \\
 & -(144x^2 & -432x) & \\
\hline
 & & -216x & +648 \\
 & & -(-216x & +648) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-24x^2 + 144x - 216 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-144 \pm \sqrt{144^2 - 4 \cdot (-24) \cdot (-216)}}{2 \cdot (-24)}$$
$$x_{1/2} = \frac{-144 \pm \sqrt{0}}{-48}$$
$$x_{1/2} = \frac{-144 \pm 0}{-48}$$
$$x_1 = \frac{-144 + 0}{-48} \qquad x_2 = \frac{-144 - 0}{-48}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$
$x_2 = 3; \quad$ 3-fache Nullstelle
$f''(3) = 0$
$f''(3) = 0 \Rightarrow$
Extremwert:(3/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]3; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -72x^2 + 432x - 648 = 0$

$-72x^2 + 432x - 648 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-432 \pm \sqrt{432^2 - 4 \cdot (-72) \cdot (-648)}}{2 \cdot (-72)}$$
$$x_{1/2} = \frac{-432 \pm \sqrt{0}}{-144}$$
$$x_{1/2} = \frac{-432 \pm 0}{-144}$$
$$x_1 = \frac{-432 + 0}{-144} \qquad x_2 = \frac{-432 - 0}{-144}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$
$x_3 = 3; \quad$ 2-fache Nullstelle

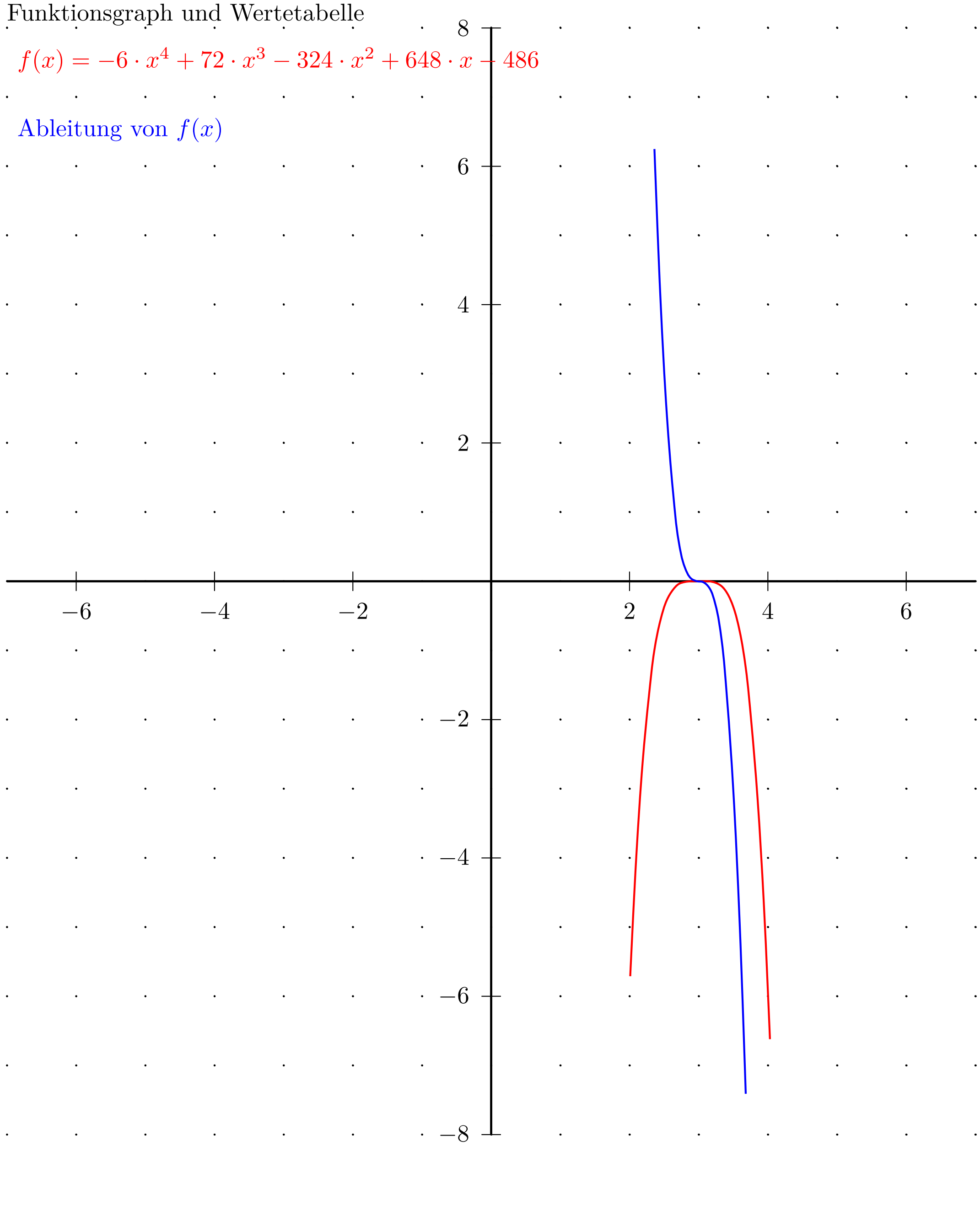
• Kruemmung

	$x <$	3	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-6 \cdot 10^4$	$2,4 \cdot 10^4$	$-7,2 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-48870\frac{3}{8}$	$2,06 \cdot 10^4$	$-6,5 \cdot 10^3$
-6	$-3,94 \cdot 10^4$	$1,75 \cdot 10^4$	$-5,83 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-31320\frac{3}{8}$	$1,47 \cdot 10^4$	$-5,2 \cdot 10^3$
-5	$-2,46 \cdot 10^4$	$1,23 \cdot 10^4$	$-4,61 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-18984\frac{3}{8}$	$1,01 \cdot 10^4$	$-4,05 \cdot 10^3$
-4	$-1,44 \cdot 10^4$	$8,23 \cdot 10^3$	$-3,53 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-10710\frac{3}{8}$	$6,59 \cdot 10^3$	$-3,04 \cdot 10^3$
-3	$-7,78 \cdot 10^3$	$5,18 \cdot 10^3$	$-2,59 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$-5490\frac{3}{8}$	$3,99 \cdot 10^3$	$-2,18 \cdot 10^3$
-2	$-3,75 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$-1,8 \cdot 10^3$
$-1\frac{1}{2}$	$-2460\frac{3}{8}$	$2,19 \cdot 10^3$	$-1,46 \cdot 10^3$
-1	$-1,54 \cdot 10^3$	$1,54 \cdot 10^3$	$-1,15 \cdot 10^3$
$-\frac{1}{2}$	$-900\frac{3}{8}$	$1,03 \cdot 10^3$	-882
0	-486	648	-648

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-486	648	-648
$\frac{1}{2}$	$-234\frac{3}{8}$	375	-450
1	-96	192	-288
$1\frac{1}{2}$	$-30\frac{3}{8}$	81	-162
2	-6	24	-72
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	3	-18
3	0	0	$-0,00367$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	-3	-18
4	-6	-24	-72
$4\frac{1}{2}$	$-30\frac{3}{8}$	-81	-162
5	-96	-192	-288
$5\frac{1}{2}$	$-234\frac{3}{8}$	-375	-450
6	-486	-648	-648
$6\frac{1}{2}$	$-900\frac{3}{8}$	$-1,03 \cdot 10^3$	-882
7	$-1,54 \cdot 10^3$	$-1,54 \cdot 10^3$	$-1,15 \cdot 10^3$

5 Funktionen höheren Grades

5.1 Aufgaben

(1) $f(x) = -2x^5$
(2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4$
(3) $f(x) = x^5 - 3x^4$
(4) $f(x) = 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x$
(5) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x$
(6) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^2$
(7) $f(x) = -\frac{1}{6}x^5 + 2x^3$
(8) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + 5x^3$
(9) $f(x) = -x^5 + 3x^3 + 2x^2$
(10) $f(x) = -x^5 + 3x^4 - 4x^2$
(11) $f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3$
(12) $f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 1$
(13) $f(x) = 2x^6 - 2x^5$
(14) $f(x) = -x^6 + 2x^5 - x^4$
(15) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
(16) $f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$
(17) $f(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4$

5.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -2x^5$
$f'(x) = -10x^4$
$f''(x) = -40x^3$
$f'''(x) = -120x^2$
$F(x) = \int(-2x^5)dx = -\frac{1}{3}x^6 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(-2)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-2 \cdot \infty^5] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-2 \cdot (-\infty)^5] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^5$
$f(-x) = -\left(-2 \cdot x^5\right)$
$f(-x) = -f(x) \to$ Symmetrie zum Ursprung:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -2x^5 = 0$
$x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_1 = 0$; 5-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	+	0	−

$x \in]-\infty; 0[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -10x^4 = 0$
$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_2 = 0$; 4-fache Nullstelle
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
Terrassenpukt:(0/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	−	0	−

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = -40x^3 = 0$
$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_3 = 0$; 3-fache Nullstelle
• Kruemmung

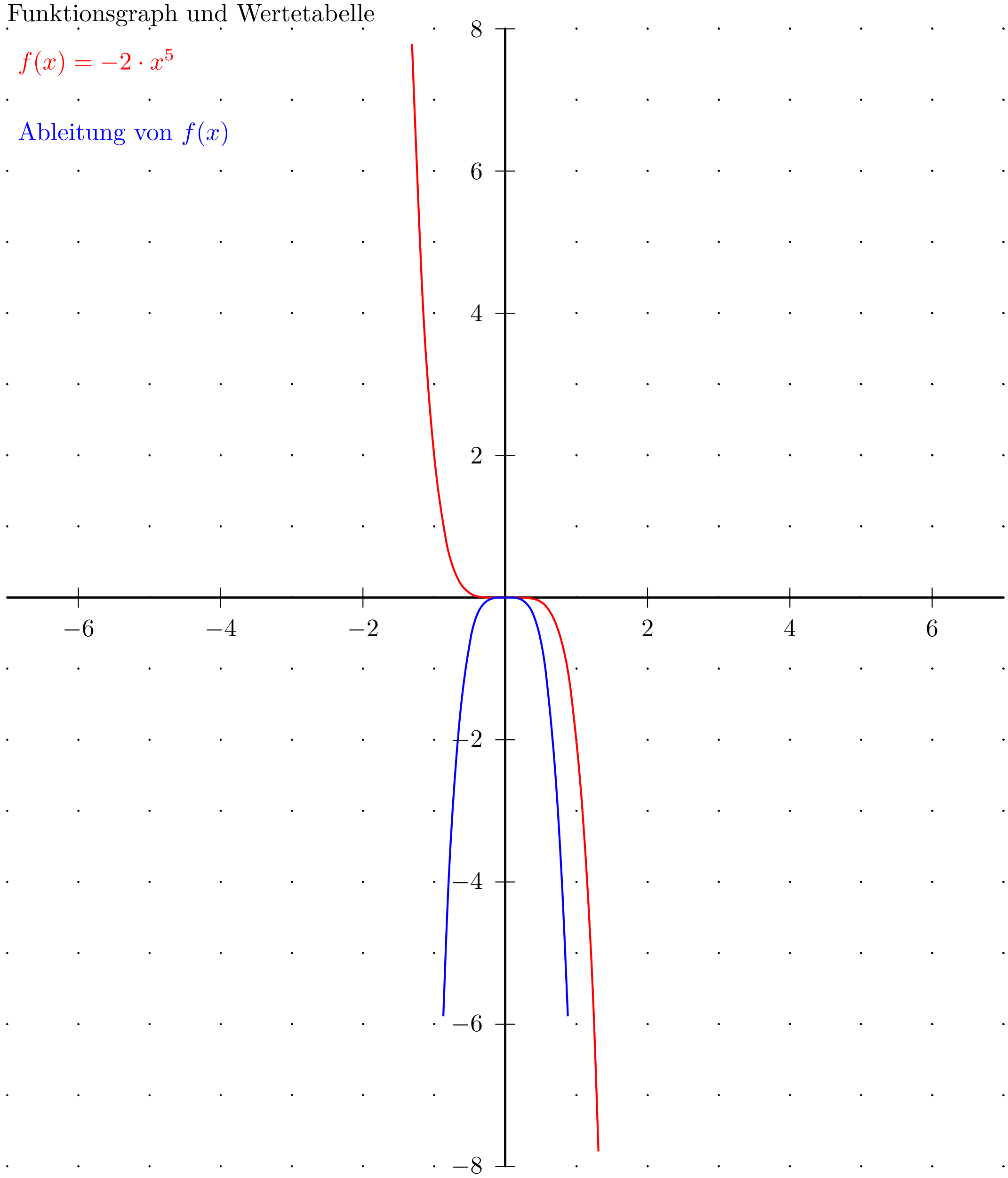
	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	+	0	−

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0;\infty[$	$f''(x) < 0$	rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$3,36 \cdot 10^4$	$-2,4 \cdot 10^4$	$1,37 \cdot 10^4$
$-6\frac{1}{2}$	$23205\frac{13}{16}$	$-1,79 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^4$
-6	$1,56 \cdot 10^4$	$-1,3 \cdot 10^4$	$8,64 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$10065\frac{11}{16}$	$-9,15 \cdot 10^3$	$6,66 \cdot 10^3$
-5	$6,25 \cdot 10^3$	$-6,25 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$3690\frac{9}{16}$	$-4,1 \cdot 10^3$	$3,65 \cdot 10^3$
-4	$2,05 \cdot 10^3$	$-2,56 \cdot 10^3$	$2,56 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$1050\frac{7}{16}$	$-1,5 \cdot 10^3$	$1,72 \cdot 10^3$
-3	486	-810	$1,08 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$195\frac{5}{16}$	-391	625
-2	64	-160	320
$-1\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{16}$	$-50,6$	135
-1	2	-10	40
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$-0,627$	5
0	0	$-1,88 \cdot 10^{-7}$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-1,88 \cdot 10^{-7}$	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	$-0,627$	-5
1	-2	-10	-40
$1\frac{1}{2}$	$-15\frac{3}{16}$	$-50,6$	-135
2	-64	-160	-320
$2\frac{1}{2}$	$-195\frac{5}{16}$	-391	-625
3	-486	-810	$-1,08 \cdot 10^3$
$3\frac{1}{2}$	$-1050\frac{7}{16}$	$-1,5 \cdot 10^3$	$-1,72 \cdot 10^3$
4	$-2,05 \cdot 10^3$	$-2,56 \cdot 10^3$	$-2,56 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$-3690\frac{9}{16}$	$-4,1 \cdot 10^3$	$-3,65 \cdot 10^3$
5	$-6,25 \cdot 10^3$	$-6,25 \cdot 10^3$	$-5 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$-10065\frac{11}{16}$	$-9,15 \cdot 10^3$	$-6,66 \cdot 10^3$
6	$-1,56 \cdot 10^4$	$-1,3 \cdot 10^4$	$-8,64 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$-23205\frac{13}{16}$	$-1,79 \cdot 10^4$	$-1,1 \cdot 10^4$
7	$-3,36 \cdot 10^4$	$-2,4 \cdot 10^4$	$-1,37 \cdot 10^4$

Aufgabe (2)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f\,(x) = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 = -\frac{1}{4}x^4(x - 2\frac{2}{3})$
$f'\,(x) = -1\frac{1}{4}x^4 + 2\frac{2}{3}x^3 = -1\frac{1}{4}x^3(x - 2\frac{2}{15})$
$f''\,(x) = -5x^3 + 8x^2 = -5x^2(x - 1\frac{3}{5})$
$f'''\,(x) = -15x^2 + 16x$
$F(x) = \int(-\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4)dx = -\frac{1}{24}x^6 + \frac{2}{15}x^5 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(-\frac{1}{4} + \frac{\frac{2}{3}}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f\,(x) = [-\frac{1}{4} \cdot \infty^5] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\,(x) = [-\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^5] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f\,(-x) = -\frac{1}{4} \cdot (-x)^5 + \frac{2}{3} \cdot (-x)^4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 = 0$
$x^4(-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0$
$-\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 0 \qquad / - \frac{2}{3}$
$-\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3} \qquad / : (-\frac{1}{4})$
$x = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{4}}$
$x = 2\dfrac{2}{3}$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{4-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2\dfrac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	$2\frac{2}{3}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 2\dfrac{2}{3}[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]2\dfrac{2}{3}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -1\dfrac{1}{4}x^4 + 2\dfrac{2}{3}x^3 = 0$
$x^3(-1\dfrac{1}{4}x + 2\dfrac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -1\dfrac{1}{4}x + 2\dfrac{2}{3} = 0$
$-1\dfrac{1}{4}x + 2\dfrac{2}{3} = 0 \qquad / - 2\dfrac{2}{3}$
$-1\dfrac{1}{4}x = -2\dfrac{2}{3} \qquad / : \left(-1\dfrac{1}{4}\right)$
$x = \frac{-2\frac{2}{3}}{-1\frac{1}{4}}$
$x = 2\dfrac{2}{15}$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2\dfrac{2}{15}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Extremwert:}(0/0)}$
$f''(2\frac{2}{15}) = -12,1$
$f''(2\frac{2}{15}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2\frac{2}{15}/2,76)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	$2\frac{2}{15}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0; 2\frac{2}{15}[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]2\frac{2}{15}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -5x^3 + 8x^2 = 0$
$x^2(-5x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -5x + 8 = 0$
$-5x + 8 = 0 \qquad / - 8$
$-5x = -8 \qquad / : (-5)$
$x = \frac{-8}{-5}$
$x = 1\frac{3}{5}$
$\underline{x_5 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 1\frac{3}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(1\frac{3}{5}) = 1,75$
$f'''(1\frac{3}{5}) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1\frac{3}{5}/1,75)}$

