Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Für jeden Wert von $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_k : x \mapsto 8k \cdot (kx-1)^2 \cdot (kx+1)^2$ festgelegt. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, die G_k mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat. 3

b Skalieren Sie in der Abbildung 1 die beiden Achsen so, dass die gezeigte Kurve den Graphen $G_{\frac{1}{4}}$ darstellt. 2

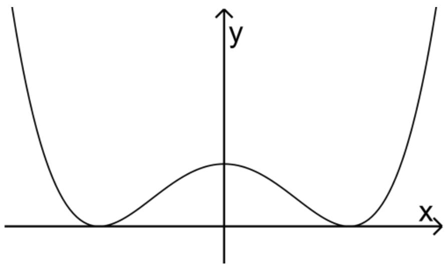


Abb. 1

c Beschreiben Sie, wie der Graph G_{2k} aus G_k hervorgeht. 2

d Begründen Sie, dass $f_k(x) = 8k \cdot \left(k^2x^2 - 1\right)^2$ gilt, und zeigen Sie, dass G_k symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. 3

e Für einen Wert von k gibt es einen Punkt $\left(x_1 \mid f_k(x_1)\right)$ mit $x_1 > 0$, für den die Gleichung $\frac{f_k(x_1) - 0}{x_1 - 0} = -\frac{1}{f_k'(x_1)}$ gilt. Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Gleichung. 3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

G_k schließt im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein. Die Abbildung 2 zeigt dieses Flächenstück (grau markiert) sowie das Rechteck mit den Eckpunkten $\left(0\,|\,f_k(0)\right)$ und $\left(\frac{1}{k}\,|\,0\right)$, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

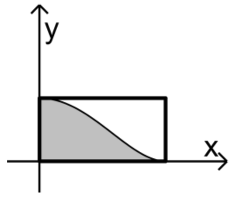


Abb. 2

f Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks. 4

Bei Rotation des Rechtecks um die x-Achse entsteht ein Körper, ebenso bei Rotation um die y-Achse.

g Skizzieren Sie einen der beiden Körper und beschriften Sie die Skizze mit den Maßen des Körpers. 2

h Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die beiden Körper das gleiche Volumen haben. 3

i Bei Rotation des grau markierten Flächenstücks um die y-Achse entsteht ein weiterer Körper. Begründen Sie, dass das Volumen dieses Körpers mit zunehmendem Wert von k beliebig klein wird. 5

2 Im Folgenden werden die in IR definierten Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ und $g: x \mapsto (x-2)^2 \cdot e^x$ betrachtet.

a Die Funktion f ist eine Funktion der Schar aus Aufgabe 1. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von k. 2

b Zwei Extrempunkte des Graphen von f liegen auf dem Graphen von g. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte. 4

c Die Abbildung 3 zeigt die Graphen von f und g für $0 \le x \le 2$. Ordnen Sie jeden der Graphen I und II der passenden Funktion zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. 2

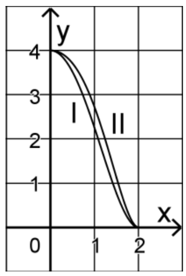


Abb. 3

d Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P\left(p\,|\,g(p)\right)$ mit $0 < p < 2$. Ermitteln Sie rechnerisch denjenigen Wert von p, für den diese Tangente die x-Achse im Punkt $Q(2\,|\,0)$ schneidet. 6

3 Der Term einer in IR definierten Funktion h hat die Form $h(x) = a \cdot \cos(bx) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in [0,2]$. Der Graph von h weist im Bereich $-1 \le x \le 3$ genau zwei seiner Extrempunkte auf, den Hochpunkt $(0\,|\,4)$ und den Tiefpunkt $(2\,|\,0)$.

a Skizzieren Sie den Graphen von h für $-1 \le x \le 3$ in einem Koordinatensystem. 2

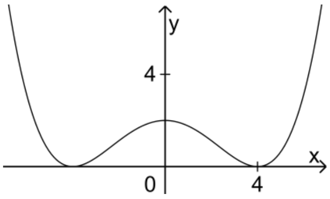
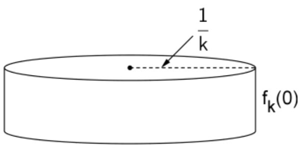
b Geben Sie die Werte von a und c an und ermitteln Sie den Wert von b. 4

