Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Tangente im Wendepunkt $W(4|18)$ des Graphen hat die Steigung -4.

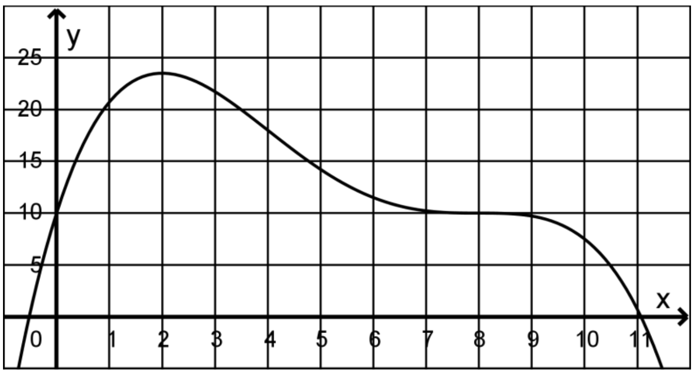


Abb. 1

a Zeichnen Sie die beschriebene Tangente in die Abbildung 1 ein und geben Sie die beiden Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f' von f an. — 3

b Der Graph von f' hat einen Tiefpunkt. Geben Sie die Koordinaten dieses Tiefpunkts an und begründen Sie Ihre Angabe. — 3

c Beurteilen Sie die folgende Aussage: — 3

Für jede Stammfunktion F von f gilt $F(x+2) > F(x) + 20$ für jeden Wert von $x \in [0;5]$.

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 Für jeden Wert von $k \in \mathbb{R}^+$ wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h_k : x \mapsto 10 \cdot \left(1 - e^{-kx}\right) \cdot e^{-x}$ betrachtet. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet. Die Abbildung 2 zeigt G_1.

Für die erste Ableitungsfunktion h_k' von h_k gilt $h_k'(x) = 10 \cdot \left((k+1) \cdot e^{-kx} - 1\right) \cdot e^{-x}$.

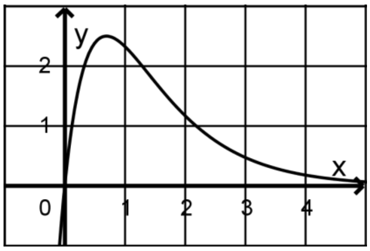


Abb. 2

a Begründen Sie, dass h_k nur die Nullstelle $x = 0$ hat. Geben Sie den Grenzwert von h_k für $x \to +\infty$ an. 3

b Bestimmen Sie die x-Koordinate des Hochpunkts von G_k. 3

c Betrachtet werden die Tangente an G_k im Koordinatenursprung und die Gerade, die zu dieser Tangente im Koordinatenursprung senkrecht steht. Diese beiden Geraden schneiden die Gerade mit der Gleichung $y = 1$. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Abstand der beiden Schnittpunkte $10k + \frac{1}{10k}$ ist. 5

d Betrachtet man den Abstand aus Teilaufgabe 2c für alle Werte von k, so ist dieser für einen Wert von k am kleinsten. Bestimmen Sie diesen Wert und geben Sie den zugehörigen Abstand an. 3

3 Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d. h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab.

Im Folgenden wird der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 betrachtet. Dieser Zerfall wird durch die Funktion p mit $p(x) = 200 \cdot e^{-0{,}0480x}$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist, und $p(x)$ die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

a Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt. 3

b Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird. 4

Bei dem Zerfall des Plutonium-241 entsteht radioaktives Americium-241, das ebenfalls exponentiell zerfällt. Im verwendeten Modell gibt die Funktion a mit $a(x) = 207 \cdot \left(1 - e^{-0{,}0464x}\right) \cdot e^{-0{,}0016x}$ für jedes Jahr die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.