• Kruemmung

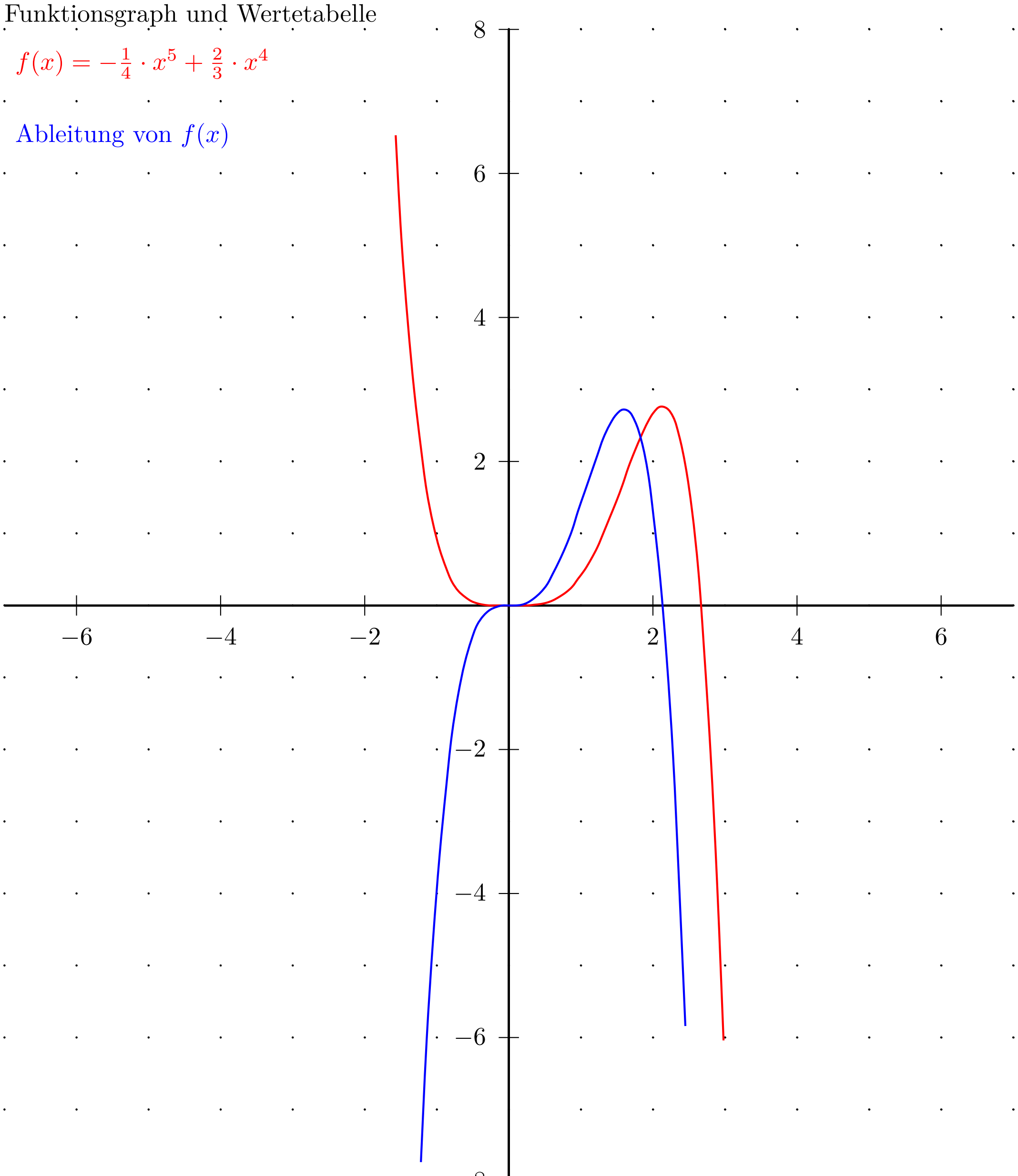
	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{3}{5}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 1\frac{3}{5}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]1\frac{3}{5}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_0^{2\frac{2}{3}} \left(-\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4\right) dx = \left[-\frac{1}{24}x^6 + \frac{2}{15}x^5\right]_0^{2\frac{2}{3}}$
$= \left(-\frac{1}{24} \cdot 2\frac{2}{3}^6 + \frac{2}{15} \cdot 2\frac{2}{3}^5\right) - \left(-\frac{1}{24} \cdot 0^6 + \frac{2}{15} \cdot 0^5\right)$
$= (3) - (0) = 3$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$5802\frac{5}{12}$	$-3,92 \cdot 10^3$	$2,11 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$4,09 \cdot 10^3$	$-2,96 \cdot 10^3$	$1,71 \cdot 10^3$
-6	$2,81 \cdot 10^3$	$-2,2 \cdot 10^3$	$1,37 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$1,87 \cdot 10^3$	$-1,59 \cdot 10^3$	$1,07 \cdot 10^3$
-5	$1197\frac{11}{12}$	$-1114\frac{37}{61}$	825
$-4\frac{1}{2}$	735	-756	618
-4	$426\frac{2}{3}$	-491	448
$-3\frac{1}{2}$	231	-302	312
-3	$114\frac{3}{4}$	-173	207
$-2\frac{1}{2}$	$50,5$	$-90,5$	128
-2	$18\frac{2}{3}$	$-41,3$	72
$-1\frac{1}{2}$	$5,27$	$-15,3$	$34,9$
-1	$\frac{11}{12}$	$-3,92$	13
$-\frac{1}{2}$	$0,0495$	$-0,412$	$2,63$
0	0	0	$0,000408$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	$0,000408$
$\frac{1}{2}$	$0,0339$	$0,255$	$1,38$
1	$\frac{5}{12}$	$1,42$	3
$1\frac{1}{2}$	$1,48$	$2,67$	$1,12$
2	$2\frac{2}{3}$	$1,33$	-8
$2\frac{1}{2}$	$1,63$	$-7,16$	$-28,1$
3	$-6\frac{3}{4}$	$-29,3$	-63
$3\frac{1}{2}$	$-31,3$	$-73,3$	-116
4	$-85\frac{1}{3}$	-149	-192
$4\frac{1}{2}$	-188	-270	-294
5	$-364\frac{7}{12}$	-448	-425
$5\frac{1}{2}$	-648	-700	-590
6	$-1,08 \cdot 10^3$	$-1,04 \cdot 10^3$	-792
$6\frac{1}{2}$	$-1,71 \cdot 10^3$	$-1,5 \cdot 10^3$	$-1,04 \cdot 10^3$
7	$-2601\frac{1}{12}$	$-2,09 \cdot 10^3$	$-1,32 \cdot 10^3$

Aufgabe (3)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^5 - 3x^4 = x^4(x-3)$
$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 = 5x^3(x - 2\frac{2}{5})$
$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 = 20x^2(x - 1\frac{4}{5})$
$f'''(x) = 60x^2 - 72x$
$F(x) = \int (x^5 - 3x^4)dx = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(1 - \dfrac{3}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^5] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^5 - 3 \cdot (-x)^4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^5 - 3x^4 = 0$
$x^4(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x - 3 = 0$
$x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$x = 3$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{4-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]3;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 = 0$
$x^3(5x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 5x - 12 = 0$
$5x - 12 = 0 \qquad / + 12$
$5x = 12 \qquad / : 5$
$x = \dfrac{12}{5}$
$x = 2\dfrac{2}{5}$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2\dfrac{2}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Extremwert:}(0/0)}$
$f''(2\dfrac{2}{5}) = 69\dfrac{3}{25} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2\dfrac{2}{5}/-19,9)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	$2\frac{2}{5}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]2\frac{2}{5};\infty[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend

$x \in]0;2\frac{2}{5}[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 = 0$
$x^2(20x - 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 20x - 36 = 0$
$20x - 36 = 0 \qquad / + 36$
$20x = 36 \qquad / : 20$
$x = \frac{36}{20}$
$x = 1\frac{4}{5}$
$x_5 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle
$x_6 = 1\frac{4}{5}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f'''(1\frac{4}{5}) = -12,6$
$f'''(1\frac{4}{5}) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(1\frac{4}{5}/-12,6)$
• Kruemmung

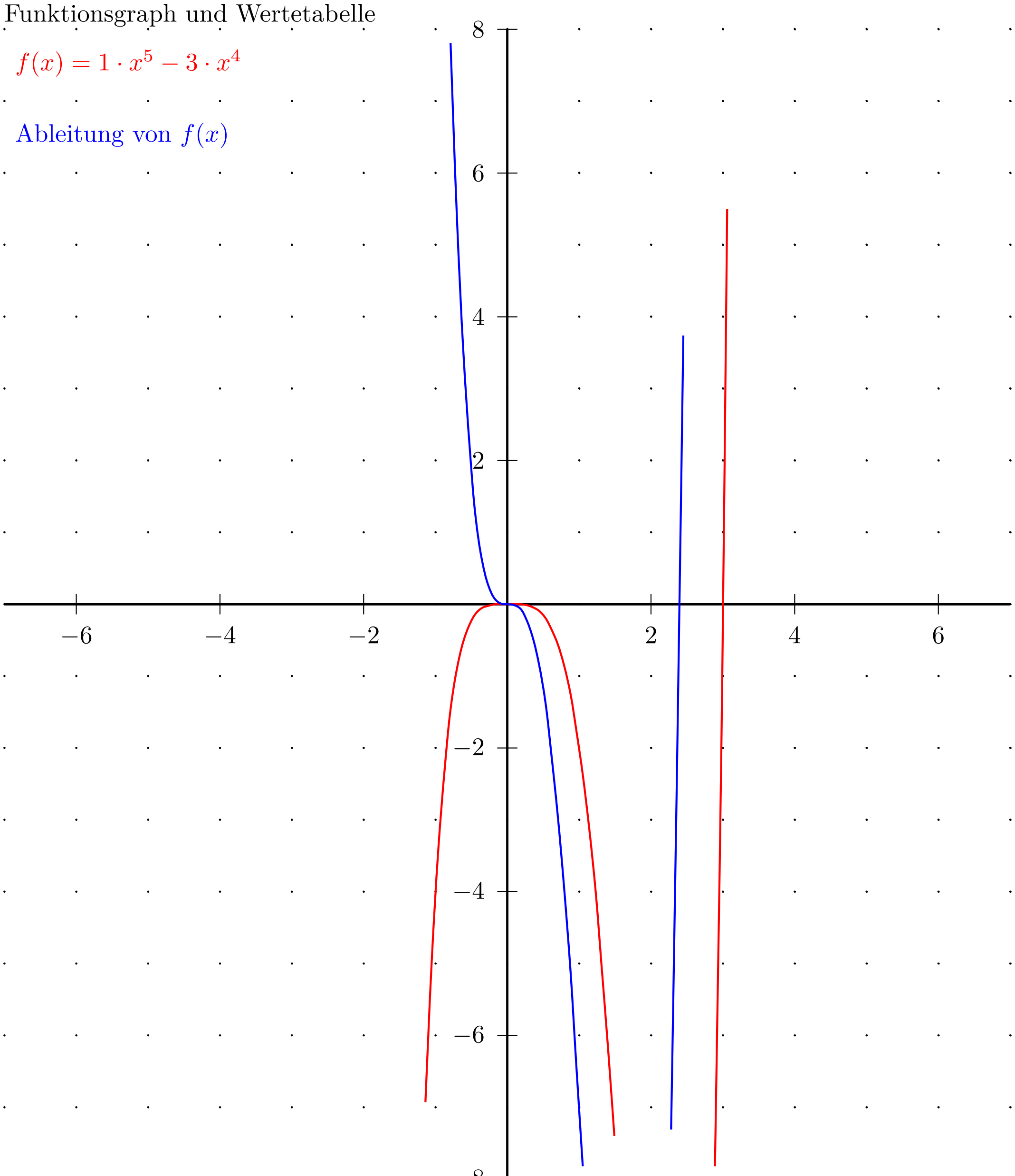
	$x <$	0	$< x <$	$1\frac{4}{5}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]1\frac{4}{5};\infty[$	$f''(x) > 0$	linksgekrümmt

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;1\frac{4}{5}[$	$f''(x) < 0$	rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_0^3 \left(x^5 - 3x^4\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5\right]_0^3$
$= \left(\frac{1}{6} \cdot 3^6 - \frac{3}{5} \cdot 3^5\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot 0^6 - \frac{3}{5} \cdot 0^5\right)$
$= \left(-24\frac{3}{10}\right) - (0) = -24\frac{3}{10}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2,4 \cdot 10^4$	$1,61 \cdot 10^4$	$-8,62 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-16958\frac{3}{32}$	$1,22 \cdot 10^4$	$-7,01 \cdot 10^3$
-6	$-1,17 \cdot 10^4$	$9,07 \cdot 10^3$	$-5,62 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-7778\frac{1}{32}$	$6,57 \cdot 10^3$	$-4,42 \cdot 10^3$
-5	$-5 \cdot 10^3$	$4,63 \cdot 10^3$	$-3,4 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-3075\frac{15}{32}$	$3,14 \cdot 10^3$	$-2,55 \cdot 10^3$
-4	$-1,79 \cdot 10^3$	$2,05 \cdot 10^3$	$-1,86 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-975\frac{13}{32}$	$1,26 \cdot 10^3$	$-1,3 \cdot 10^3$
-3	-486	729	-864
$-2\frac{1}{2}$	$-214\frac{27}{32}$	383	-538
-2	-80	176	-304
$-1\frac{1}{2}$	$-22\frac{25}{32}$	$65,8$	-149
-1	-4	17	-56
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{32}$	$1,82$	$-11,5$
0	0	0	$-0,00184$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	$-0,00184$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{32}$	$-1,19$	$-6,5$
1	-2	-7	-16
$1\frac{1}{2}$	$-7\frac{19}{32}$	$-15,2$	$-13,5$
2	-16	-16	16
$2\frac{1}{2}$	$-19\frac{17}{32}$	$7,82$	$87,5$
3	0	81	216
$3\frac{1}{2}$	$75\frac{1}{32}$	236	417
4	256	512	704
$4\frac{1}{2}$	$615\frac{3}{32}$	957	$1,09 \cdot 10^3$
5	$1,25 \cdot 10^3$	$1,63 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$2287\frac{21}{32}$	$2,58 \cdot 10^3$	$2,24 \cdot 10^3$
6	$3,89 \cdot 10^3$	$3,89 \cdot 10^3$	$3,02 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$6247\frac{23}{32}$	$5,63 \cdot 10^3$	$3,97 \cdot 10^3$
7	$9,6 \cdot 10^3$	$7,89 \cdot 10^3$	$5,1 \cdot 10^3$

Aufgabe (4)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x = 2(x+1)x(x^2 + \frac{1}{2})(x-2)$
$f'(x) = 10x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 2x - 2 = 10(x^2 + 0,039x + 0,189)(x + 0,691)(x - 1,53)$
$f''(x) = 40x^3 - 24x^2 - 18x - 2 = 40(x + 0,319)(x + 0,147)(x - 1,07)$
$f'''(x) = 120x^2 - 48x - 18$
$F(x) = \int(2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(2 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [2 \cdot \infty^5] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [2 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 2 \cdot (-x)^5 - 2 \cdot (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^3 - 1 \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x = 0$
$x(2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2 = 0$
$2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$
Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{cccccl}
(2x^4 & -2x^3 & -3x^2 & -x & -2 &):(x+1) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2 \\
-(2x^4 & +2x^3) & & & & \\ \hline
 & -4x^3 & -3x^2 & -x & -2 & \\
 & -(-4x^3 & -4x^2) & & & \\ \hline
 & & x^2 & -x & -2 & \\
 & & -(x^2 & +x) & & \\ \hline
 & & & -2x & -2 & \\
 & & & -(-2x & -2) & \\ \hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:2

$$\begin{array}{ccccl}
(2x^3 & -4x^2 & +x & -2 &):(x-2) = 2x^2 + 1 \\
-(2x^3 & -4x^2) & & & \\ \hline
 & x & -2 & & \\
 & & -(x & -2) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$2x^2 + 1 = 0 \qquad / - 1$
$2x^2 = -1 \qquad / : 2$
$x^2 = \dfrac{-1}{2}$
keine Lösung
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]0;2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 10x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 2x - 2 = 0$

$10x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 2x - 2$
$NumerischeSuche:$

$x_4 = -0,691;$ 1-fache Nullstelle
$x_5 = 1,53;$ 1-fache Nullstelle
$f''(-0,691) = -14,2$
$f''(-0,691) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-0,691/1,12)$
$f''(1,53) = 57,5 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(1,53/-10,3)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-0,691$	$< x <$	$1,53$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -0,691[\quad \cup \quad]1,53; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-0,691; 1,53[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 40x^3 - 24x^2 - 18x - 2 = 0$

$40x^3 - 24x^2 - 18x - 2 = 0$
$NumerischeSuche:$
$x_6 = -0,319;$ 1-fache Nullstelle
$x_7 = -0,147;$ 1-fache Nullstelle
$x_8 = 1,07;$ 1-fache Nullstelle
$f'''(-0,319) = 0,607$
$f'''(-0,319) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(-0,319/0,607)$
$f'''(-0,147) = 0,281$
$f'''(-0,147) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(-0,147/0,281)$
$f'''(1,07) = -6,73$
$f'''(1,07) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(1,07/-6,73)$
• Kruemmung

	$x <$	$-0,319$	$< x <$	$-0,147$	$< x <$	$1,07$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-0,319; -0,147[\quad \cup \quad]1,07; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -0,319[\quad \cup \quad]-0,147; 1,07[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

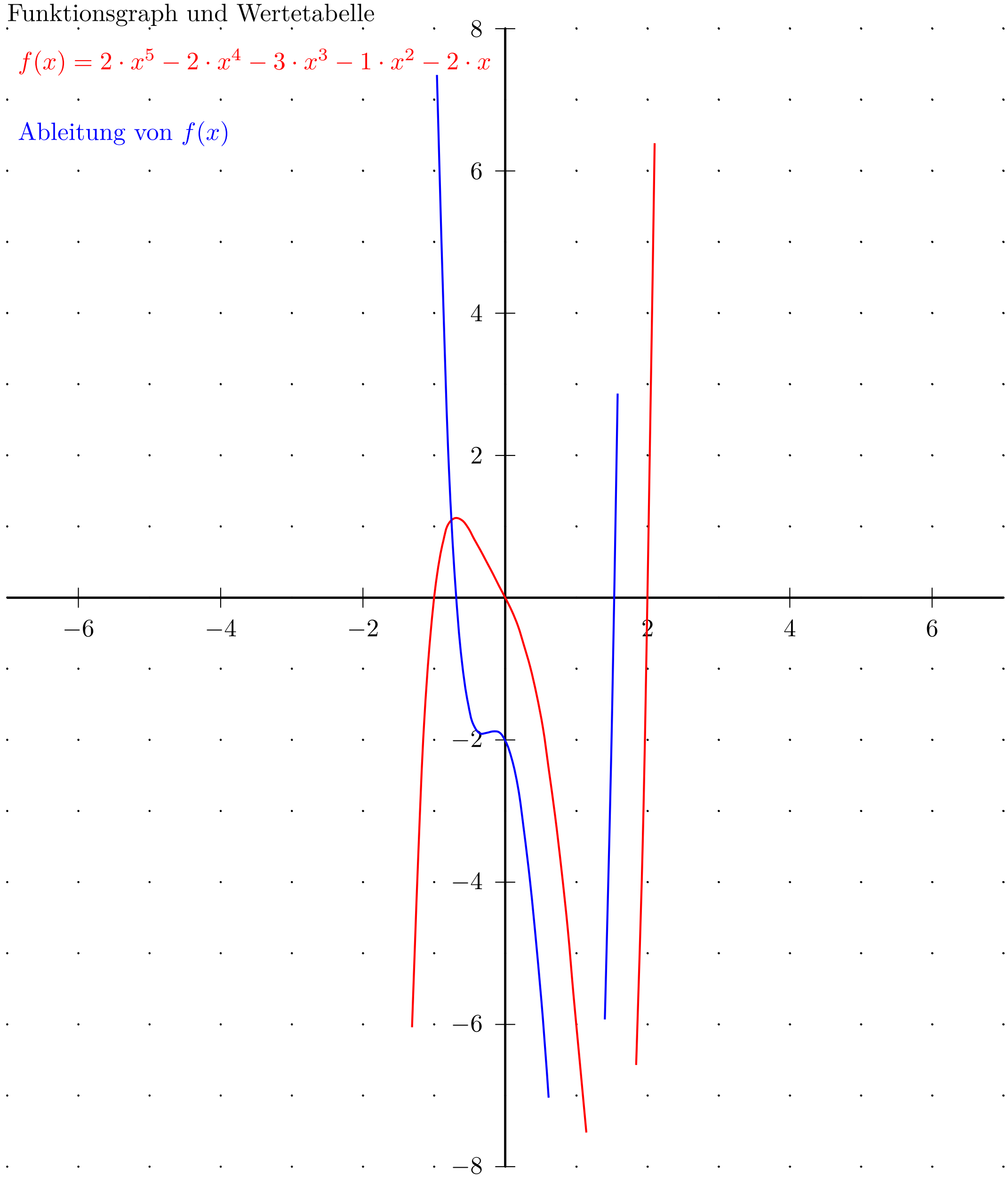
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{0} \left(2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 0^6 - \frac{2}{5} \cdot 0^5 - \frac{3}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 1 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^6 - \frac{2}{5} \cdot (-1)^5 - \frac{3}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 1 \cdot (-1)^2\right)$$
$$= (0) - \left(-\frac{41}{60}\right) = \frac{41}{60}$$
$$A = \int_{0}^{2} \left(2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{2}$$

$= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^6 - \frac{2}{5} \cdot 2^5 - \frac{3}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 1 \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^6 - \frac{2}{5} \cdot 0^5 - \frac{3}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 1 \cdot 0^2\right)$

$= \left(-10\frac{2}{15}\right) - (0) = -10\frac{2}{15}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-3,74\cdot 10^4$	$2,63\cdot 10^4$	$-1,48\cdot 10^4$
$-6\frac{1}{2}$	$-25981\frac{5}{16}$	$1,97\cdot 10^4$	$-1,19\cdot 10^4$
-6	$-1,75\cdot 10^4$	$1,44\cdot 10^4$	$-9398\frac{3}{79}$
$-5\frac{1}{2}$	$-11415\frac{15}{16}$	$1,02\cdot 10^4$	$-7,28\cdot 10^3$
-5	$-7,14\cdot 10^3$	$7,03\cdot 10^3$	$-5,51\cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-4248\frac{9}{16}$	$4,65\cdot 10^3$	$-4,05\cdot 10^3$
-4	$-2,38\cdot 10^3$	$2,93\cdot 10^3$	$-2,87\cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-1227\frac{3}{16}$	$1,74\cdot 10^3$	$-1,95\cdot 10^3$
-3	-570	949	$-1,24\cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$-227\frac{13}{16}$	462	-732
-2	-72	190	-382
$-1\frac{1}{2}$	$-14\frac{7}{16}$	$58,4$	-164
-1	0	$9,01$	-48
$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	$-1,62$	-4
0	0	-2	-2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-2	-2
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{16}$	$-5,63$	-12
1	-6	-11	-4
$1\frac{1}{2}$	$-10\frac{5}{16}$	$-1,62$	52
2	0	54	186
$2\frac{1}{2}$	$59\frac{1}{16}$	202	428
3	228	505	808
$3\frac{1}{2}$	$602\frac{7}{16}$	$1,04\cdot 10^3$	$1,36\cdot 10^3$
4	$1,32\cdot 10^3$	$1,89\cdot 10^3$	$2,1\cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$2567\frac{13}{16}$	$3,18\cdot 10^3$	$3,08\cdot 10^3$
5	$4,59\cdot 10^3$	$5,01\cdot 10^3$	$4,31\cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$7695\frac{3}{16}$	$7,53\cdot 10^3$	$5,83\cdot 10^3$
6	$1,23\cdot 10^4$	$1,09\cdot 10^4$	$7,67\cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$18756\frac{9}{16}$	$1,53\cdot 10^4$	$9,85\cdot 10^3$
7	$2,77\cdot 10^4$	$2,08\cdot 10^4$	$1,24\cdot 10^4$