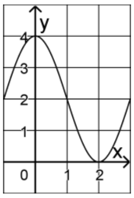
c Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-1}^{1} \left(h(x) - 2\right) dx = \int_{1}^{3} \left(2 - h(x)\right) dx$ gilt. 3

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f_k(0)=8k$, $f_k(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{k} \vee x=\frac{1}{k}$ Damit: $\left(-\frac{1}{k}\mid 0\right)$, $(0\mid 8k)$, $\left(\frac{1}{k}\mid 0\right)$	3
	b		2
	c	G_{2k} geht aus G_k durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 hervor.	2
	d	$(kx-1)^2\cdot(kx+1)^2=\left((kx-1)\cdot(kx+1)\right)^2=\left(k^2x^2-1\right)^2$ $f_k(-x)=8k\cdot\left(k^2(-x)^2-1\right)^2=8k\cdot\left(k^2x^2-1\right)^2=f_k(x)$	3
	e	Die Tangente an G_k im Punkt $\left(x_1\mid f_k(x_1)\right)$ steht senkrecht zur Gerade durch diesen Punkt und den Koordinatenursprung.	3
	f	$\int_0^{\frac{1}{k}} f_k(x)\,dx=8k\cdot\int_0^{\frac{1}{k}}\left(k^2x^2-1\right)^2dx=8k\cdot\int_0^{\frac{1}{k}}\left(k^4x^4-2k^2x^2+1\right)dx$ $=8k\cdot\left[\frac{1}{5}k^4x^5-\frac{2}{3}k^2x^3+x\right]_0^{\frac{1}{k}}=\frac{64}{15}$	4
	g		2
	h	$(8k)^2\cdot\pi\cdot\frac{1}{k}=\left(\frac{1}{k}\right)^2\cdot\pi\cdot 8k \Leftrightarrow 8k=\frac{1}{k} \Leftrightarrow k=\frac{1}{\sqrt{8}}$	3
	i	Für jeden Wert von k ist das Volumen des Körpers, der bei Rotation des grau markierten Flächenstücks um die y-Achse entsteht, kleiner als das Volumen des Zylinders, der bei Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht. Für das Volumen dieses Zylinders gilt: $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2\cdot\pi\cdot 8k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{8\pi}{k}=0$	5
2	**a**	$8k=4 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$	2
	b	$f'(x)=x^3-4x=x\cdot\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=0 \vee x=2$ Da $g(-2)=16e^{-2}\neq f(-2)$, haben die beiden Punkte die Koordinaten $(0\mid 4)$ bzw. $(2\mid 0)$.	4

	c	I - f, II - g Begründung: $f(1)=2{,}25$	2
	d	Mit $g'(x)=2\cdot(x-2)\cdot e^x+(x-2)^2\cdot e^x=(x-2)\cdot e^x\cdot x$, $g'(p)=p\cdot(p-2)\cdot e^p$ und $g(p)=(p-2)^2\cdot e^p$ ergibt sich: $\frac{-(p-2)^2\cdot e^p}{2-p}=p\cdot(p-2)\cdot e^p \Leftrightarrow 1=p$	6
3	a		2
	b	$a=c=2$ Da der Graph von h im Bereich $-1\leq x\leq 3$ nur einen seiner Tiefpunkte aufweist, gilt für $b\in[0,2]$: $0=2\cdot\cos(b\cdot 2)+2 \Leftrightarrow \cos(b\cdot 2)=-1 \Leftrightarrow b=\frac{\pi}{2}$	4
	c	Der Graph von h ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(1\mid 2)$. Deshalb stimmen die Inhalte der beiden Flächenstücke, die der Graph von h für $-1\leq x\leq 1$ bzw. $1\leq x\leq 3$ mit der Gerade mit der Gleichung $y=2$ einschließt, überein.	3
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3					I		X		
b	2		I		II	I			X	
c	2	II			II		II		X	
d	3				I	I		X		
e	3	III				II	II			X
f	4					II			X	
g	2				I	I	I	X		
h	3		II			II			X	
i	5	III	III			II				X
2 a	2		II		II	I			X	
b	4	II	II			II			X	
c	2	I			I	I		X		
d	6		III			II				X
3 a	2	I			II		I		X	
b	4	II	II			II			X	
c	3	II			II		II		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.