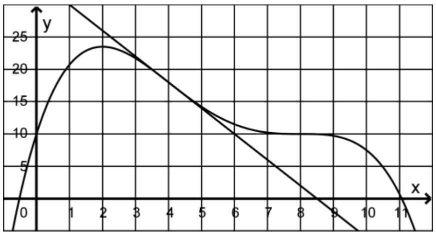
c Der Graph von a kann für einen Wert von k aus dem Graphen der Funktion h_k aus Aufgabe 2 erzeugt werden, indem man diesen in x-Richtung und in y-Richtung streckt. Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von k. 3

d Im Funktionsterm von a erfasst der Faktor $1 - e^{-0{,}0464x}$ die Zunahme der Masse des vorhandenen Americium-241 und der Faktor $e^{-0{,}0016x}$ den Zerfall des vorhandenen Americium-241. Begründen Sie, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem beide Faktoren den gleichen Wert annehmen. 3

e	Geben Sie die Bedeutung der Aussage $\frac{a(73)}{73} \approx 2{,}4$ im Sachzusammenhang an. Begründen Sie Ihre Angabe.	4
		40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	 $x_1 = 2,\ x_2 = 8$	3
	b	Die Steigung des Graphen von f im Wendepunkt W ist -4. In unmittelbarer Umgebung von W ist die Steigung des Graphen von f größer als -4. Damit hat der Graph von f' den Tiefpunkt $(4 \mid -4)$.	3
	c	Die Aussage ist richtig. Begründung: Für jeden Wert $x_0 \in [0;5]$ ist $F(x_0+2)-F(x_0)$ der Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = x_0$ und $x = x_0 + 2$ einschließt. Dieser Inhalt ist für jeden dieser Werte x_0 größer als der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 2 und 10, d. h. größer als 20.	3
2	**a**	$h_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-kx} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h_k(x) = 0$	3
	b	$h_k'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-kx} = \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow -kx = -\ln(k+1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \cdot \ln(k+1)$	3
	c	Die Tangente hat die Steigung $h_k'(0) = 10k$, die dazu senkrechte Gerade die Steigung $-\frac{1}{10k}$. Damit sind die beiden Schnittpunkte $\left(\frac{1}{10k} \mid 1\right)$ und $(-10k \mid 1)$. Deren Abstand ist $10k + \frac{1}{10k}$.	5
	d	Für die Funktion d mit $d(k) = 10k + \frac{1}{10k}$ gilt $d'(k) = 10 - \frac{1}{10k^2} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{10}$. Abstand: $d\left(\frac{1}{10}\right) = 2$	3
3	**a**	200 gibt die Masse zum Zeitpunkt des Unfalls in Milligramm an. $e^{-0{,}048} \approx 0{,}953$, d. h. die Masse nimmt in jedem Jahr um etwa 4,7 % ab.	3
	b	$200 \cdot e^{-0{,}048x} < 1 \Leftrightarrow e^{-0{,}048x} < \frac{1}{200} \Leftrightarrow -0{,}048x < -\ln 200$ liefert $x > \frac{\ln 200}{0{,}048} \approx 110{,}4$ Damit wird im Jahr 2096 erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein.	4

c	Streckungsfaktor in x-Richtung: 625 Streckungsfaktor in y-Richtung: 20,7 $k=\frac{-0{,}0464}{-0{,}0016}=29$	3
d	Der Faktor $1-e^{-0{,}0464x}$ hat für $x=0$ den Wert 0 und es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-0{,}0464x}\right)=1$. Der Faktor $e^{-0{,}0016x}$ hat für $x=0$ den Wert 1 und es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}0016x}=0$. Stellt man die Werte der beiden Faktoren für $x\in\mathbb{R}_0^+$ grafisch dar, so haben die beiden Graphen keine Sprungstellen und damit einen Schnittpunkt.	3
e	Die Masse des Americium-241 nimmt in den ersten 73 Jahren nach dem Reaktorunfall im Mittel pro Jahr um 2,4 Milligramm zu. Begründung: Die mittlere Änderung pro Jahr beträgt $\frac{a(73)-a(0)}{73-0}$, wobei $a(0)=0$ gilt. Bei der Änderung handelt es sich um eine Zunahme, da der Wert des gegebenen Terms positiv ist.	4
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I			I			X		
b	3	II	II		I		I		X	
c	3	III	III		II		IIÍ			X
2 a	3	I				I		X		
b	3					II			X	
c	5		II			II	II		X	
d	3		II			II			X	
3 a	3			I	I	I	I	X		
b	4		II	II		II			X	
c	3	III	III		III	III				X
d	3	III	III			II	II			X
e	4	II	III	III	II	II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.