Aufgabe (5)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x = (x+3)(x+1)x(x-1)(x-3)$
$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 9 = 5(x+2,38)(x+0,563)(x-0,563)(x-2,38)$
$f''(x) = 20x^3 - 60x = 20(x+1,73)x(x-1,73)$
$f'''(x) = 60x^2 - 60$
$F(x) = \int (x^5 - 10x^3 + 9x)dx = \frac{1}{6}x^6 - 2\frac{1}{2}x^4 + 4\frac{1}{2}x^2 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(1 - \frac{10}{x^2} + \frac{9}{x^4})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^5] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^5 - 10 \cdot (-x)^3 + 9 \cdot (-x)$
$f(-x) = -\left(1 \cdot x^5 - 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x\right)$
$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x = 0$
$x(x^4 - 10x^2 + 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 10u + 9 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$
$u_{1/2} = \dfrac{+10 \pm \sqrt{64}}{2}$
$u_{1/2} = \dfrac{10 \pm 8}{2}$
$u_1 = \dfrac{10+8}{2} \qquad u_2 = \dfrac{10-8}{2}$
$u_1 = 9 \qquad u_2 = 1$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-3;-1[\quad \cup \quad]0;1[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-1;0[\quad \cup \quad]1;3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 9 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$5u^2 - 30u + 9 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{+30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9}}{2 \cdot 5}$
$u_{1/2} = \dfrac{+30 \pm \sqrt{720}}{10}$
$u_{1/2} = \dfrac{30 \pm 26,8}{10}$
$u_1 = \dfrac{30 + 26,8}{10} \qquad u_2 = \dfrac{30 - 26,8}{10}$
$u_1 = 5,68 \qquad u_2 = 0,317$
$x^2 = 5,68$
$x = \pm\sqrt{5,68}$
$x_1 = 2,38 \qquad x_2 = -2,38$
$x^2 = 0,317$
$x = \pm\sqrt{0,317}$
$x_1 = 0,563 \qquad x_2 = -0,563$
$\underline{x_6 = -2,38; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = -0,563; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 0,563; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_9 = 2,38; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,38) = -128$
$f''(-2,38) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2,38/37)}$
$f''(-0,563) = 30,2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-0,563/-3,34)}$
$f''(0,563) = -30,2$
$f''(0,563) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0,563/3,34)}$
$f''(2,38) = 128 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2,38/-37)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,38$	$< x <$	$-0,563$	$< x <$	$0,563$	$< x <$	$2,38$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;-2,38[\quad \cup \quad]-0,563;0,563[\quad \cup \quad]2,38;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-2,38;-0,563[\quad \cup \quad]0,563;2,38[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 20x^3 - 60x = 0$
$x(20x^2 - 60) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 20x^2 - 60 = 0$
$20x^2 - 60 = 0 \qquad / + 60$
$20x^2 = 60 \qquad / : 20$
$x^2 = \dfrac{60}{20}$
$x = \pm\sqrt{3}$
$x_1 = 1,73 \qquad x_2 = -1,73$
$\underline{x_10 = -1,73; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_11 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_12 = 1,73; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1,73) = 20,8$
$f'''(-1,73) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1,73/20,8)}$
$f'''(0) = 0$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/0)}$
$f'''(1,73) = -20,8$
$f'''(1,73) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1,73/-20,8)}$
• Kruemmung

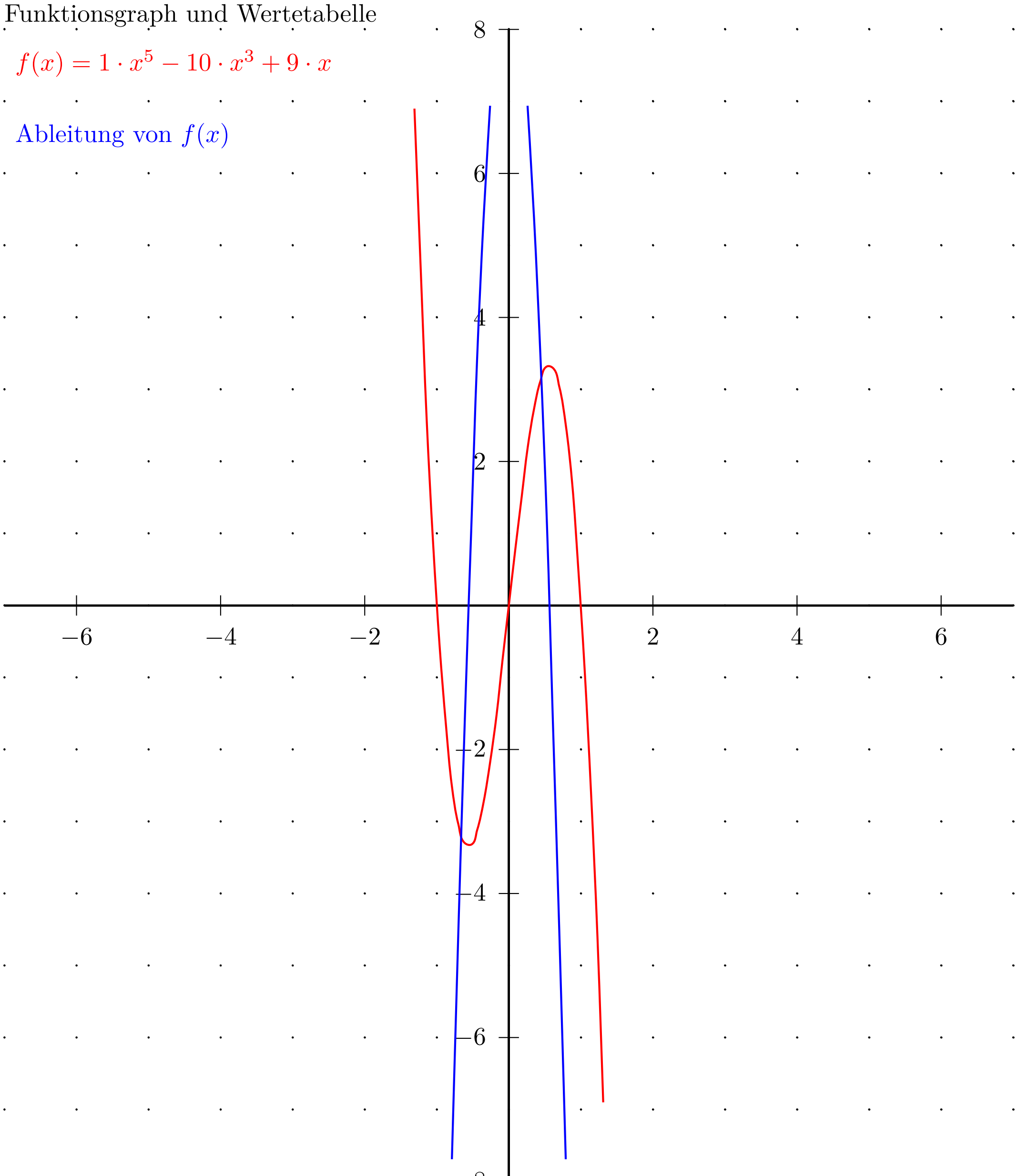
	$x <$	$-1,73$	$< x <$	0	$< x <$	$1,73$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-1,73;0[\quad \cup \quad]1,73;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1,73[\quad \cup \quad]0;1,73[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^5 - 10x^3 + 9x\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - 2\frac{1}{2}x^4 + 4\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}$
$= \left(\frac{1}{6} \cdot (-1)^6 - 2\frac{1}{2} \cdot (-1)^4 + 4\frac{1}{2} \cdot (-1)^2\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot (-3)^6 - 2\frac{1}{2} \cdot (-3)^4 + 4\frac{1}{2} \cdot (-3)^2\right)$
$= \left(2\frac{1}{6}\right) - \left(-40\frac{1}{2}\right) = 42\frac{2}{3}$
$A = \int_{-1}^{0} \left(x^5 - 10x^3 + 9x\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - 2\frac{1}{2}x^4 + 4\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$
$= \left(\frac{1}{6} \cdot 0^6 - 2\frac{1}{2} \cdot 0^4 + 4\frac{1}{2} \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot (-1)^6 - 2\frac{1}{2} \cdot (-1)^4 + 4\frac{1}{2} \cdot (-1)^2\right)$
$= (0) - \left(2\frac{1}{6}\right) = -2\frac{1}{6}$
$A = \int_{0}^{1} \left(x^5 - 10x^3 + 9x\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - 2\frac{1}{2}x^4 + 4\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$
$= \left(\frac{1}{6} \cdot 1^6 - 2\frac{1}{2} \cdot 1^4 + 4\frac{1}{2} \cdot 1^2\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot 0^6 - 2\frac{1}{2} \cdot 0^4 + 4\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$
$= \left(2\frac{1}{6}\right) - (0) = 2\frac{1}{6}$
$A = \int_{1}^{3} \left(x^5 - 10x^3 + 9x\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - 2\frac{1}{2}x^4 + 4\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}$
$= \left(\frac{1}{6} \cdot 3^6 - 2\frac{1}{2} \cdot 3^4 + 4\frac{1}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot 1^6 - 2\frac{1}{2} \cdot 1^4 + 4\frac{1}{2} \cdot 1^2\right)$
$= \left(-40\frac{1}{2}\right) - \left(2\frac{1}{6}\right) = -42\frac{2}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1,34 \cdot 10^4$	$1,05 \cdot 10^4$	$-6,44 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-8915\frac{5}{32}$	$7,67 \cdot 10^3$	$-5,1 \cdot 10^3$
-6	$-5,67 \cdot 10^3$	$5,41 \cdot 10^3$	$-3,96 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-3418\frac{19}{32}$	$3,68 \cdot 10^3$	$-3 \cdot 10^3$
-5	$-1,92 \cdot 10^3$	$2,38 \cdot 10^3$	$-2,2 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-974\frac{17}{32}$	$1,45 \cdot 10^3$	$-1,55 \cdot 10^3$
-4	-420	809	$-1,04 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-127\frac{31}{32}$	392	-648
-3	0	144	-360
$-2\frac{1}{2}$	$36\frac{3}{32}$	$16,8$	-163
-2	30	-31	-40
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{21}{32}$	$-33,2$	$22,5$
-1	0	-16	40
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{9}{32}$	$1,81$	$27,5$
0	0	9	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	9	0
$\frac{1}{2}$	$3\frac{9}{32}$	$1,81$	$-27,5$
1	0	-16	-40
$1\frac{1}{2}$	$-12\frac{21}{32}$	$-33,2$	$-22,5$
2	-30	-31	40
$2\frac{1}{2}$	$-36\frac{3}{32}$	$16,8$	163
3	0	144	360
$3\frac{1}{2}$	$127\frac{31}{32}$	392	648
4	420	809	$1,04 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$974\frac{17}{32}$	$1,45 \cdot 10^3$	$1,55 \cdot 10^3$
5	$1,92 \cdot 10^3$	$2,38 \cdot 10^3$	$2,2 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$3418\frac{19}{32}$	$3,68 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$
6	$5,67 \cdot 10^3$	$5,41 \cdot 10^3$	$3,96 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$8915\frac{5}{32}$	$7,67 \cdot 10^3$	$5,1 \cdot 10^3$
7	$1,34 \cdot 10^4$	$1,05 \cdot 10^4$	$6,44 \cdot 10^3$

Aufgabe (6)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1,59x + 2,52)(x + 1,59)x^2$
$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 + 4x = 2\frac{1}{2}(x^2 - 1,17x + 1,37)(x + 1,17)x$
$f''(x) = 10x^3 + 4 = 10(x^2 - 0,737x + 0,543)(x + 0,737)$
$f'''(x) = 30x^2$
$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^5 + 2x^2)dx = \frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{3}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(\frac{1}{2} + \dfrac{2}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^5] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^5] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^5 + 2 \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^2 = 0$
$x^2(\frac{1}{2}x^3 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^3 + 2 = 0$
$\frac{1}{2}x^3 + 2 = 0\frac{1}{2}x^3 + 2 = 0 \qquad / - 2$
$\frac{1}{2}x^3 = -2 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x^3 = \dfrac{-2}{\frac{1}{2}}$
$x = \sqrt[3]{-4}$
$x = -1,59$
Polynomdivision:$(-1,59)$

$$\begin{array}{llll}
(\frac{1}{2}x^3 & & & +2 \quad) : (x + 1,59) = \frac{1}{2}x^2 - 0,794x + 1,26 \\
-(\frac{1}{2}x^3 & +0,794x^2) & & \\
\hline
 & -0,794x^2 & & +2 \\
 & -(-0,794x^2 & -1,26x) & \\
\hline
 & & 1,26x & +2 \\
 & & -(1,26x & +2) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$\dfrac{1}{2}x^2 - 0,794x + 1,26 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+0,794 \pm \sqrt{(-0,794)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,26}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$
$x_{1/2} = \dfrac{+0,794 \pm \sqrt{-1,89}}{1}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_1 = -1,59; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1,59$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-1,59;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-1,59[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 + 4x = 0$
$x(2\frac{1}{2}x^3 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2\frac{1}{2}x^3 + 4 = 0$
$2\frac{1}{2}x^3 + 4 = 02\frac{1}{2}x^3 + 4 = 0 \qquad / - 4$
$2\frac{1}{2}x^3 = -4 \qquad / : 2\frac{1}{2}$
$x^3 = \frac{-4}{2\frac{1}{2}}$
$x = \sqrt[3]{-1\frac{3}{5}}$
$x = -1,17$
Polynomdivision:$(-1,17)$

$$
\begin{array}{llllll}
(2\frac{1}{2}x^3 & & & +4 &) : (x+1,17) = 2\frac{1}{2}x^2 - 2,92x + 3,42 \\
-(2\frac{1}{2}x^3 & +2,92x^2) & & & \\
\hline
 & -2,92x^2 & & +4 & \\
 & -(-2,92x^2 & -3,42x) & & \\
\hline
 & & 3,42x & +4 & \\
 & & -(3,42x & +4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$2\frac{1}{2}x^2 - 2,92x + 3,42 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+2,92 \pm \sqrt{(-2,92)^2 - 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3,42}}{2 \cdot 2\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2,92 \pm \sqrt{-25,6}}{5}$$

Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_3 = -1,17; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1,17) = -12$
$f''(-1,17) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1,17/1,64)}$
$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,17$	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1,17[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-1,17; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 10x^3 + 4 = 0$

$10x^3 + 4 = 010x^3 + 4 = 0 \qquad / - 4$
$10x^3 = -4 \qquad / : 10$
$x^3 = \frac{-4}{10}$
$x = \sqrt[3]{-\frac{2}{5}}$
$x = -0,737$
Polynomdivision:$(-0,737)$

$$\begin{array}{lllll}
(10x^3 & & & +4 &) : (x+0,737) = 10x^2 - 7,37x + 5,43 \\
-(10x^3 & +7,37x^2) & & & \\
\hline
 & -7,37x^2 & & +4 & \\
 & -(-7,37x^2 & -5,43x) & & \\
\hline
 & & 5,43x & +4 & \\
 & & -(5,43x & +4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$10x^2 - 7,37x + 5,43 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+7,37 \pm \sqrt{(-7,37)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 5,43}}{2 \cdot 10}$

$x_{1/2} = \dfrac{+7,37 \pm \sqrt{-163}}{20}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$\underline{x_5 = -0,737; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-0,737) = 0,977$

$f'''(-0,737) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,737/0,977)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-0,737$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-0,737; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -0,737[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

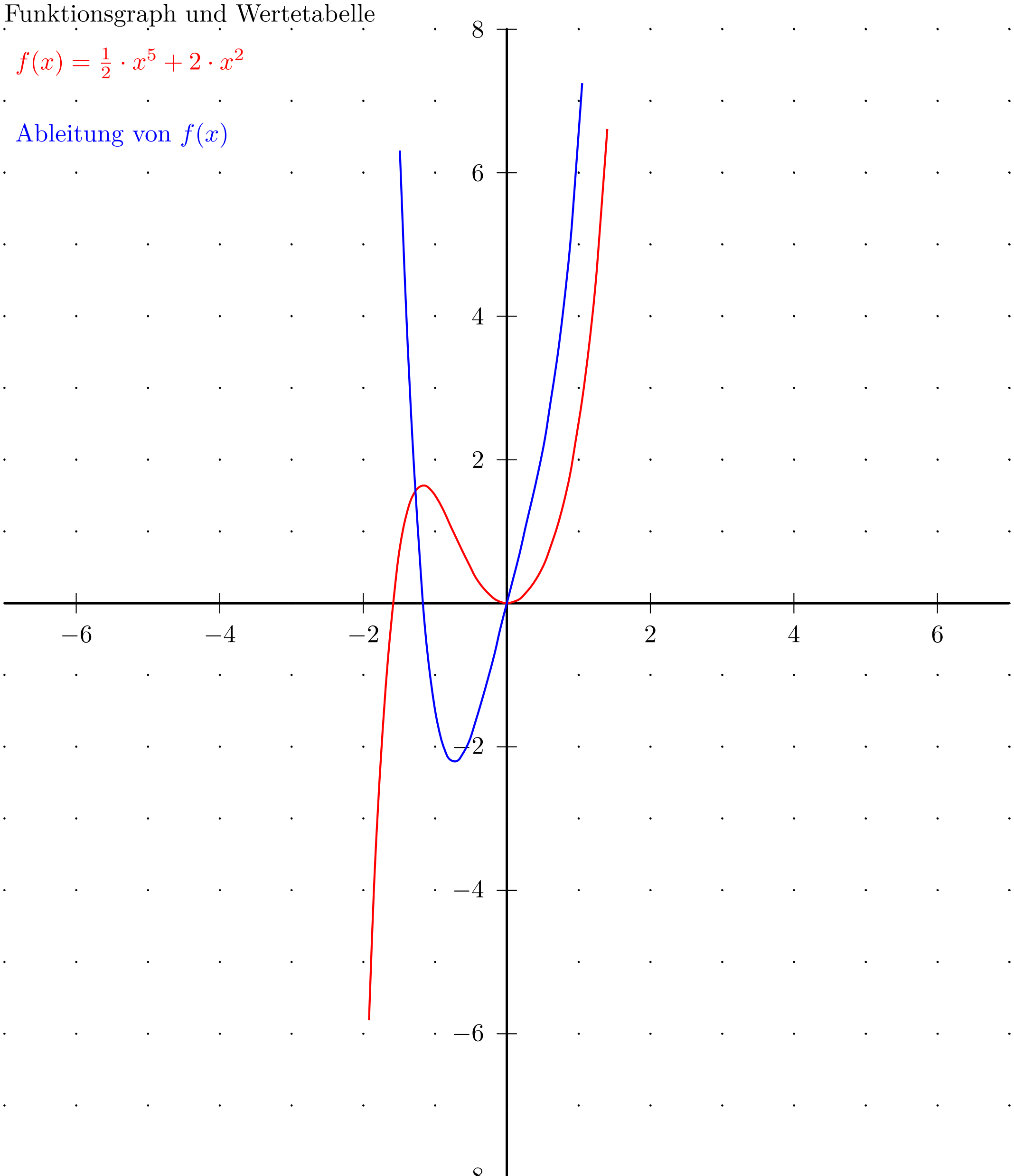
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \displaystyle\int_{-1,59}^{0} \left(\frac{1}{2}x^5 + 2x^2\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-1,59}^{0}$

$= \left(\dfrac{1}{12} \cdot 0^6 + \dfrac{2}{3} \cdot 0^3\right) - \left(\dfrac{1}{12} \cdot (-1,59)^6 + \dfrac{2}{3} \cdot (-1,59)^3\right)$

$= (0) - \left(-1\dfrac{1}{3}\right) = 1\dfrac{1}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-8305\frac{1}{2}$	$5,97 \cdot 10^3$	$-3,43 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-5716\frac{61}{64}$	$4,44 \cdot 10^3$	$-2,74 \cdot 10^3$
-6	$-3,82 \cdot 10^3$	$3,22 \cdot 10^3$	$-2,16 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-2455\frac{59}{64}$	$2,27 \cdot 10^3$	$-1,66 \cdot 10^3$
-5	$-1512\frac{1}{2}$	$1,54 \cdot 10^3$	$-1,25 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-882\frac{9}{64}$	$1,01 \cdot 10^3$	-907
-4	-480	624	-636
$-3\frac{1}{2}$	$-238\frac{7}{64}$	361	-425
-3	$-103\frac{1}{2}$	191	-266
$-2\frac{1}{2}$	$-36\frac{21}{64}$	$87,7$	-152
-2	-8	32	-76
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{45}{64}$	$6,66$	$-29,8$
-1	$1\frac{1}{2}$	$-1,5$	-6
$-\frac{1}{2}$	$\frac{31}{64}$	$-1,84$	$2,75$
0	0	0	4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{33}{64}$	$2,16$	$5,25$
1	$2\frac{1}{2}$	$6,5$	14
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{19}{64}$	$18,7$	$37,8$
2	24	48	84
$2\frac{1}{2}$	$61\frac{21}{64}$	108	160
3	$139\frac{1}{2}$	215	274
$3\frac{1}{2}$	$287\frac{7}{64}$	389	433
4	544	656	644
$4\frac{1}{2}$	$963\frac{9}{64}$	$1,04 \cdot 10^3$	915
5	$1612\frac{1}{2}$	$1,58 \cdot 10^3$	$1,25 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$2576\frac{59}{64}$	$2,31 \cdot 10^3$	$1,67 \cdot 10^3$
6	$3,96 \cdot 10^3$	$3,26 \cdot 10^3$	$2,16 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$5885\frac{61}{64}$	$4,49 \cdot 10^3$	$2,75 \cdot 10^3$
7	$8501\frac{1}{2}$	$6,03 \cdot 10^3$	$3,43 \cdot 10^3$

