

7 Exponentialgleichungen lösen mithilfe von Substitution

Löse die Exponentialgleichungen wie in dem folgenden Beispiel mithilfe einer geeigneten Substitution. Gib die Lösung auf drei Nachkommastellen genau an.

Beispiel: Löse die Gleichung $5 \cdot 5^x + 5^{-x} = 6$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 5 \cdot 5^x + (5^x)^{-1} &= 6 && \text{Substitution: } 5^x = u \\
 5 \cdot u + u^{-1} &= 5 \cdot u + \frac{1}{u} = 6 && | \cdot u \\
 5u^2 + 1 &= 6u && | - 6u \\
 5u^2 - 6u + 1 &= 0 && | : 5 \\
 u^2 - \frac{6}{5}u + \frac{1}{5} &= 0 && | p = -\frac{6}{5}; q = \frac{1}{5} \\
 u_{1,2} &= \frac{3}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{3}{5} \pm \frac{2}{5} \\
 u_1 = 1; u_2 &= \frac{1}{5} && \text{Rücksubstitution: } u = 5^x \\
 5^x &= 1 \text{ oder } 5^x = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Zunächst wird 5^x durch u ersetzt, also $5^x = u$.

Jetzt wird die Gleichung so umgeformt, dass kein u mehr im Nenner ist.

Es ergibt sich eine quadratische Gleichung, die mithilfe der pq-Formel gelöst wird.

Jetzt wird die Substitution rückgängig gemacht, also u durch 5^x ersetzt.

Die jetzt einfachen Exponentialgleichungen werden durch Exponentenvergleich oder mithilfe des Logarithmus gelöst.

Also $x_1 = 0$ (denn $5^0 = 1$); $x_2 = -1$ (denn $5^{-1} = \frac{1}{5}$)

a) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

b) $7^x + 4 = 21 \cdot 7^{-x}$

c) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

d) $9^x + 3^x = 6$

$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____

$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____

$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____

$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____

e) $5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^{-x} = 126$

f) $2^{2x+5} - 3 \cdot 2^{x+2} = -1$

g) $8^{x+2} - 8^{2x} = 240$

h) $6^{2+x} + 6^{2-x} = 78$

$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____

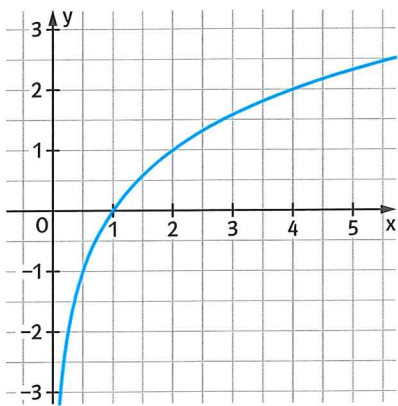
$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____

$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____

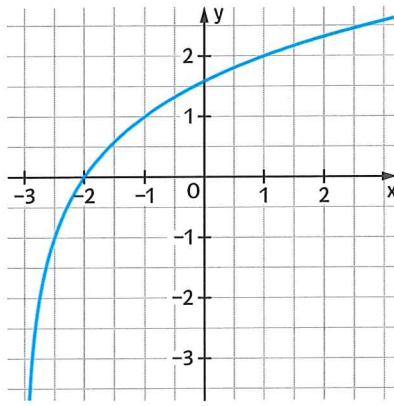
$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____

8 Logarithmusfunktionen

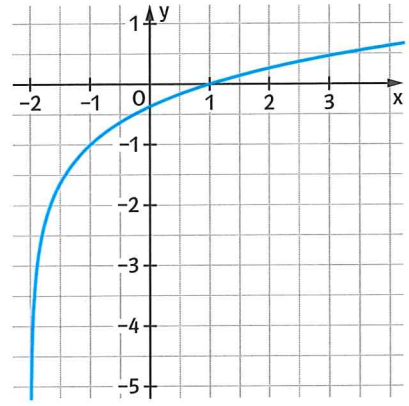
a) Bestimme die Funktionsgleichung der folgenden Logarithmusfunktionen des Typs $f(x) = \log_b(x - d) + e$



(1) $f(x) =$ _____



(2) $f(x) =$ _____



(3) $f(x) =$ _____

b) Skizziere die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = -\log_2(x)$ und der Funktion g mit $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ in das rechte Koordinatensystem. Was fällt auf?

Begründe mithilfe der Logarithmusgesetze.

Auffälligkeit: _____

Begründung: _____

