Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.

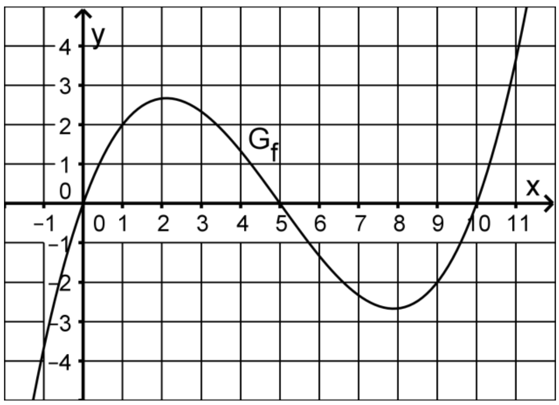


Abb. 1

a Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f. 4

(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 15x^2 + 50x)$)

b Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5|0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W. 6

c G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 25x)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. Geben Sie an, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist. 4

Im Folgenden wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_1 mit $F_1(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ betrachtet.

d F_1 hat für $0 \le x \le 10$ zwei ganzzahlige Nullstellen. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Angabe. 3

e Begründen Sie mithilfe von Abbildung 1, dass F_1 mindestens eine weitere positive Nullstelle hat. 2

f Begründen Sie, dass F_1 höchstens vier Nullstellen hat. 2

Für $0 \le x \le 5$ gilt, dass der Graph von f und der Graph einer trigonometrischen Funktion h

- die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen;
- beide nicht unterhalb der x-Achse verlaufen;
- jeweils mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts $\frac{625}{72}$ einschließen.

g Bestimmen Sie einen Term einer solchen Funktion h. 6

h Begründen Sie, dass die Graphen von f und h für $0 < x < 5$ mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. 3

2 Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K: x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Abbildung 2 zeigt den Graphen von K.

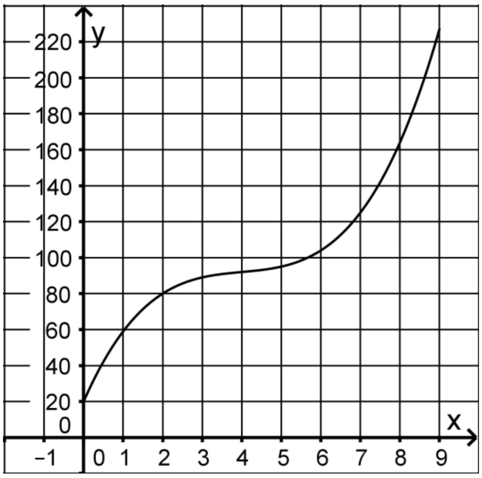


Abb. 2

a Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen. 1

b Geben Sie das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang. 2

Die Funktion E mit $E(x)=23x$ gibt für $0 \le x \le 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x)=E(x)-K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

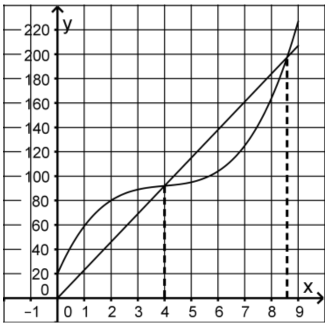
c Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden. 2

d	Zeichnen Sie den Graphen von E in Abbildung 2 ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.	4
e	Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.	5
f	Für jeden Wert von b mit $b \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion $K_b : x \mapsto x^3 - bx^2 + 50x + 20$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass K_b für $b < \sqrt{150}$ streng monoton wachsend ist.	6
		50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f(x) = a \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x-10)$; $f(1) = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{18}$	4
	b	$f'(x) = \frac{1}{18} \cdot \left(3x^2 - 30x + 50\right)$, $f'''(x)=\frac{3}{4}$, $f'''(x) = \frac{1}{3}$ $f''(5) = 0$, $f'''(5) \neq 0$ $f'(5) = -\frac{25}{18}$, $0 = -\frac{25}{18} \cdot 5 + t \Leftrightarrow t = \frac{125}{18}$, d. h. $y = -\frac{25}{18}x + \frac{125}{18}$	6
	c	Der Graph von g muss um 5 in positive x-Richtung verschoben werden. Da der Term von g nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten enthält, ist der Graph von g symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, G_f also symmetrisch bezüglich des Punkts $W(5\|0)$.	4
	d	$x = 1$: Die Integrationsgrenzen stimmen überein. $x = 9$: Betrachtet man die Flächenstücke, die G_f im Integrationsbereich mit der x-Achse einschließt, so ist aufgrund der Symmetrie des Graphen der Inhalt des oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücks ebenso groß wie der Inhalt des unterhalb liegenden Flächenstücks.	3
	e	Betrachtet man die Flächenstücke, die G_f im Integrationsbereich mit der x-Achse einschließt, so sind für ein $x > 10$ die Inhalte der oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke zusammen ebenso groß wie der Inhalt des unterhalb liegenden Flächenstücks.	2
	f	Die Funktion F_1 ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und hat als solche höchstens vier Nullstellen.	2
	g	$h(x) = a \cdot \sin(bx)$ h hat im betrachteten Bereich die gleichen Nullstellen wie f, wenn $b = \frac{\pi}{5}$ ist. $\int_0^5 h(x)\,dx = a \cdot \left[-\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)\right]_0^5 = \frac{625}{72} \Leftrightarrow a = \frac{125}{144}\pi$	6

	h	Hätten die Graphen von f und h für $0 < x < 5$ keinen gemeinsamen Punkt, dann würde der Graph von f in diesem Bereich entweder vollständig oberhalb oder vollständig unterhalb des Graphen von h verlaufen. Dies ist jedoch nicht möglich, da die beiden Graphen für $0 \le x \le 5$ mit der x-Achse Flächen gleichen Inhalts einschließen.	3
2	**a**	Die Produktionsmenge beträgt etwa $7\,m^3$.	1
	b	K ist streng monoton wachsend, d. h. mit zunehmender Produktionsmenge nehmen die Kosten zu.	2
	c	$E(4) - K(4) = 92 - 92 = 0$	2
	d	 Das Unternehmen erzielt nur für $4 < x < x_s$ mit $x_s \approx 8{,}6$ einen Gewinn.	4
	e	$G(x) = -x^3 + 12x^2 - 27x - 20$, $G'(x) = -3x^2 + 24x - 27$ Für $4 < x < x_s$ mit $x_s \approx 8{,}6$ gilt: $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{7} \approx 6{,}6$ Es müssen etwa 6,6 Kubikmeter verkauft werden.	5
	f	$K_b'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2bx + 50 = 0$ Für $b \in \mathbb{R}^+$ gilt für die Diskriminante: $4b^2 - 600 < 0 \Leftrightarrow b < \sqrt{150}$ Damit hat K_b' für $b < \sqrt{150}$ keine Nullstellen. Da $K_b'(0) > 0$ gilt, ist K_b für diese Werte von b streng monoton wachsend.	6
			50

3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
1 a	4	X			X		II				II			X	
b	6	X	X	X	X			I			I		X		
c	4		X	X	X		II	II		II				X	
d	3		X	X	X		II				I	II		X	
e	2		X	X	X		II			II		II		X	
f	2				X		II				II			X	
g	6	X	X	X	X		II	III			III				X
h	3			X	X		III	III				II			X

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

2 a	1	X			X				I	I			X		
b	2				X				I	I		I	X		
c	2				X				I		I		X		
d	4	X		X	X				II	II		II		X	
e	5	X			X				II		II			X	
f	6	X			X		III	II			III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.