Aufgabe (7)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f\left(x\right)=-\frac{1}{6}x^{5}+2x^{3}=-\frac{1}{6}(x+3,46)x^{3}(x-3,46)$
$f'\left(x\right)=-\frac{5}{6}x^{4}+6x^{2}=-\frac{5}{6}(x+2,68)x^{2}(x-2,68)$
$f''\left(x\right)=-3\frac{1}{3}x^{3}+12x=-3\frac{1}{3}(x+1,9)x(x-1,9)$
$f'''\left(x\right)=-10x^{2}+12$
$F(x)=\int(-\frac{1}{6}x^{5}+2x^{3})dx=-\frac{1}{36}x^{6}+\frac{1}{2}x^{4}+c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$ $\mathbb{W}=\mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x)=x^{5}(-\frac{1}{6}+\dfrac{2}{x^{2}})$
$\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=[-\frac{1}{6}\cdot\infty^{5}]=-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=[-\frac{1}{6}\cdot(-\infty)^{5}]=\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f\left(-x\right)=-\frac{1}{6}\cdot(-x)^{5}+2\cdot(-x)^{3}$
$f\left(-x\right)=-\left(-\frac{1}{6}\cdot x^{5}+2\cdot x^{3}\right)$
$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)\rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x)=-\frac{1}{6}x^{5}+2x^{3}=0$
$x^{3}(-\frac{1}{6}x^{2}+2)=0\Rightarrow x=0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{6}x^{2}+2=0$
$-\frac{1}{6}x^{2}+2=0 \qquad /-2$
$-\frac{1}{6}x^{2}=-2 \qquad /:\left(-\frac{1}{6}\right)$
$x^{2}=\dfrac{-2}{-\frac{1}{6}}$
$x=\pm\sqrt{12}$
$x_{1}=3,46 \qquad x_{2}=-3,46$
$\underline{x_{1}=-3,46;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_{2}=0;\quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_{3}=3,46;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x<$	$-3,46$	$<x<$	0	$<x<$	$3,46$	$<x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x\in]-\infty;-3,46[\quad\cup\quad]0;3,46[\quad f(x)>0\quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x\in]-3,46;0[\quad\cup\quad]3,46;\infty[\quad f(x)<0\quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x)=-\dfrac{5}{6}x^{4}+6x^{2}=0$
$x^{2}(-\dfrac{5}{6}x^{2}+6)=0\Rightarrow x=0 \quad \wedge \quad -\dfrac{5}{6}x^{2}+6=0$
$-\dfrac{5}{6}x^{2}+6=0 \qquad /-6$
$-\dfrac{5}{6}x^{2}=-6 \qquad /:\left(-\dfrac{5}{6}\right)$
$x^{2}=\dfrac{-6}{-\frac{5}{6}}$
$x=\pm\sqrt{7\dfrac{1}{5}}$
$x_{1}=2,68 \qquad x_{2}=-2,68$
$\underline{x_{4}=-2,68;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 2,68; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2,68) = 32,2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2,68/-15,5)}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/0)}$
$f''(2,68) = -32,2$
$f''(2,68) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2,68/15,5)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-2,68$	$< x <$	0	$< x <$	$2,68$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-2,68;0[\quad \cup \quad]0;2,68[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty;-2,68[\quad \cup \quad]2,68;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -3\frac{1}{3}x^3 + 12x = 0$
$x(-3\frac{1}{3}x^2 + 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3\frac{1}{3}x^2 + 12 = 0$
$-3\frac{1}{3}x^2 + 12 = 0 \qquad / -12$
$-3\frac{1}{3}x^2 = -12 \qquad /:\left(-3\frac{1}{3}\right)$
$x^2 = \frac{-12}{-3\frac{1}{3}}$
$x = \pm\sqrt{3\frac{3}{5}}$
$x_1 = 1,9 \qquad x_2 = -1,9$
$\underline{x_7 = -1,9; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_9 = 1,9; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1,9) = -9,56$
$f'''(-1,9) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1,9/-9,56)}$
$f'''(0) = 0$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/0)}$
$f'''(1,9) = 9,56$
$f'''(1,9) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1,9/9,56)}$
• Kruemmung

	$x <$	$-1,9$	$< x <$	0	$< x <$	$1,9$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

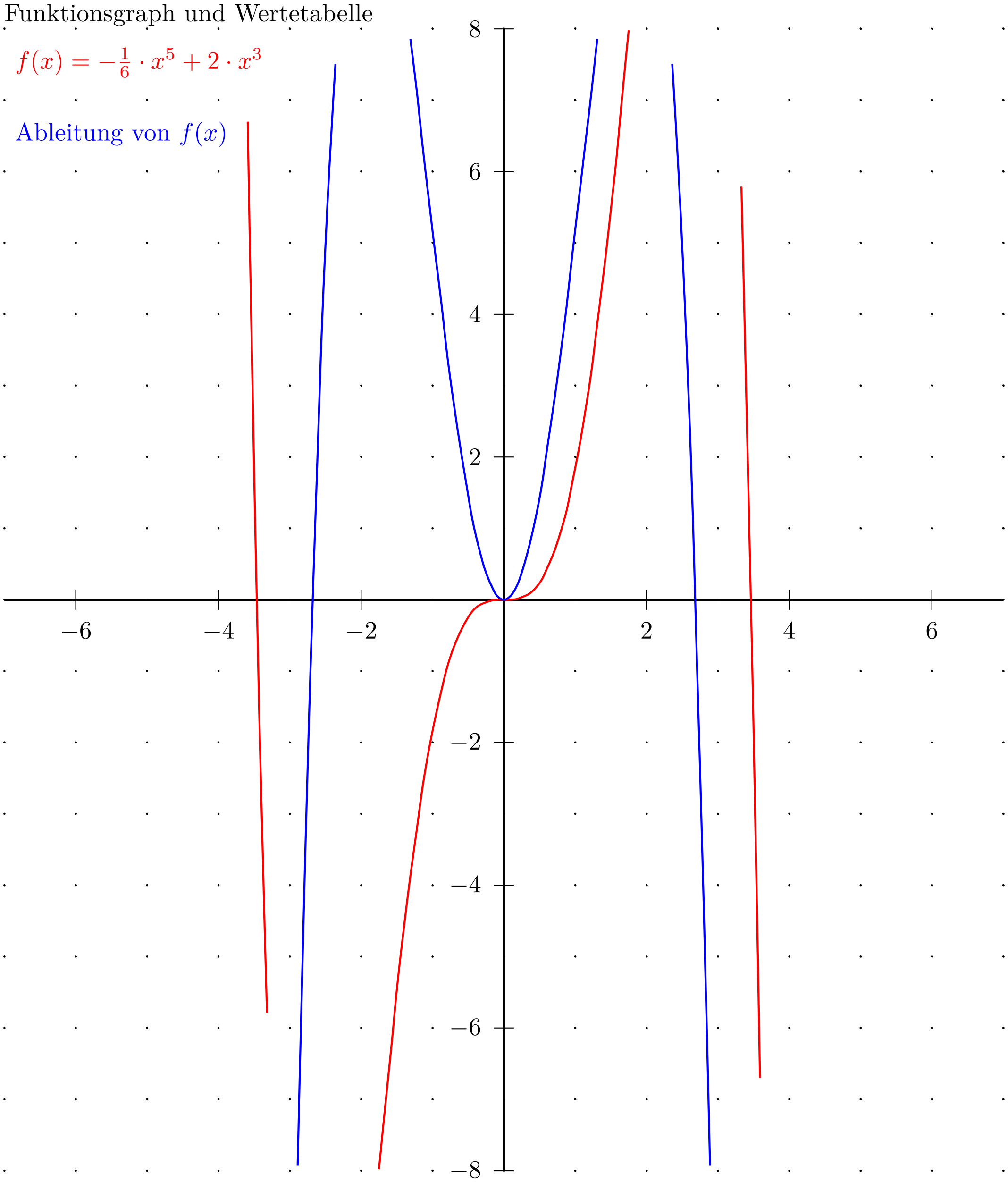
$\underline{x \in]-\infty;-1,9[\quad \cup \quad]0;1,9[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-1,9;0[\quad \cup \quad]1,9;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-3,46}^{0} \left(-\frac{1}{6}x^5 + 2x^3\right) dx = \left[-\frac{1}{36}x^6 + \frac{1}{2}x^4\right]_{-3,46}^{0}$
$= \left(-\frac{1}{36} \cdot 0^6 + \frac{1}{2} \cdot 0^4\right) - \left(-\frac{1}{36} \cdot (-3,46)^6 + \frac{1}{2} \cdot (-3,46)^4\right)$
$= (0) - (24) = -24$

$$A = \int_0^{3,46} \left(-\frac{1}{6}x^5 + 2x^3\right) dx = \left[-\frac{1}{36}x^6 + \frac{1}{2}x^4\right]_0^{3,46}$$
$$= \left(-\frac{1}{36} \cdot 3,46^6 + \frac{1}{2} \cdot 3,46^4\right) - \left(-\frac{1}{36} \cdot 0^6 + \frac{1}{2} \cdot 0^4\right)$$
$$= (24) - (0) = 24$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2115\frac{1}{6}$	$-1,71\cdot10^3$	$1,06\cdot10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$1,38\cdot10^3$	$-1,23\cdot10^3$	837
-6	864	-864	648
$-5\frac{1}{2}$	506	-581	489
-5	$270\frac{5}{6}$	-371	357
$-4\frac{1}{2}$	$125\frac{19}{64}$	-220	250
-4	$42\frac{2}{3}$	-117	165
$-3\frac{1}{2}$	$1,79$	$-51,6$	101
-3	$-13\frac{1}{2}$	$-13,5$	54
$-2\frac{1}{2}$	-15	$4,95$	$22,1$
-2	$-10\frac{2}{3}$	$10,7$	$2,67$
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{31}{64}$	$9,28$	$-6,75$
-1	$-1\frac{5}{6}$	$5,17$	$-8,67$
$-\frac{1}{2}$	$-0,245$	$1,45$	$-5,58$
0	0	$0,000612$	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,000612$	0
$\frac{1}{2}$	$0,245$	$1,45$	$5,58$
1	$1\frac{5}{6}$	$5,17$	$8,67$
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{31}{64}$	$9,28$	$6,75$
2	$10\frac{2}{3}$	$10,7$	$-2,67$
$2\frac{1}{2}$	15	$4,95$	$-22,1$
3	$13\frac{1}{2}$	$-13,5$	-54
$3\frac{1}{2}$	$-1,79$	$-51,6$	-101
4	$-42\frac{2}{3}$	-117	-165
$4\frac{1}{2}$	$-125\frac{19}{64}$	-220	-250
5	$-270\frac{5}{6}$	-371	-357
$5\frac{1}{2}$	-506	-581	-489
6	-864	-864	-648
$6\frac{1}{2}$	$-1,38\cdot10^3$	$-1,23\cdot10^3$	-837
7	$-2115\frac{1}{6}$	$-1,71\cdot10^3$	$-1,06\cdot10^3$

Aufgabe (8)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + 5x^3 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 10)x^3$
$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 12x^3 + 15x^2 = 2\frac{1}{2}(x^2 - 4\frac{4}{5}x + 6)x^2$
$f''(x) = 10x^3 - 36x^2 + 30x = 10x(x - 1,31)(x - 2,29)$
$f'''(x) = 30x^2 - 72x + 30$
$F(x) = \int(\frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + 5x^3)dx = \frac{1}{12}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + 1\frac{1}{4}x^4 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(\frac{1}{2} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot \infty^5] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{2} \cdot (-\infty)^5] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^5 - 3 \cdot (-x)^4 + 5 \cdot (-x)^3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + 5x^3 = 0$
$x^3(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$
$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-1}}{1}$$
Diskriminante negativ keine Lösung
$x_1 = 0$; 3-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 12x^3 + 15x^2 = 0$
$x^2(2\frac{1}{2}x^2 - 12x + 15) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2\frac{1}{2}x^2 - 12x + 15 = 0$
$2\frac{1}{2}x^2 - 12x + 15 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 15}}{2 \cdot 2\frac{1}{2}}$$
$$x_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{-6}}{5}$$
Diskriminante negativ keine Lösung
$x_2 = 0$; 2-fache Nullstelle
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
Terrassenpukt:(0/0)

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 10x^3 - 36x^2 + 30x = 0$
$x(10x^2 - 36x + 30) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 10x^2 - 36x + 30 = 0$

$10x^2 - 36x + 30 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{+36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 30}}{2 \cdot 10}$$
$$x_{1/2} = \frac{+36 \pm \sqrt{96}}{20}$$
$$x_{1/2} = \frac{36 \pm 9,8}{20}$$
$$x_1 = \frac{36 + 9,8}{20} \qquad x_2 = \frac{36 - 9,8}{20}$$
$x_1 = 2,29 \qquad x_2 = 1,31$
$x_3 = 0;$ 1-fache Nullstelle
$x_4 = 1,31;$ 1-fache Nullstelle
$x_5 = 2,29;$ 1-fache Nullstelle
$f'''(0) = 0$
$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(0/0)$
$f'''(1,31) = 4,34$
$f'''(1,31) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(1,31/4,34)$
$f'''(2,29) = 9,03$
$f'''(2,29) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(2,29/9,03)$
• Kruemmung

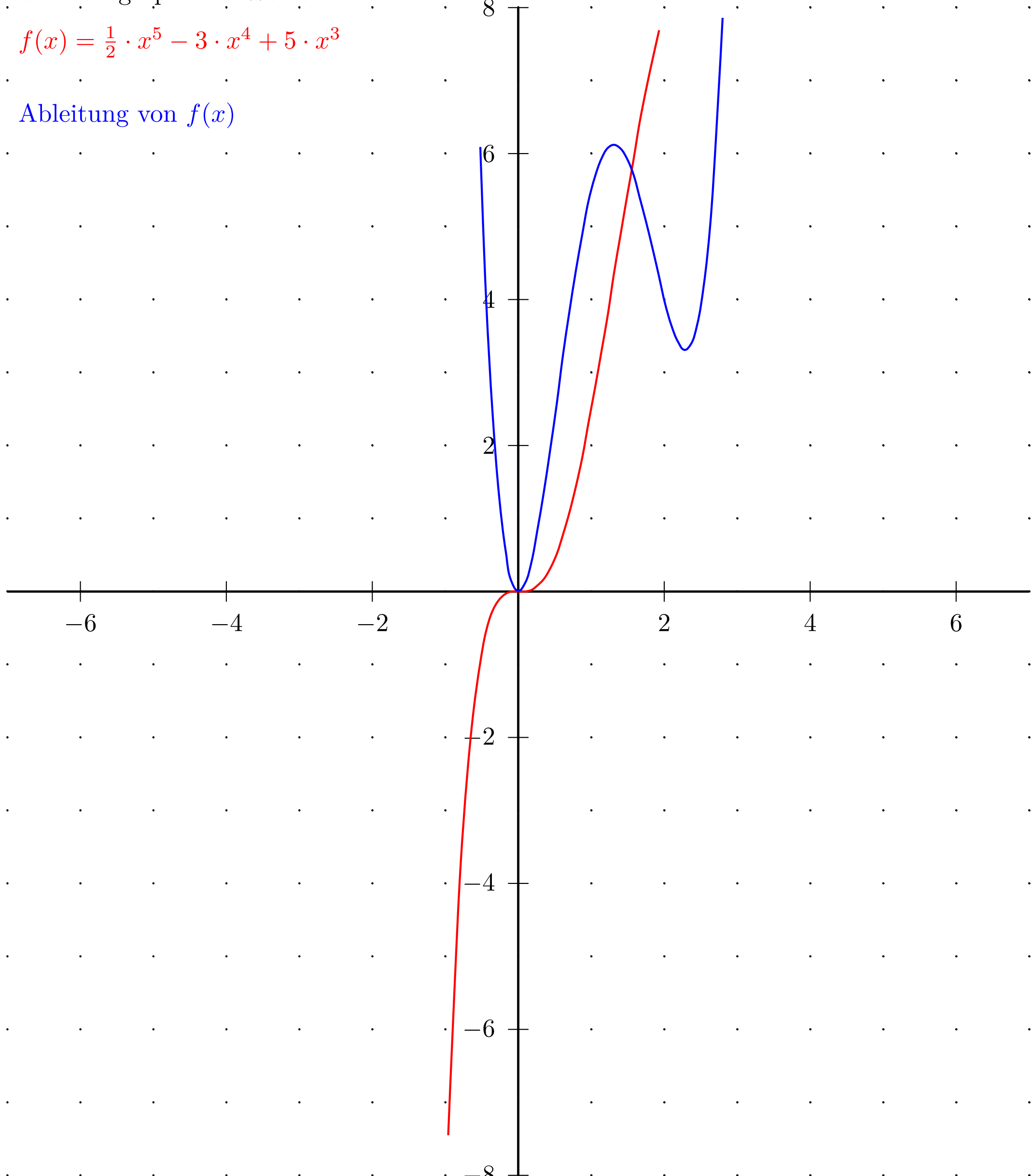
	$x <$	0	$< x <$	$1,31$	$< x <$	$2,29$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]0;1,31[\quad \cup \quad]2,29;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]1,31;2,29[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-17321\frac{1}{2}$	$1,09 \cdot 10^4$	$-5,4 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$-12529\frac{49}{64}$	$8,39 \cdot 10^3$	$-4,46 \cdot 10^3$
-6	$-8,86 \cdot 10^3$	$6,37 \cdot 10^3$	$-3,64 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$-6093\frac{31}{64}$	$4,74 \cdot 10^3$	$-2,92 \cdot 10^3$
-5	$-4062\frac{1}{2}$	$3,44 \cdot 10^3$	$-2,3 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-2608\frac{29}{64}$	$2,42 \cdot 10^3$	$-1,78 \cdot 10^3$
-4	$-1,6 \cdot 10^3$	$1,65 \cdot 10^3$	$-1,34 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-927\frac{11}{64}$	$1,07 \cdot 10^3$	-975
-3	$-499\frac{1}{2}$	662	-684
$-2\frac{1}{2}$	$-244\frac{9}{64}$	379	-456
-2	-104	196	-284
$-1\frac{1}{2}$	$-35\frac{55}{64}$	$86,9$	-160
-1	$-8\frac{1}{2}$	$29,5$	-76
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{53}{64}$	$5,41$	$-25,3$
0	0	$0,00153$	$-0,00184$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,00153$	$-0,00184$
$\frac{1}{2}$	$\frac{29}{64}$	$2,41$	$7,25$
1	$2\frac{1}{2}$	$5,5$	4
$1\frac{1}{2}$	$5\frac{31}{64}$	$5,91$	$-2,25$
2	8	4	-4
$2\frac{1}{2}$	$9\frac{49}{64}$	$3\frac{89}{98}$	$6,25$
3	$13\frac{1}{2}$	$13,5$	36
$3\frac{1}{2}$	$26\frac{51}{64}$	$44,4$	$92,8$
4	64	112	184
$4\frac{1}{2}$	$148\frac{5}{64}$	235	317
5	$312\frac{1}{2}$	438	500
$5\frac{1}{2}$	$603\frac{7}{64}$	745	740
6	$1,08 \cdot 10^3$	$1,19 \cdot 10^3$	$1,04 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$1819\frac{25}{64}$	$1,8 \cdot 10^3$	$1,42 \cdot 10^3$
7	$2915\frac{1}{2}$	$2,62 \cdot 10^3$	$1,88 \cdot 10^3$

Aufgabe (9)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -x^5 + 3x^3 + 2x^2 = -(x+1)^2 x^2 (x-2)$
$f'(x) = -5x^4 + 9x^2 + 4x = -5(x+1)(x+0,525)x(x-1,52)$
$f''(x) = -20x^3 + 18x + 4 = -20(x+0,808)(x+0,237)(x-1,04)$
$f'''(x) = -60x^2 + 18$
$F(x) = \int(-x^5 + 3x^3 + 2x^2)dx = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(-1 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^5] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^5] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 0$
$x^2(-x^3 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^3 + 3x + 2 = 0$
$-x^3 + 3x + 2 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{llll}
(-x^3 & & +3x & +2 \quad) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & x^2 & +3x & +2 \\
 & -(x^2 & +x) & \\
\hline
 & & 2x & +2 \\
 & & -(2x & +2) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$-x^2 + x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm 3}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-1-3}{-2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 0[\quad \cup \quad]0; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -5x^4 + 9x^2 + 4x = 0$

$x(-5x^3+9x+4)=0 \Rightarrow x=0 \quad \wedge \quad -5x^3+9x+4=0$
$-5x^3+9x+4=0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(-5x^3 & & +9x & +4 &):(x+1)=-5x^2+5x+4 \\
-(-5x^3 & -5x^2) & & & \\
\hline
 & 5x^2 & +9x & +4 & \\
 & -(5x^2 & +5x) & & \\
\hline
 & & 4x & +4 & \\
 & & -(4x & +4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$-5x^2+5x+4=0$
$x_{1/2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-5)\cdot 4}}{2\cdot(-5)}$
$x_{1/2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{105}}{-10}$
$x_{1/2}=\dfrac{-5\pm 10,2}{-10}$
$x_1=\dfrac{-5+10,2}{-10} \qquad x_2=\dfrac{-5-10,2}{-10}$
$x_1=-0,525 \qquad x_2=1,52$
$\underline{x_4=-1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5=-0,525;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6=0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7=1,52;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1)=6>0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1/0)}$
$f''(-0,525)=-2,56$
$f''(-0,525)<0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,525/0,157)}$
$f''(0)=4>0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/0)}$
$f''(1,52)=-39,4$
$f''(1,52)<0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,52/7,04)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x<$	-1	$<x<$	$-0,525$	$<x<$	0	$<x<$	$1,52$	$<x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x\in]-1;-0,525[\quad\cup\quad]0;1,52[\quad f'(x)>0\quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x\in]-\infty;-1[\quad\cup\quad]-0,525;0[\quad\cup\quad]1,52;\infty[\quad f'(x)<0\quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x)=-20x^3+18x+4=0$

$-20x^3+18x+4=0$
$NumerischeSuche:$
$\underline{x_8=-0,808;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_9=-0,237;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10=1,04;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-0,808)=0,0677$
$f'''(-0,808)\neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,808/0,0677)}$
$f'''(-0,237)=0,0732$
$f'''(-0,237)\neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,237/0,0732)}$
$f'''(1,04)=4,36$
$f'''(1,04)\neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1,04/4,36)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-0,808$	$< x <$	$-0,237$	$< x <$	$1,04$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -0,808[\quad \cup \quad]-0,237; 1,04[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-0,808; -0,237[\quad \cup \quad]1,04; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{0} \left(-x^5 + 3x^3 + 2x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left(-\frac{1}{6} \cdot 0^6 + \frac{3}{4} \cdot 0^4 + \frac{2}{3} \cdot 0^3\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-1)^6 + \frac{3}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-1)^3\right)$$

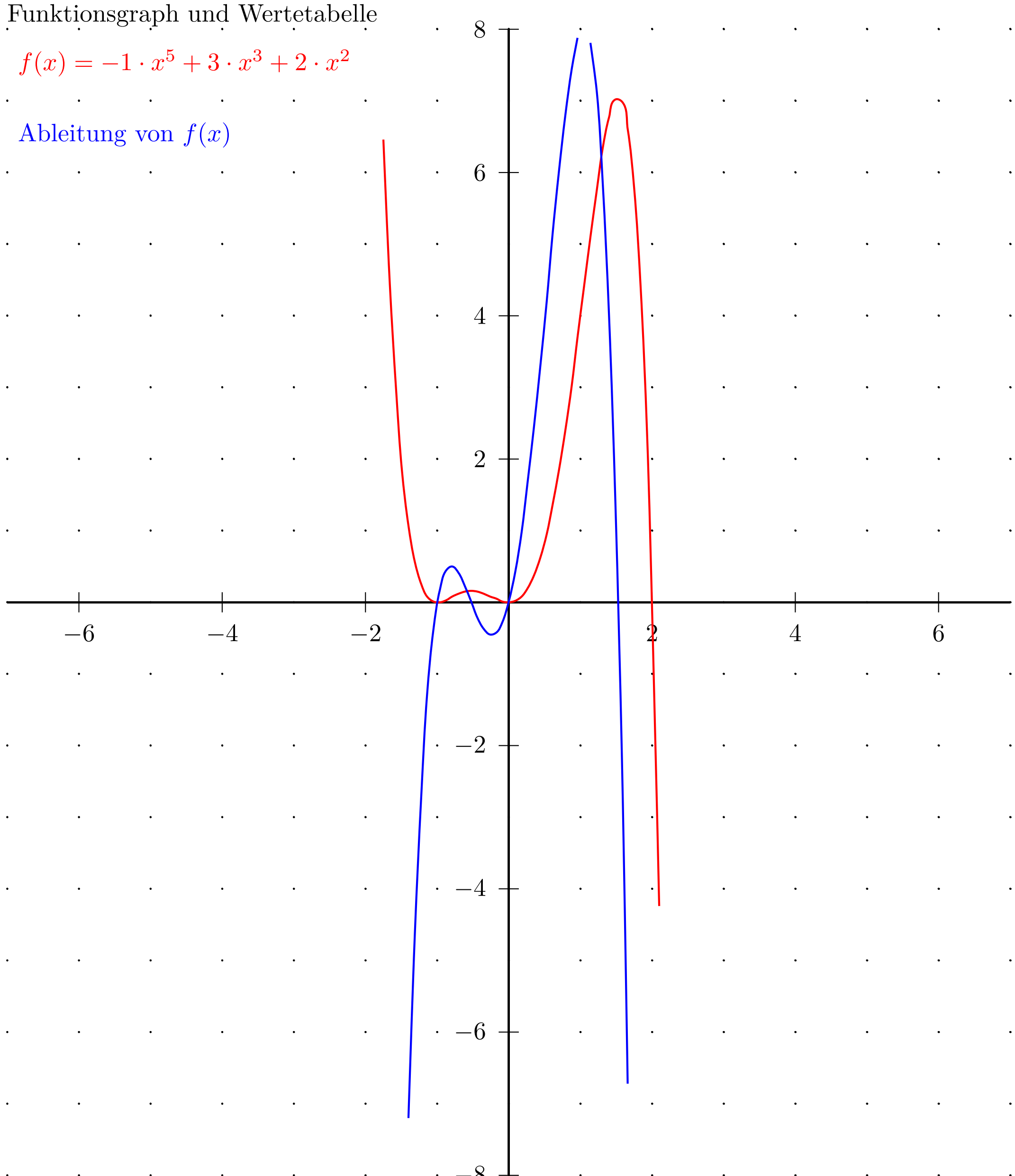
$$= (0) - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}$$

$$A = \int_{0}^{2} \left(-x^5 + 3x^3 + 2x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{6} \cdot 2^6 + \frac{3}{4} \cdot 2^4 + \frac{2}{3} \cdot 2^3\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot 0^6 + \frac{3}{4} \cdot 0^4 + \frac{2}{3} \cdot 0^3\right)$$

$$= \left(6\frac{2}{3}\right) - (0) = 6\frac{2}{3}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1,59 \cdot 10^4$	$-1,16 \cdot 10^4$	$6,74 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$10863\frac{17}{32}$	$-8,57 \cdot 10^3$	$5,38 \cdot 10^3$
-6	$7,2 \cdot 10^3$	$-6,18 \cdot 10^3$	$4,22 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$4594\frac{7}{32}$	$-4,33 \cdot 10^3$	$3,23 \cdot 10^3$
-5	$2,8 \cdot 10^3$	$-2,92 \cdot 10^3$	$2,41 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$1612\frac{13}{32}$	$-1,89 \cdot 10^3$	$1,75 \cdot 10^3$
-4	864	$-1,15 \cdot 10^3$	$1,21 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$421\frac{3}{32}$	-654	799
-3	180	-336	490
$-2\frac{1}{2}$	$63\frac{9}{32}$	-149	272
-2	16	-52	128
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{31}{32}$	$-11,1$	$44,5$
-1	0	$-0,00214$	6
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{32}$	$-0,0623$	$-2,5$
0	0	$0,000919$	4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,000919$	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{32}$	$3,94$	$10,5$
1	4	8	2
$1\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{32}$	$0,932$	$-36,5$
2	0	-36	-120
$2\frac{1}{2}$	$-38\frac{9}{32}$	-129	-264
3	-144	-312	-482
$3\frac{1}{2}$	$-372\frac{3}{32}$	-626	-791
4	-800	$-1,12 \cdot 10^3$	$-1,2 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$-1531\frac{13}{32}$	$-1,85 \cdot 10^3$	$-1,74 \cdot 10^3$
5	$-2,7 \cdot 10^3$	$-2,88 \cdot 10^3$	$-2,41 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$-4473\frac{7}{32}$	$-4,28 \cdot 10^3$	$-3,22 \cdot 10^3$
6	$-7,06 \cdot 10^3$	$-6,13 \cdot 10^3$	$-4,21 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$-10694\frac{17}{32}$	$-8,52 \cdot 10^3$	$-5,37 \cdot 10^3$
7	$-1,57 \cdot 10^4$	$-1,15 \cdot 10^4$	$-6,73 \cdot 10^3$

Aufgabe (10)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -x^5 + 3x^4 - 4x^2 = -(x+1)x^2(x-2)^2$
$f'(x) = -5x^4 + 12x^3 - 8x = -5(x+0,717)x(x-1,12)(x-2)$
$f''(x) = -20x^3 + 36x^2 - 8 = -20(x+0,424)(x-0,57)(x-1,65)$
$f'''(x) = -60x^2 + 72x$
$F(x) = \int(-x^5 + 3x^4 - 4x^2)dx = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^5] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^5] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -x^5 + 3x^4 - 4x^2 = 0$
$x^2(-x^3 + 3x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llll}
(-x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x+1) = -x^2 + 4x - 4 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & +4x) & \\
\hline
 & & -4x & -4 \\
 & & -(-4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-x^2 + 4x - 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-4 + 0}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 0}{-2}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1; 0[\quad \cup \quad]0; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -5x^4 + 12x^3 - 8x = 0$

$x(-5x^3+12x^2-8)=0 \Rightarrow x=0 \quad \wedge \quad -5x^3+12x^2-8=0$
$-5x^3+12x^2-8=0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:2

$$\begin{array}{llll}
(-5x^3 & +12x^2 & & -8 \quad) : (x-2) = -5x^2+2x+4 \\
-(-5x^3 & +10x^2) & & \\
\hline
 & 2x^2 & & -8 \\
 & -(2x^2 & -4x) & \\
\hline
 & & 4x & -8 \\
 & & -(4x & -8) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-5x^2+2x+4=0$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-5)\cdot 4}}{2\cdot(-5)}$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{84}}{-10}$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm 9,17}{-10}$
$x_1=\dfrac{-2+9,17}{-10} \qquad x_2=\dfrac{-2-9,17}{-10}$
$x_1=-0,717 \qquad x_2=1,12$
$\underline{x_4=-0,717; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5=0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6=1,12; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7=2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-0,717)=17,8>0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-0,717/-1,07)}$
$f''(0)=-8$
$f''(0)<0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/0)}$
$f''(1,12)=9,04>0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1,12/-2,06)}$
$f''(2)=-24$
$f''(2)<0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x<$	$-0,717$	$<x<$	0	$<x<$	$1,12$	$<x<$	2	$<x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-0,717;0[\quad \cup \quad]1,12;2[\quad f'(x)>0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-0,717[\quad \cup \quad]0;1,12[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x)<0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x)=-20x^3+36x^2-8=0$

$-20x^3+36x^2-8=0$
$NumerischeSuche:$
$\underline{x_8=-0,424; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_9=0,57; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10=1,65; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-0,424)=-0,609$
$f'''(-0,424)\neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,424/-0,609)}$
$f'''(0,57)=-1,04$
$f'''(0,57)\neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,57/-1,04)}$
$f'''(1,65)=-0,87$
$f'''(1,65)\neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1,65/-0,87)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-0,424$	$< x <$	$0,57$	$< x <$	$1,65$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -0,424[\quad \cup \quad]0,57; 1,65[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-0,424; 0,57[\quad \cup \quad]1,65; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{0} \left(-x^5 + 3x^4 - 4x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left(-\frac{1}{6} \cdot 0^6 + \frac{3}{5} \cdot 0^5 - 1\frac{1}{3} \cdot 0^3\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-1)^6 + \frac{3}{5} \cdot (-1)^5 - 1\frac{1}{3} \cdot (-1)^3\right)$$

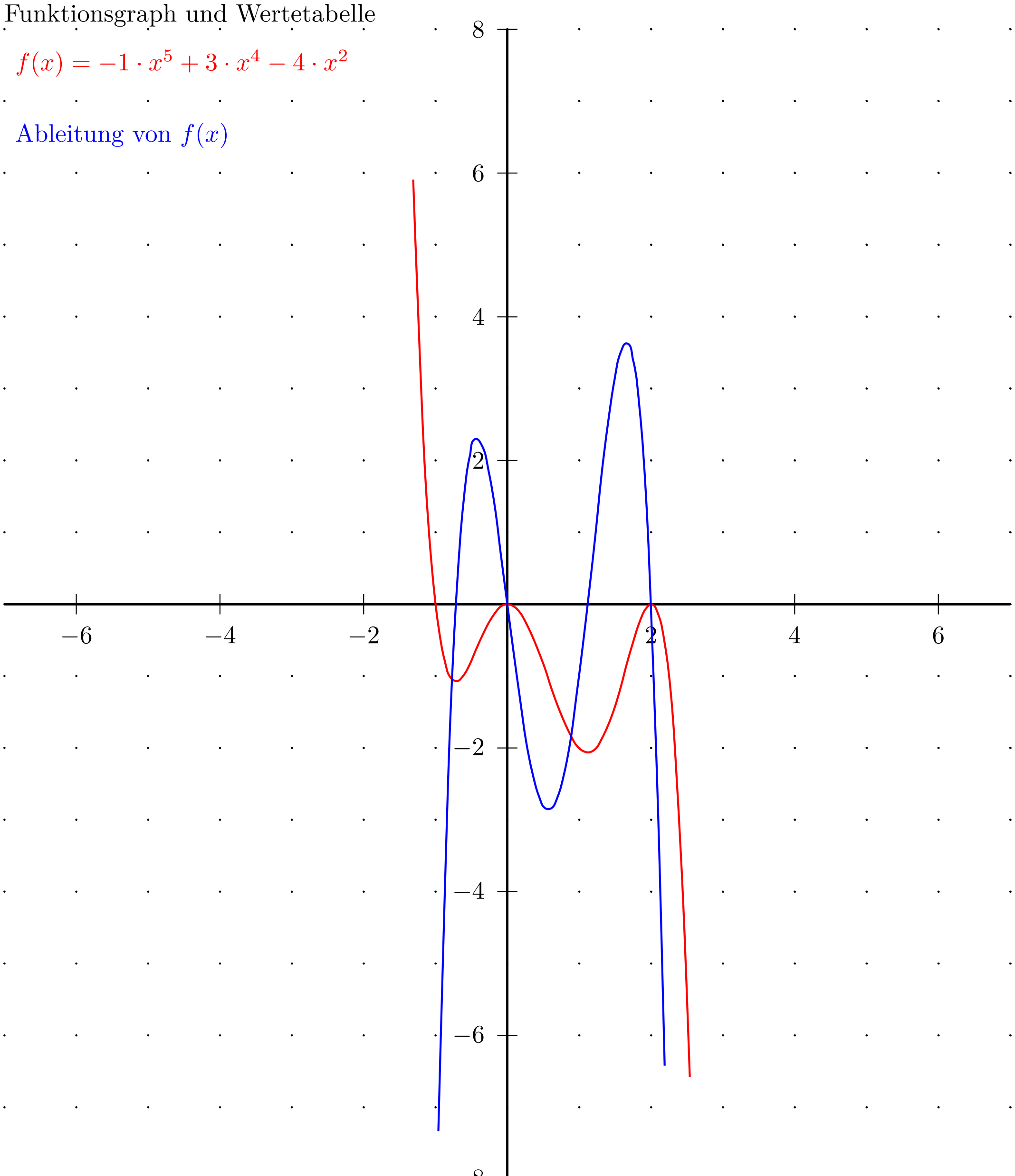
$$= (0) - \left(\frac{17}{30}\right) = -\frac{17}{30}$$

$$A = \int_{0}^{2} \left(-x^5 + 3x^4 - 4x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{6} \cdot 2^6 + \frac{3}{5} \cdot 2^5 - 1\frac{1}{3} \cdot 2^3\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot 0^6 + \frac{3}{5} \cdot 0^5 - 1\frac{1}{3} \cdot 0^3\right)$$

$$= \left(-2\frac{2}{15}\right) - (0) = -2\frac{2}{15}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2,38 \cdot 10^4$	$-1,61 \cdot 10^4$	$8,62 \cdot 10^3$
$-6\frac{1}{2}$	$16789\frac{3}{32}$	$-1,22 \cdot 10^4$	$7,01 \cdot 10^3$
-6	$1,15 \cdot 10^4$	$-9,02 \cdot 10^3$	$5,61 \cdot 10^3$
$-5\frac{1}{2}$	$7657\frac{1}{32}$	$-6,53 \cdot 10^3$	$4,41 \cdot 10^3$
-5	$4,9 \cdot 10^3$	$-4,59 \cdot 10^3$	$3,39 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$2994\frac{15}{32}$	$-3,11 \cdot 10^3$	$2,54 \cdot 10^3$
-4	$1,73 \cdot 10^3$	$-2,02 \cdot 10^3$	$1,85 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$926\frac{13}{32}$	$-1,24 \cdot 10^3$	$1,29 \cdot 10^3$
-3	450	-705	856
$-2\frac{1}{2}$	$189\frac{27}{32}$	-363	530
-2	64	-160	296
$-1\frac{1}{2}$	$13\frac{25}{32}$	$-53,8$	141
-1	0	$-9,01$	48
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{25}{32}$	$2,18$	$3,5$
0	0	0	-8

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	0	-8
$\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{32}$	$-2,81$	$-1,5$
1	-2	$-0,999$	8
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{32}$	$3,19$	$5,5$
2	0	$-0,0049$	-24
$2\frac{1}{2}$	$-5\frac{15}{32}$	$-27,8$	$-95,5$
3	-36	-105	-224
$3\frac{1}{2}$	$-124\frac{1}{32}$	-264	-425
4	-320	-544	-712
$4\frac{1}{2}$	$-696\frac{3}{32}$	-993	$-1,1 \cdot 10^3$
5	$-1,35 \cdot 10^3$	$-1,67 \cdot 10^3$	$-1,61 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$-2408\frac{21}{32}$	$-2,62 \cdot 10^3$	$-2,25 \cdot 10^3$
6	$-4,03 \cdot 10^3$	$-3,94 \cdot 10^3$	$-3,03 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$-6416\frac{23}{32}$	$-5,68 \cdot 10^3$	$-3,98 \cdot 10^3$
7	$-9,8 \cdot 10^3$	$-7,95 \cdot 10^3$	$-5,1 \cdot 10^3$

Aufgabe (11)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 = 4(x+2)x^3(x-\frac{3}{4})$
$f'(x) = 20x^4 + 20x^3 - 18x^2 = 20(x+1,57)x^2(x-0,572)$
$f''(x) = 80x^3 + 60x^2 - 36x = 80(x+1,14)x(x-0,394)$
$f'''(x) = 240x^2 + 120x - 36$
$F(x) = \int(4x^5 + 5x^4 - 6x^3)dx = \frac{2}{3}x^6 + x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(4 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [4 \cdot \infty^5] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [4 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 4 \cdot (-x)^5 + 5 \cdot (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 = 0$
$x^3(4x^2 + 5x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 5x - 6 = 0$

$4x^2 + 5x - 6 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4}$
$x_{1/2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{121}}{8}$
$x_{1/2} = \dfrac{-5 \pm 11}{8}$
$x_1 = \dfrac{-5 + 11}{8} \qquad x_2 = \dfrac{-5 - 11}{8}$
$x_1 = \dfrac{3}{4} \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = \frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{3}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2;0[\quad \cup \quad]\frac{3}{4};\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]0;\frac{3}{4}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 20x^4 + 20x^3 - 18x^2 = 0$
$x^2(20x^2 + 20x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 20x^2 + 20x - 18 = 0$

$20x^2 + 20x - 18 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-18)}}{2 \cdot 20}$
$x_{1/2} = \dfrac{-20 \pm \sqrt{1,84 \cdot 10^3}}{40}$

$x_{1/2} = \frac{-20 \pm 42,9}{40}$

$x_1 = \frac{-20 + 42,9}{40} \qquad x_2 = \frac{-20 - 42,9}{40}$

$x_1 = 0,572 \qquad x_2 = -1,57$

$\underline{x_4 = -1,57; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = 0,572; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-1,57) = -106$

$f''(-1,57) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1,57/15,4)}$

$f''(0) = 0$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/0)}$

$f''(0,572) = 14,1 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,572/-0,343)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,57$	$< x <$	0	$< x <$	$0,572$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1,57[\quad \cup \quad]0,572; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1,57; 0[\quad \cup \quad]0; 0,572[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:

$f''(x) = 80x^3 + 60x^2 - 36x = 0$

$x(80x^2 + 60x - 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 80x^2 + 60x - 36 = 0$

$80x^2 + 60x - 36 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 80 \cdot (-36)}}{2 \cdot 80}$

$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{1,51 \cdot 10^4}}{160}$

$x_{1/2} = \frac{-60 \pm 123}{160}$

$x_1 = \frac{-60 + 123}{160} \qquad x_2 = \frac{-60 - 123}{160}$

$x_1 = 0,394 \qquad x_2 = -1,14$

$\underline{x_7 = -1,14; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_9 = 0,394; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f'''(-1,14) = 9,7$

$f'''(-1,14) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1,14/9,7)}$

$f'''(0) = 0$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(0/0)}$

$f'''(0,394) = -0,208$

$f'''(0,394) \neq 0 \Rightarrow$

$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,394/-0,208)}$

• Kruemmung

	$x <$	$-1,14$	$< x <$	0	$< x <$	$0,394$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

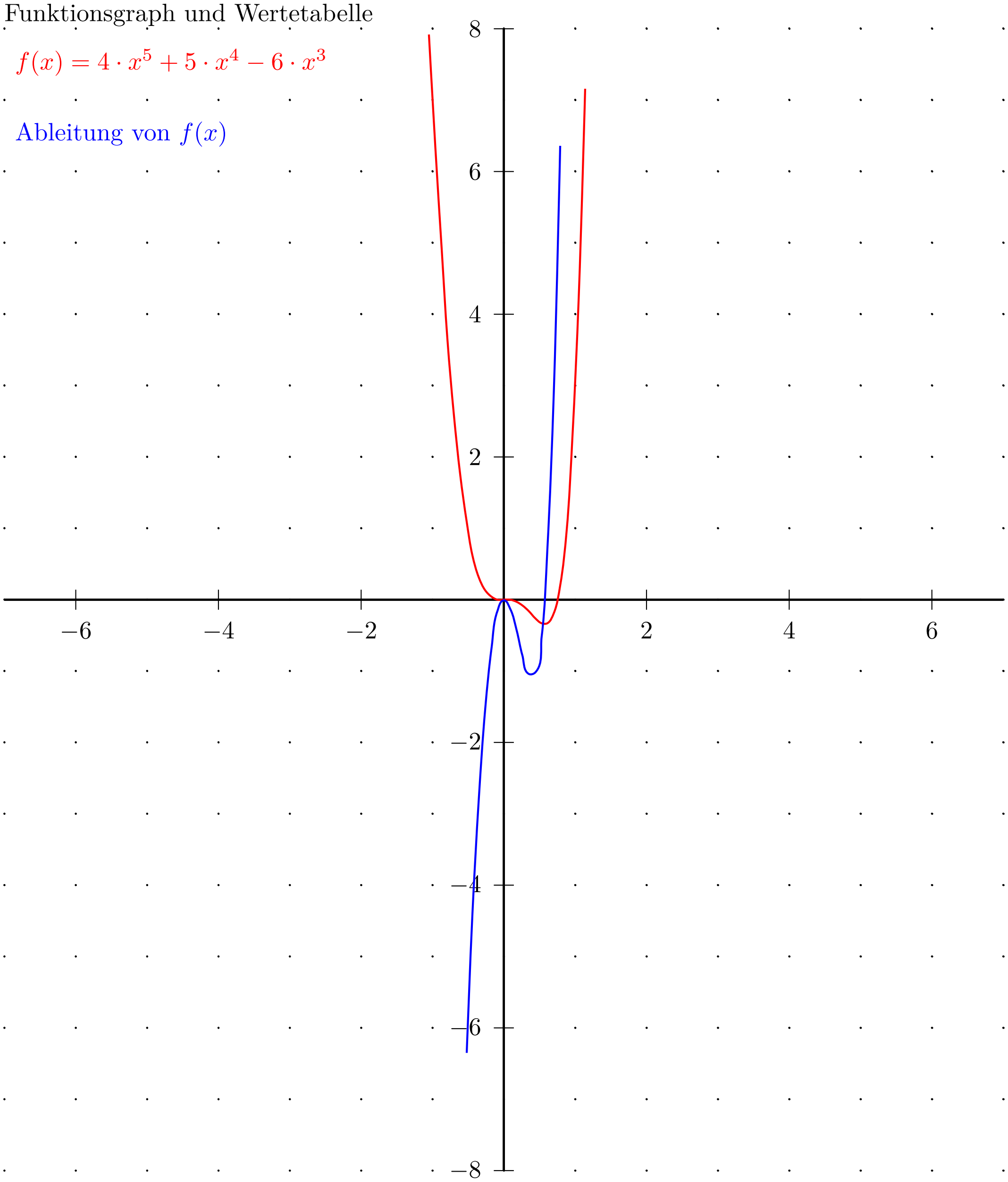
$\underline{x \in]-1,14; 0[\quad \cup \quad]0,394; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1,14[\quad \cup \quad]0; 0,394[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{0} \left(4x^5 + 5x^4 - 6x^3\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^6 + x^5 - 1\frac{1}{2}x^4\right]_{-2}^{0}$$
$$= \left(\frac{2}{3} \cdot 0^6 + 1 \cdot 0^5 - 1\frac{1}{2} \cdot 0^4\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (-2)^6 + 1 \cdot (-2)^5 - 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^4\right)$$
$$= (0) - \left(-13\frac{1}{3}\right) = 13\frac{1}{3}$$
$$A = \int_{0}^{\frac{3}{4}} \left(4x^5 + 5x^4 - 6x^3\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^6 + x^5 - 1\frac{1}{2}x^4\right]_{0}^{\frac{3}{4}}$$
$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}^6 + 1 \cdot \frac{3}{4}^5 - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}^4\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 0^6 + 1 \cdot 0^5 - 1\frac{1}{2} \cdot 0^4\right)$$
$$= (-0,119) - (0) = -0,119$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-5,32\cdot10^4$	$4,03\cdot10^4$	$-2,42\cdot10^4$
$-6\frac{1}{2}$	$-35838\frac{9}{16}$	$2,94\cdot10^4$	$-1,92\cdot10^4$
-6	$-2,33\cdot10^4$	$2,1\cdot10^4$	$-1,49\cdot10^4$
$-5\frac{1}{2}$	$-14557\frac{13}{16}$	$1,44\cdot10^4$	$-1,13\cdot10^4$
-5	$-8,63\cdot10^3$	$9,55\cdot10^3$	$-8,32\cdot10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-4784\frac{1}{16}$	$6,01\cdot10^3$	$-5,91\cdot10^3$
-4	$-2,43\cdot10^3$	$3,55\cdot10^3$	$-4,02\cdot10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-1093\frac{5}{16}$	$1,92\cdot10^3$	$-2,57\cdot10^3$
-3	-405	918	$-1,51\cdot10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$-101\frac{9}{16}$	356	-785
-2	0	88	-328
$-1\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{16}$	$-6,73$	-81
-1	7	-18	16
$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	$-5,75$	23
0	0	$-0,00184$	$0,00306$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,00184$	$0,00306$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{16}$	$-0,746$	$7,01$
1	3	22	104
$1\frac{1}{2}$	$35\frac{7}{16}$	128	351
2	160	408	808
$2\frac{1}{2}$	$492\frac{3}{16}$	981	$1,54\cdot10^3$
3	$1,22\cdot10^3$	$2\cdot10^3$	$2,59\cdot10^3$
$3\frac{1}{2}$	$2593\frac{15}{16}$	$3,64\cdot10^3$	$4,04\cdot10^3$
4	$4,99\cdot10^3$	$6,11\cdot10^3$	$5,94\cdot10^3$
$4\frac{1}{2}$	$8884\frac{11}{16}$	$9,66\cdot10^3$	$8,34\cdot10^3$
5	$1,49\cdot10^4$	$1,46\cdot10^4$	$1,13\cdot10^4$
$5\frac{1}{2}$	$23708\frac{7}{16}$	$2,11\cdot10^4$	$1,49\cdot10^4$
6	$3,63\cdot10^4$	$2,96\cdot10^4$	$1,92\cdot10^4$
$6\frac{1}{2}$	$53689\frac{3}{16}$	$4,04\cdot10^4$	$2,43\cdot10^4$
7	$7,72\cdot10^4$	$5,4\cdot10^4$	$3,01\cdot10^4$

Aufgabe (12)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f\,(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 1 = 4(x^2 - 1,31x + 0,492)(x^2 + 0,546x + 0,253)(x + 2,01)$
$f'\,(x) = 20x^4 + 20x^3 - 18x^2 = 20(x + 1,57)x^2(x - 0,572)$
$f''\,(x) = 80x^3 + 60x^2 - 36x = 80(x + 1,14)x(x - 0,394)$
$f'''\,(x) = 240x^2 + 120x - 36$
$F(x) = \int(4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 1)dx = \frac{2}{3}x^6 + x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^5(4 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{1}{x^5})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f\,(x) = [4 \cdot \infty^5] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\,(x) = [4 \cdot (-\infty)^5] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f\,(-x) = 4 \cdot (-x)^5 + 5 \cdot (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^3 + 1$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 1 = 0$

$NumerischeSuche:$
$\underline{x_1 = -2,01;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,01$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2,01;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-2,01[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 20x^4 + 20x^3 - 18x^2 = 0$
$x^2(20x^2 + 20x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 20x^2 + 20x - 18 = 0$

$20x^2 + 20x - 18 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-18)}}{2 \cdot 20}$$
$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{1,84 \cdot 10^3}}{40}$$
$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm 42,9}{40}$$
$$x_1 = \frac{-20 + 42,9}{40} \qquad x_2 = \frac{-20 - 42,9}{40}$$
$x_1 = 0,572 \qquad x_2 = -1,57$
$\underline{x_2 = -1,57;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 0;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0,572;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1,57) = -106$
$f''(-1,57) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1,57/16,4)}$
$f''(0) = 1$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/1)}$

$f''(0,572) = 14,1 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(0,572/0,657)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1,57$	$< x <$	0	$< x <$	$0,572$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,57[\quad \cup \quad]0,572; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-1,57; 0[\quad \cup \quad]0; 0,572[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:

$f''(x) = 80x^3 + 60x^2 - 36x = 0$

$x(80x^2 + 60x - 36) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 80x^2 + 60x - 36 = 0$

$80x^2 + 60x - 36 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 80 \cdot (-36)}}{2 \cdot 80}$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{1,51 \cdot 10^4}}{160}$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm 123}{160}$$

$$x_1 = \frac{-60 + 123}{160} \qquad x_2 = \frac{-60 - 123}{160}$$

$x_1 = 0,394 \qquad x_2 = -1,14$

$x_5 = -1,14;$ 1-fache Nullstelle

$x_6 = 0;$ 1-fache Nullstelle

$x_7 = 0,394;$ 1-fache Nullstelle

$f'''(-1,14) = 10,7$

$f'''(-1,14) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(-1,14/10,7)$

$f'''(0) = 1$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(0/1)$

$f'''(0,394) = 0,792$

$f'''(0,394) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt:$(0,394/0,792)$

• Kruemmung

	$x <$	$-1,14$	$< x <$	0	$< x <$	$0,394$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

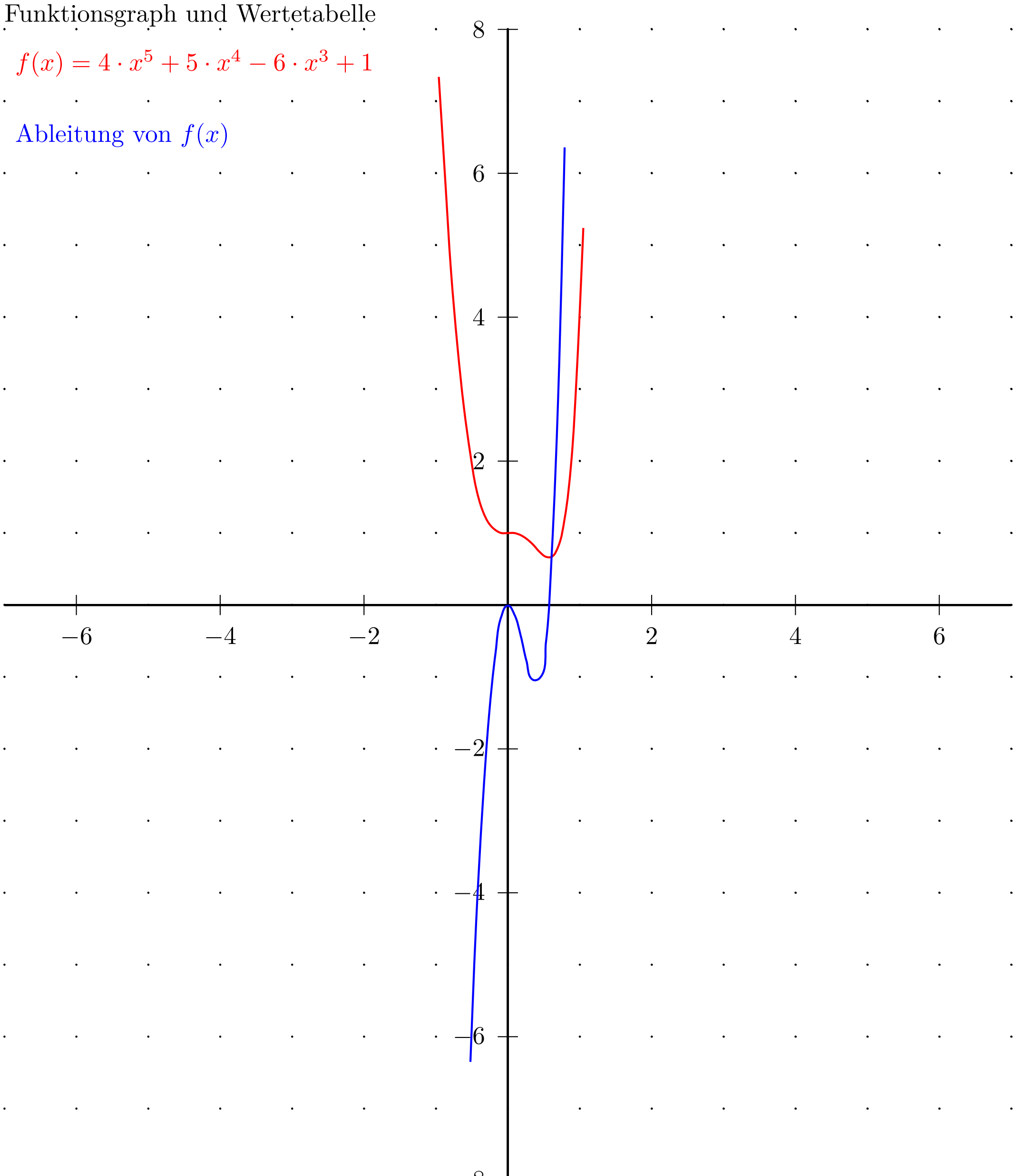
$x \in]-1,14; 0[\quad \cup \quad]0,394; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -1,14[\quad \cup \quad]0; 0,394[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-5,32 \cdot 10^4$	$4,03 \cdot 10^4$	$-2,42 \cdot 10^4$
$-6\frac{1}{2}$	$-35837\frac{9}{16}$	$2,94 \cdot 10^4$	$-1,92 \cdot 10^4$
-6	$-2,33 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^4$	$-1,49 \cdot 10^4$
$-5\frac{1}{2}$	$-14556\frac{13}{16}$	$1,44 \cdot 10^4$	$-1,13 \cdot 10^4$
-5	$-8,62 \cdot 10^3$	$9,55 \cdot 10^3$	$-8,32 \cdot 10^3$
$-4\frac{1}{2}$	$-4783\frac{1}{16}$	$6,01 \cdot 10^3$	$-5,91 \cdot 10^3$
-4	$-2,43 \cdot 10^3$	$3,55 \cdot 10^3$	$-4,02 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-1092\frac{5}{16}$	$1,92 \cdot 10^3$	$-2,57 \cdot 10^3$
-3	-404	918	$-1,51 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$-100\frac{9}{16}$	356	-785
-2	1	88	-328
$-1\frac{1}{2}$	$16\frac{3}{16}$	$-6,73$	-81
-1	8	-18	16
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{15}{16}$	$-5,75$	23
0	1	$-0,00184$	$0,00306$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-0,00184$	$0,00306$
$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	$-0,746$	$7,01$
1	4	22	104
$1\frac{1}{2}$	$36\frac{7}{16}$	128	351
2	161	408	808
$2\frac{1}{2}$	$493\frac{3}{16}$	981	$1,54 \cdot 10^3$
3	$1,22 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$2,59 \cdot 10^3$
$3\frac{1}{2}$	$2594\frac{15}{16}$	$3,64 \cdot 10^3$	$4,04 \cdot 10^3$
4	$4,99 \cdot 10^3$	$6,11 \cdot 10^3$	$5,94 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$8885\frac{11}{16}$	$9,66 \cdot 10^3$	$8,34 \cdot 10^3$
5	$1,49 \cdot 10^4$	$1,46 \cdot 10^4$	$1,13 \cdot 10^4$
$5\frac{1}{2}$	$23709\frac{7}{16}$	$2,11 \cdot 10^4$	$1,49 \cdot 10^4$
6	$3,63 \cdot 10^4$	$2,96 \cdot 10^4$	$1,92 \cdot 10^4$
$6\frac{1}{2}$	$53690\frac{3}{16}$	$4,04 \cdot 10^4$	$2,43 \cdot 10^4$
7	$7,72 \cdot 10^4$	$5,4 \cdot 10^4$	$3,01 \cdot 10^4$

Aufgabe (13)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f\,(x) = 2x^6 - 2x^5 = 2x^5(x-1)$
$f'\,(x) = 12x^5 - 10x^4 = 12x^4(x - \frac{5}{6})$
$f''\,(x) = 60x^4 - 40x^3 = 60x^3(x - \frac{2}{3})$
$f'''\,(x) = 240x^3 - 120x^2$
$F(x) = \int (2x^6 - 2x^5)dx = \frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^6 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-0,134), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^6(2 - \dfrac{2}{x})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f\,(x) = [2 \cdot \infty^6] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\,(x) = [2 \cdot (-\infty)^6] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f\,(-x) = 2 \cdot (-x)^6 - 2 \cdot (-x)^5$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 2x^6 - 2x^5 = 0$
$x^5(2x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x - 2 = 0$
$2x - 2 = 0 \qquad / + 2$
$2x = 2 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{2}{2}$
$x = 1$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{5-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	+	0	−	0	+

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]0;1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 12x^5 - 10x^4 = 0$
$x^4(12x - 10) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 12x - 10 = 0$
$12x - 10 = 0 \qquad / + 10$
$12x = 10 \qquad / : 12$
$x = \dfrac{10}{12}$
$x = \dfrac{5}{6}$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{4-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = \dfrac{5}{6}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(0/0)}$
$f''(\dfrac{5}{6}) = 5,79 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\dfrac{5}{6}/-0,134)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	$\frac{5}{6}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{5}{6};\infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\frac{5}{6}[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Wendepunkte:
$f''(x) = 60x^4 - 40x^3 = 0$
$x^3(60x - 40) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 60x - 40 = 0$
$60x - 40 = 0 \qquad / + 40$
$60x = 40 \qquad / : 60$
$x = \frac{40}{60}$
$x = \frac{2}{3}$
$x_5 = 0; \quad$ 3-fache Nullstelle
$x_6 = \frac{2}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f'''(\frac{2}{3}) = -0,0878$
$f'''(\frac{2}{3}) \neq 0 \Rightarrow$
Wendepunkt:$(\frac{2}{3}/ - 0,0878)$

• Kruemmung

	$x <$	0	$< x <$	$\frac{2}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]\frac{2}{3};\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]0;\frac{2}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_0^1 \left(2x^6 - 2x^5\right) dx = \left[\frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^6\right]_0^1$
$= \left(\frac{2}{7} \cdot 1^7 - \frac{1}{3} \cdot 1^6\right) - \left(\frac{2}{7} \cdot 0^7 - \frac{1}{3} \cdot 0^6\right)$
$= \left(-\frac{1}{21}\right) - (0) = -\frac{1}{21}$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2,69 \cdot 10^5$	$-2,26 \cdot 10^5$	$1,58 \cdot 10^5$
$-6\frac{1}{2}$	$174043\frac{19}{32}$	$-1,57 \cdot 10^5$	$1,18 \cdot 10^5$
-6	$1,09 \cdot 10^5$	$-1,06 \cdot 10^5$	$8,64 \cdot 10^4$
$-5\frac{1}{2}$	$65426\frac{31}{32}$	$-6,95 \cdot 10^4$	$6,16 \cdot 10^4$
-5	$3,75 \cdot 10^4$	$-4,38 \cdot 10^4$	$4,25 \cdot 10^4$
$-4\frac{1}{2}$	$20298\frac{3}{32}$	$-2,62 \cdot 10^4$	$2,82 \cdot 10^4$
-4	$1,02 \cdot 10^4$	$-1,48 \cdot 10^4$	$1,79 \cdot 10^4$
$-3\frac{1}{2}$	$4726\frac{31}{32}$	$-7,8 \cdot 10^3$	$1,07 \cdot 10^4$
-3	$1,94 \cdot 10^3$	$-3,73 \cdot 10^3$	$5,94 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$683\frac{19}{32}$	$-1,56 \cdot 10^3$	$2,97 \cdot 10^3$
-2	192	-544	$1,28 \cdot 10^3$
$-1\frac{1}{2}$	$37\frac{31}{32}$	-142	439
-1	4	-22	100
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{32}$	-1	$8,76$
0	0	$-1,88 \cdot 10^{-7}$	$3,75 \cdot 10^{-7}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-1,88 \cdot 10^{-7}$	$3,75 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{4}$	$-1,25$
1	0	$2,01$	20
$1\frac{1}{2}$	$7\frac{19}{32}$	$40,5$	169
2	64	224	640
$2\frac{1}{2}$	$292\frac{31}{32}$	781	$1,72 \cdot 10^3$
3	972	$2,11 \cdot 10^3$	$3,78 \cdot 10^3$
$3\frac{1}{2}$	$2626\frac{3}{32}$	$4,8 \cdot 10^3$	$7,29 \cdot 10^3$
4	$6,14 \cdot 10^3$	$9,73 \cdot 10^3$	$1,28 \cdot 10^4$
$4\frac{1}{2}$	$12916\frac{31}{32}$	$1,8 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^4$
5	$2,5 \cdot 10^4$	$3,13 \cdot 10^4$	$3,25 \cdot 10^4$
$5\frac{1}{2}$	$45295\frac{19}{32}$	$5,12 \cdot 10^4$	$4,82 \cdot 10^4$
6	$7,78 \cdot 10^4$	$8,04 \cdot 10^4$	$6,91 \cdot 10^4$
$6\frac{1}{2}$	$127631\frac{31}{32}$	$1,21 \cdot 10^5$	$9,61 \cdot 10^4$
7	$2,02 \cdot 10^5$	$1,78 \cdot 10^5$	$1,3 \cdot 10^5$

Aufgabe (14)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = -x^6 + 2x^5 - x^4 = -x^4(x-1)^2$
$f'(x) = -6x^5 + 10x^4 - 4x^3 = -6x^3(x-\frac{2}{3})(x-1)$
$f''(x) = -30x^4 + 40x^3 - 12x^2 = -30x^2(x-0,456)(x-0,877)$
$f'''(x) = -120x^3 + 120x^2 - 24x$
$F(x) = \int(-x^6 + 2x^5 - x^4)dx = -\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 0[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^6(-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [-1 \cdot \infty^6] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [-1 \cdot (-\infty)^6] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = -1 \cdot (-x)^6 + 2 \cdot (-x)^5 - 1 \cdot (-x)^4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -x^6 + 2x^5 - x^4 = 0$
$x^4(-x^2 + 2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -x^2 + 2x - 1 = 0$

$-x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-2+0}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-2-0}{-2}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1$
$\underline{x_1 = 0;\quad \text{4-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -6x^5 + 10x^4 - 4x^3 = 0$
$x^3(-6x^2 + 10x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -6x^2 + 10x - 4 = 0$

$-6x^2 + 10x - 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-6)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{4}}{-12}$
$x_{1/2} = \dfrac{-10 \pm 2}{-12}$
$x_1 = \dfrac{-10+2}{-12} \qquad x_2 = \dfrac{-10-2}{-12}$
$x_1 = \dfrac{2}{3} \qquad x_2 = 1$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = \frac{2}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Extremwert:}(0/0)}$
$f''(\frac{2}{3}) = \frac{16}{27} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\frac{2}{3}/-0,0219)}$
$f''(1) = -2$
$f''(1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	$\frac{2}{3}$	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]\frac{2}{3};1[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]0;\frac{2}{3}[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -30x^4 + 40x^3 - 12x^2 = 0$
$x^2(-30x^2 + 40x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -30x^2 + 40x - 12 = 0$

$-30x^2 + 40x - 12 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot (-30) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-30)}$$
$$x_{1/2} = \frac{-40 \pm \sqrt{160}}{-60}$$
$$x_{1/2} = \frac{-40 \pm 12,6}{-60}$$
$$x_1 = \frac{-40 + 12,6}{-60} \qquad x_2 = \frac{-40 - 12,6}{-60}$$
$x_1 = 0,456 \qquad x_2 = 0,877$
$\underline{x_6 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 0,456; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 0,877; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(0,456) = -0,0128$
$f'''(0,456) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,456/-0,0128)}$
$f'''(0,877) = -0,0089$
$f'''(0,877) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,877/-0,0089)}$
• Kruemmung

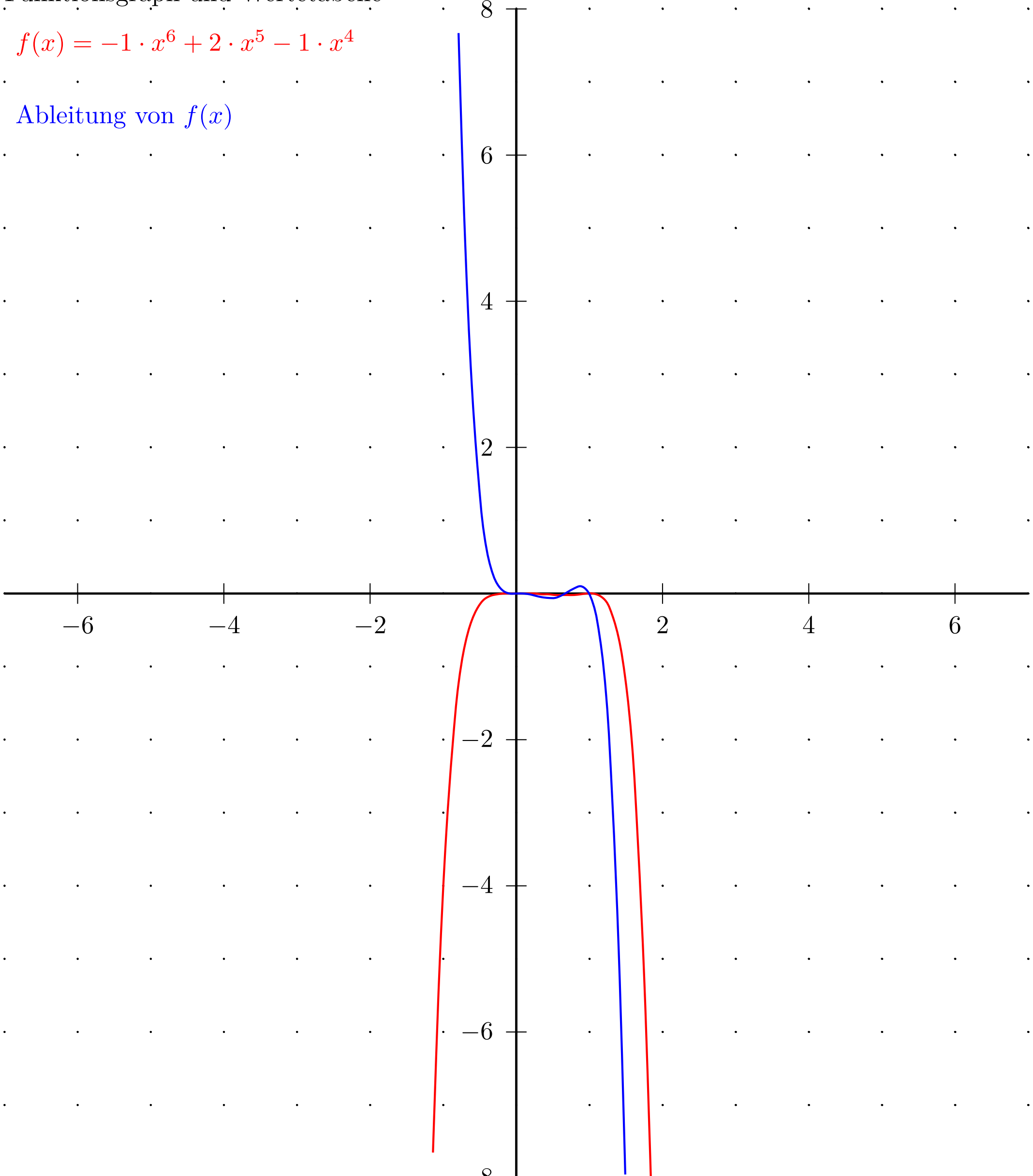
	$x <$	0	$< x <$	$0,456$	$< x <$	$0,877$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]0,456;0,877[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;0,456[\quad \cup \quad]0,877;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^1 \left(-x^6 + 2x^5 - x^4\right) dx = \left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= \left(-\frac{1}{7} \cdot 1^7 + \frac{1}{3} \cdot 1^6 - \frac{1}{5} \cdot 1^5\right) - \left(-\frac{1}{7} \cdot 0^7 + \frac{1}{3} \cdot 0^6 - \frac{1}{5} \cdot 0^5\right)$$
$= (-0,00952) - (0) = -0,00952$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1,54 \cdot 10^5$	$1,26 \cdot 10^5$	$-8,63 \cdot 10^4$
$-6\frac{1}{2}$	$-100409\frac{49}{64}$	$8,86 \cdot 10^4$	$-6,5 \cdot 10^4$
-6	$-6,35 \cdot 10^4$	$6,05 \cdot 10^4$	$-4,8 \cdot 10^4$
$-5\frac{1}{2}$	$-38661\frac{25}{64}$	$4 \cdot 10^4$	$-3,45 \cdot 10^4$
-5	$-2,25 \cdot 10^4$	$2,55 \cdot 10^4$	$-2,41 \cdot 10^4$
$-4\frac{1}{2}$	$-12404\frac{25}{64}$	$1,55 \cdot 10^4$	$-1,62 \cdot 10^4$
-4	$-6,4 \cdot 10^3$	$8,96 \cdot 10^3$	$-1,04 \cdot 10^4$
$-3\frac{1}{2}$	$-3038\frac{49}{64}$	$4,82 \cdot 10^3$	$-6,36 \cdot 10^3$
-3	$-1,3 \cdot 10^3$	$2,38 \cdot 10^3$	$-3,62 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$-478\frac{33}{64}$	$1,04 \cdot 10^3$	$-1,87 \cdot 10^3$
-2	-144	384	-848
$-1\frac{1}{2}$	$-31\frac{41}{64}$	110	-314
-1	-4	20	-82
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{64}$	$1,32$	$-9,88$
0	0	$1,88 \cdot 10^{-7}$	$-0,000613$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$1,88 \cdot 10^{-7}$	$-0,000613$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{64}$	$-0,0623$	$0,125$
1	0	$-0,00123$	-2
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{17}{64}$	$-8,45$	$-43\frac{55}{62}$
2	-16	-64	-208
$2\frac{1}{2}$	$-87\frac{57}{64}$	-258	-622
3	-324	-756	$-1,46 \cdot 10^3$
$3\frac{1}{2}$	$-937\frac{57}{64}$	$-1,82 \cdot 10^3$	$-2,93 \cdot 10^3$
4	$-2,3 \cdot 10^3$	$-3,84 \cdot 10^3$	$-5,31 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$-5023\frac{17}{64}$	$-7,34 \cdot 10^3$	$-8,9 \cdot 10^3$
5	-10^4	$-1,3 \cdot 10^4$	$-1,41 \cdot 10^4$
$5\frac{1}{2}$	$-18530\frac{1}{64}$	$-2,17 \cdot 10^4$	$-2,12 \cdot 10^4$
6	$-3,24 \cdot 10^4$	$-3,46 \cdot 10^4$	$-3,07 \cdot 10^4$
$6\frac{1}{2}$	$-53998\frac{9}{64}$	$-5,29 \cdot 10^4$	$-4,31 \cdot 10^4$
7	$-8,64 \cdot 10^4$	$-7,82 \cdot 10^4$	$-5,89 \cdot 10^4$

Aufgabe (15)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f\,(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x+1)^3(x-1)^3$
$f'\,(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x = 6(x+1)^2x(x-1)^2$
$f''\,(x) = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 30(x+1)(x+0,447)(x-0,447)(x-1)$
$f'''\,(x) = 120x^3 - 72x$
$F(x) = \int(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)dx = \frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-1), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^6(1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{1}{x^6})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f\,(x) = [1 \cdot \infty^6] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\,(x) = [1 \cdot (-\infty)^6] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f\,(-x) = 1 \cdot (-x)^6 - 3 \cdot (-x)^4 + 3 \cdot (-x)^2 - 1$
$f\,(-x) = 1 \cdot x^6 - 3 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - 1$
$f\,(-x) = f\,(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

$Numerische Suche:$
$x_1 = -1;$ 3-fache Nullstelle
$x_2 = 1;$ 3-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-1; 1[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x = 0$
$x(6x^4 - 12x^2 + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 6x^4 - 12x^2 + 6 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$6u^2 - 12u + 6 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6}$$
$$u_{1/2} = \frac{+12 \pm \sqrt{0}}{12}$$
$$u_{1/2} = \frac{12 \pm 0}{12}$$
$$u_1 = \frac{12 + 0}{12} \qquad u_2 = \frac{12 - 0}{12}$$
$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_3 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$f''(-1) = 0$
$f''(-1) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(-1/0)}$
$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-1)}$
$f''(1) = 0$
$f''(1) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(1/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0;1[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$30u^2 - 36u + 6 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 30 \cdot 6}}{2 \cdot 30}$$
$$u_{1/2} = \frac{+36 \pm \sqrt{576}}{60}$$
$$u_{1/2} = \frac{36 \pm 24}{60}$$
$$u_1 = \frac{36 + 24}{60} \qquad u_2 = \frac{36 - 24}{60}$$
$$u_1 = 1 \qquad u_2 = \frac{1}{5}$$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$$x^2 = \frac{1}{5}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$
$x_1 = 0,447 \qquad x_2 = -0,447$
$\underline{x_6 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = -0,447; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 0,447; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_9 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-1) = 0$
$f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-1/0)}$
$f'''(-0,447) = -0,512$
$f'''(-0,447) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,447/-0,512)}$
$f'''(0,447) = -0,512$

$f'''(0,447) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,447/-0,512)}$
$f'''(1) = 0$
$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1/0)}$
• Kruemmung

	$x <$	-1	$< x <$	$-0,447$	$< x <$	$0,447$	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

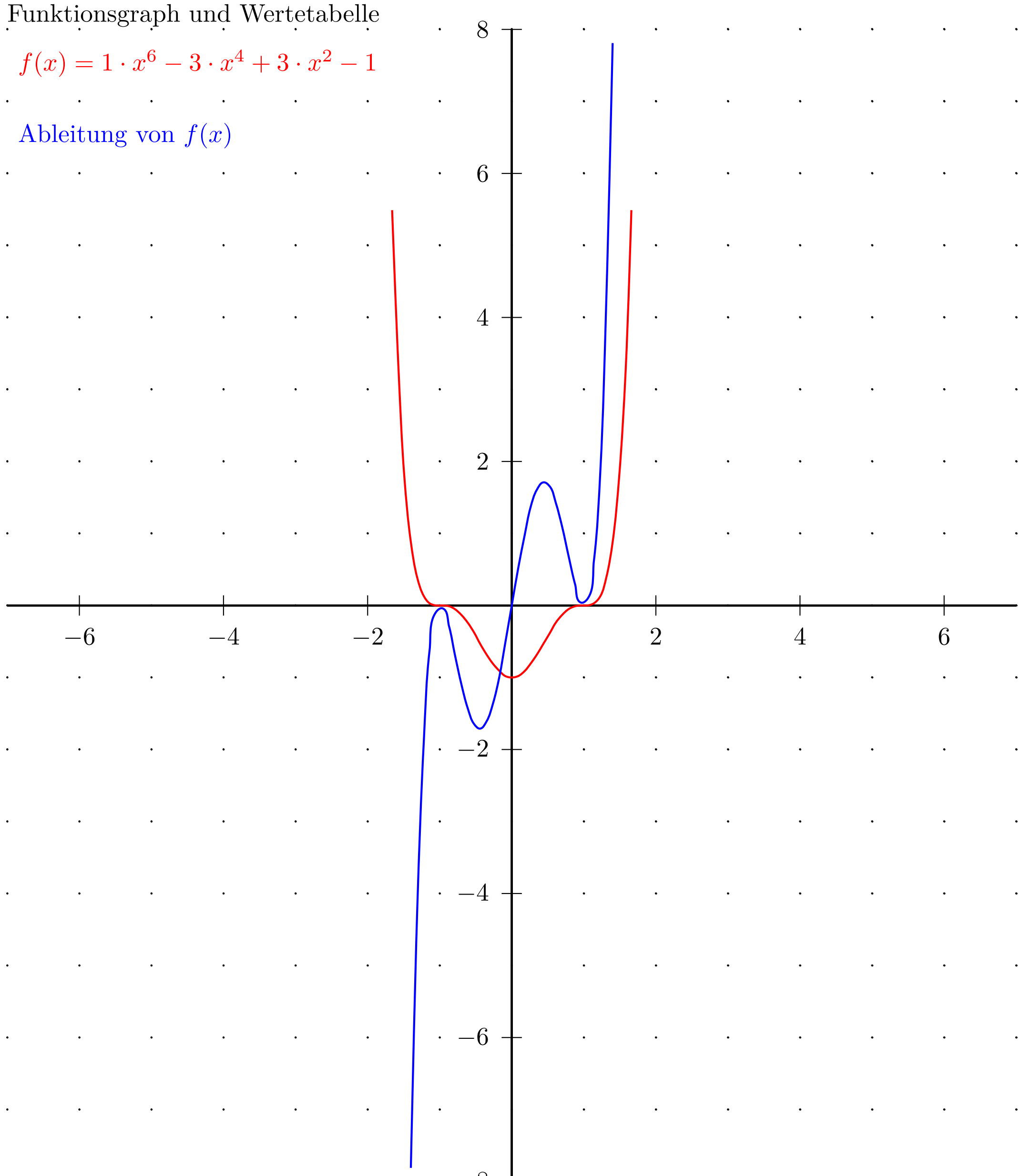
$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-0,447;0,447[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-1;-0,447[\quad \cup \quad]0,447;1[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{1} \left(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1\right) dx = \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{7} \cdot 1^7 - \frac{3}{5} \cdot 1^5 + 1 \cdot 1^3 - 1 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{7} \cdot (-1)^7 - \frac{3}{5} \cdot (-1)^5 + 1 \cdot (-1)^3 - 1 \cdot (-1)\right)$$
$$= \left(-\frac{16}{35}\right) - \left(\frac{16}{35}\right) = -\frac{32}{35}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1,11 \cdot 10^5$	$-9,68 \cdot 10^4$	$7,03 \cdot 10^4$
$-6\frac{1}{2}$	$70189\frac{29}{64}$	$-6,64 \cdot 10^4$	$5,2 \cdot 10^4$
-6	$4,29 \cdot 10^4$	$-4,41 \cdot 10^4$	$3,76 \cdot 10^4$
$-5\frac{1}{2}$	$25025\frac{13}{64}$	$-2,82 \cdot 10^4$	$2,64 \cdot 10^4$
-5	$1,38 \cdot 10^4$	$-17280\frac{68}{91}$	$1,79 \cdot 10^4$
$-4\frac{1}{2}$	$7133\frac{21}{64}$	-10^4	$1,16 \cdot 10^4$
-4	$3,38 \cdot 10^3$	$-5,4 \cdot 10^3$	$7,11 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$1423\frac{53}{64}$	$-2,66 \cdot 10^3$	$4,07 \cdot 10^3$
-3	512	$-1,15 \cdot 10^3$	$2,11 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$144\frac{45}{64}$	-414	953
-2	27	-108	342
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{61}{64}$	$-14,1$	$76,9$
-1	0	$-0,00245$	$0,00735$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{64}$	$-1,69$	$-1,12$
0	-1	0	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	0	6
$\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{64}$	$1,69$	$-1,12$
1	0	$0,00245$	$0,00735$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{61}{64}$	$14,1$	$76,9$
2	27	108	342
$2\frac{1}{2}$	$144\frac{45}{64}$	414	953
3	512	$1,15 \cdot 10^3$	$2,11 \cdot 10^3$
$3\frac{1}{2}$	$1423\frac{53}{64}$	$2,66 \cdot 10^3$	$4,07 \cdot 10^3$
4	$3,38 \cdot 10^3$	$5,4 \cdot 10^3$	$7,11 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$7133\frac{21}{64}$	10^4	$1,16 \cdot 10^4$
5	$1,38 \cdot 10^4$	$17280\frac{68}{91}$	$1,79 \cdot 10^4$
$5\frac{1}{2}$	$25025\frac{13}{64}$	$2,82 \cdot 10^4$	$2,64 \cdot 10^4$
6	$4,29 \cdot 10^4$	$4,41 \cdot 10^4$	$3,76 \cdot 10^4$
$6\frac{1}{2}$	$70189\frac{29}{64}$	$6,64 \cdot 10^4$	$5,2 \cdot 10^4$
7	$1,11 \cdot 10^5$	$9,68 \cdot 10^4$	$7,03 \cdot 10^4$

Aufgabe (16)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 = (x+2)^3(x-2)^3$
$f'(x) = 6x^5 - 48x^3 + 96x = 6(x+2)^2x(x-2)^2$
$f''(x) = 30x^4 - 144x^2 + 96 = 30(x+2)(x+0,894)(x-0,894)(x-2)$
$f'''(x) = 120x^3 - 288x$
$F(x) = \int(x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64)dx = \frac{1}{7}x^7 - 2\frac{2}{5}x^5 + 16x^3 - 64x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-64), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^6(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{48}{x^4} - \frac{64}{x^6})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^6] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^6] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^6 - 12 \cdot (-x)^4 + 48 \cdot (-x)^2 - 64$
$f(-x) = 1 \cdot x^6 - 12 \cdot x^4 + 48 \cdot x^2 - 64$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 = 0$

$NumerischeSuche:$
$\underline{x_1 = -2;\quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2;\quad \text{3-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-2; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x^5 - 48x^3 + 96x = 0$
$x(6x^4 - 48x^2 + 96) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 6x^4 - 48x^2 + 96 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$6u^2 - 48u + 96 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 96}}{2 \cdot 6}$$
$$u_{1/2} = \frac{+48 \pm \sqrt{0}}{12}$$
$$u_{1/2} = \frac{48 \pm 0}{12}$$
$$u_1 = \frac{48 + 0}{12} \qquad u_2 = \frac{48 - 0}{12}$$
$u_1 = 4 \qquad u_2 = 4$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_3 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = 0$
$f''(-2) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(-2/0)}$
$f''(0) = 96 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-64)}$
$f''(2) = 0$
$f''(2) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Terrassenpukt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = 30x^4 - 144x^2 + 96 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$30u^2 - 144u + 96 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+144 \pm \sqrt{(-144)^2 - 4 \cdot 30 \cdot 96}}{2 \cdot 30}$$
$$u_{1/2} = \frac{+144 \pm \sqrt{9,22 \cdot 10^3}}{60}$$
$$u_{1/2} = \frac{144 \pm 96}{60}$$
$$u_1 = \frac{144 + 96}{60} \qquad u_2 = \frac{144 - 96}{60}$$
$$u_1 = 4 \qquad u_2 = \frac{4}{5}$$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$$x^2 = \frac{4}{5}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$
$x_1 = 0,894 \qquad x_2 = -0,894$
$\underline{x_6 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = -0,894; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 0,894; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_9 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(-2) = 0$
$f'''(-2) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-2/0)}$
$f'''(-0,894) = -32,8$
$f'''(-0,894) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(-0,894/-32,8)}$
$f'''(0,894) = -32,8$

$f'''(0,894) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(0,894/-32,8)}$
$f''(2) = 0$
$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(2/0)}$
• Kruemmung

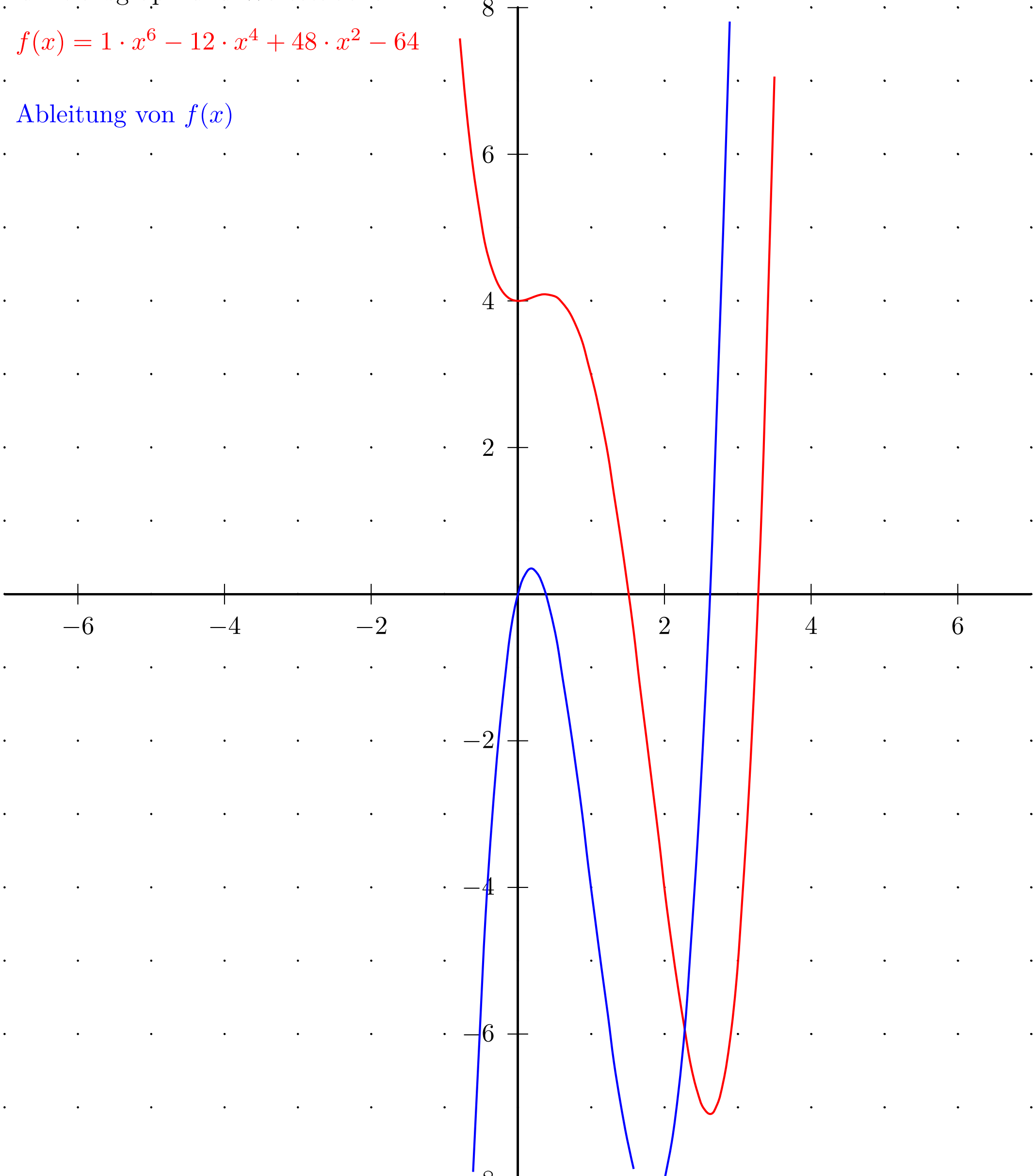
	$x <$	-2	$< x <$	$-0,894$	$< x <$	$0,894$	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-0,894;0,894[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-2;-0,894[\quad \cup \quad]0,894;2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-2}^{2} \left(x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64\right) dx = \left[\frac{1}{7}x^7 - 2\frac{2}{5}x^5 + 16x^3 - 64x\right]_{-2}^{2}$$
$$= \left(\frac{1}{7} \cdot 2^7 - 2\frac{2}{5} \cdot 2^5 + 16 \cdot 2^3 - 64 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{7} \cdot (-2)^7 - 2\frac{2}{5} \cdot (-2)^5 + 16 \cdot (-2)^3 - 64 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(-58\frac{18}{35}\right) - \left(58\frac{18}{35}\right) = -117\frac{1}{35}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$9,11 \cdot 10^4$	$-8,51 \cdot 10^4$	$6,51 \cdot 10^4$
$-6\frac{1}{2}$	$55962\frac{9}{64}$	$-5,71 \cdot 10^4$	$4,76 \cdot 10^4$
-6	$3,28 \cdot 10^4$	$-3,69 \cdot 10^4$	$3,38 \cdot 10^4$
$-5\frac{1}{2}$	$18087\frac{57}{64}$	$-2,27 \cdot 10^4$	$2,32 \cdot 10^4$
-5	$9,26 \cdot 10^3$	$-1,32 \cdot 10^4$	$1,52 \cdot 10^4$
$-4\frac{1}{2}$	$4291\frac{1}{64}$	$-7,13 \cdot 10^3$	$9,48 \cdot 10^3$
-4	$1,73 \cdot 10^3$	$-3,46 \cdot 10^3$	$5,47 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$561\frac{33}{64}$	$-1,43 \cdot 10^3$	$2,83 \cdot 10^3$
-3	125	-450	$1,23 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	$11\frac{25}{64}$	-76	368
-2	0	$-0,0196$	$0,0294$
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{23}{64}$	$-27,6$	$-76,1$
-1	-27	-54	-18
$-\frac{1}{2}$	$-52\frac{47}{64}$	$-42,2$	$61,9$
0	-64	0	96

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-64	0	96
$\frac{1}{2}$	$-52\frac{47}{64}$	$42,2$	$61,9$
1	-27	54	-18
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{23}{64}$	$27,6$	$-76,1$
2	0	$0,0196$	$0,0294$
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{25}{64}$	76	368
3	125	450	$1,23 \cdot 10^3$
$3\frac{1}{2}$	$561\frac{33}{64}$	$1,43 \cdot 10^3$	$2,83 \cdot 10^3$
4	$1,73 \cdot 10^3$	$3,46 \cdot 10^3$	$5,47 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	$4291\frac{1}{64}$	$7,13 \cdot 10^3$	$9,48 \cdot 10^3$
5	$9,26 \cdot 10^3$	$1,32 \cdot 10^4$	$1,52 \cdot 10^4$
$5\frac{1}{2}$	$18087\frac{57}{64}$	$2,27 \cdot 10^4$	$2,32 \cdot 10^4$
6	$3,28 \cdot 10^4$	$3,69 \cdot 10^4$	$3,38 \cdot 10^4$
$6\frac{1}{2}$	$55962\frac{9}{64}$	$5,71 \cdot 10^4$	$4,76 \cdot 10^4$
7	$9,11 \cdot 10^4$	$8,51 \cdot 10^4$	$6,51 \cdot 10^4$

Aufgabe (17)

•Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f\,(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4 = -\frac{1}{2}x^4(x-3)^2$
$f'\,(x) = -3x^5 + 15x^4 - 18x^3 = -3x^3(x-2)(x-3)$
$f''\,(x) = -15x^4 + 60x^3 - 54x^2 = -15x^2(x-1,37)(x-2,63)$
$f'''\,(x) = -60x^3 + 180x^2 - 108x$
$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4)dx = -\frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{9}{10}x^5 + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 0[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^6(-\frac{1}{2} + \frac{3}{x} - \frac{4\frac{1}{2}}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f\,(x) = [-\frac{1}{2}\cdot\infty^6] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\,(x) = [-\frac{1}{2}\cdot(-\infty)^6] = -\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f\,(-x) = -\frac{1}{2}\cdot(-x)^6 + 3\cdot(-x)^5 - 4\frac{1}{2}\cdot(-x)^4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4 = 0$
$x^4(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2} = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2} = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{2}\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{0}}{-1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm 0}{-1}$
$x_1 = \dfrac{-3+0}{-1} \qquad x_2 = \dfrac{-3-0}{-1}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_1 = 0;}$ 4-fache Nullstelle
$\underline{x_2 = 3;}$ 2-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;3[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = -3x^5 + 15x^4 - 18x^3 = 0$
$x^3(-3x^2 + 15x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -3x^2 + 15x - 18 = 0$

$-3x^2 + 15x - 18 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-18)}}{2\cdot(-3)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{9}}{-6}$
$x_{1/2} = \dfrac{-15 \pm 3}{-6}$
$x_1 = \dfrac{-15+3}{-6} \qquad x_2 = \dfrac{-15-3}{-6}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Extremwert:}(0/0)}$
$f''(2) = 24 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/-8)}$
$f''(3) = -81$
$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]2; 3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]0; 2[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Wendepunkte:
$f''(x) = -15x^4 + 60x^3 - 54x^2 = 0$
$x^2(-15x^2 + 60x - 54) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad -15x^2 + 60x - 54 = 0$

$-15x^2 + 60x - 54 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot (-15) \cdot (-54)}}{2 \cdot (-15)}$$
$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{360}}{-30}$$
$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm 19}{-30}$$
$$x_1 = \frac{-60 + 19}{-30} \qquad x_2 = \frac{-60 - 19}{-30}$$
$x_1 = 1,37 \qquad x_2 = 2,63$
$\underline{x_6 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 1,37; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 2,63; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f'''(1,37) = -4,66$
$f'''(1,37) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(1,37/-4,66)}$
$f'''(2,63) = -3,24$
$f'''(2,63) \neq 0 \Rightarrow$
$\underline{\text{Wendepunkt:}(2,63/-3,24)}$
• Kruemmung

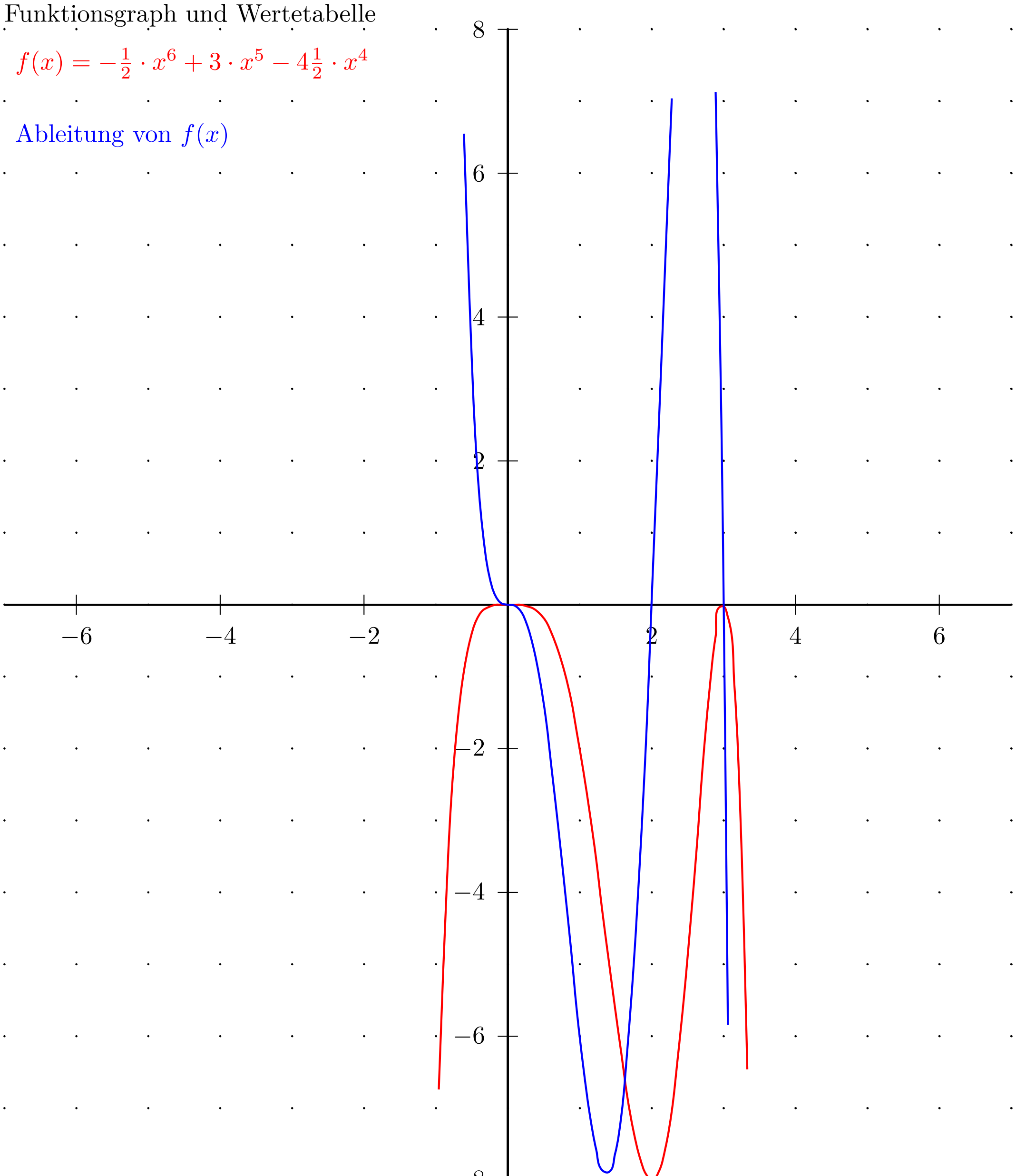
	$x <$	0	$< x <$	$1,37$	$< x <$	$2,63$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]1,37; 2,63[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 1,37[\quad \cup \quad]2,63; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 - 4\frac{1}{2}x^4\right) dx = \left[-\frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{9}{10}x^5\right]_0^3$$
$$= \left(-\frac{1}{14} \cdot 3^7 + \frac{1}{2} \cdot 3^6 - \frac{9}{10} \cdot 3^5\right) - \left(-\frac{1}{14} \cdot 0^7 + \frac{1}{2} \cdot 0^6 - \frac{9}{10} \cdot 0^5\right)$$
$$= \left(-10\frac{29}{70}\right) - (0) = -10\frac{29}{70}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1,2 \cdot 10^5$	$9,26 \cdot 10^4$	$-5,92 \cdot 10^4$
$-6\frac{1}{2}$	$-8,06 \cdot 10^4$	$6,65 \cdot 10^4$	$-4,55 \cdot 10^4$
-6	$-5,25 \cdot 10^4$	$4,67 \cdot 10^4$	$-3,43 \cdot 10^4$
$-5\frac{1}{2}$	$-3,31 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^4$	$-2,53 \cdot 10^4$
-5	$-2 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^4$	$-1,82 \cdot 10^4$
$-4\frac{1}{2}$	$-1,15 \cdot 10^4$	$1,33 \cdot 10^4$	$-1,27 \cdot 10^4$
-4	$-6,27 \cdot 10^3$	$8,06 \cdot 10^3$	$-8,54 \cdot 10^3$
$-3\frac{1}{2}$	$-3,17 \cdot 10^3$	$4,6 \cdot 10^3$	$-5,49 \cdot 10^3$
-3	$-1,46 \cdot 10^3$	$2,43 \cdot 10^3$	$-3,32 \cdot 10^3$
$-2\frac{1}{2}$	-591	$1,16 \cdot 10^3$	$-1,86 \cdot 10^3$
-2	-200	480	-936
$-1\frac{1}{2}$	$-51,3$	160	-400
-1	-8	36	-129
$-\frac{1}{2}$	$-0,383$	$3,29$	$-21,9$
0	0	$2,81 \cdot 10^{-7}$	$-0,00276$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$2,81 \cdot 10^{-7}$	$-0,00276$
$\frac{1}{2}$	$-0,195$	$-1,41$	$-6,94$
1	-2	-6	-9
$1\frac{1}{2}$	$-5,7$	$-7,59$	$5,06$
2	-8	$0,00122$	24
$2\frac{1}{2}$	$-4,88$	$11,7$	$14,1$
3	0	$-0,0165$	-81
$3\frac{1}{2}$	$-18,8$	$-96,5$	-340
4	-128	-384	-864
$4\frac{1}{2}$	-461	$-1,03 \cdot 10^3$	$-1,78 \cdot 10^3$
5	$-1,25 \cdot 10^3$	$-2,25 \cdot 10^3$	$-3,23 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	$-2,86 \cdot 10^3$	$-4,37 \cdot 10^3$	$-5,38 \cdot 10^3$
6	$-5,83 \cdot 10^3$	$-7,78 \cdot 10^3$	$-8,42 \cdot 10^3$
$6\frac{1}{2}$	$-1,09 \cdot 10^4$	$-1,3 \cdot 10^4$	$-1,26 \cdot 10^4$
7	$-1,92 \cdot 10^4$	$-2,06 \cdot 10^4$	$-1,81 \cdot 10^4$