

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

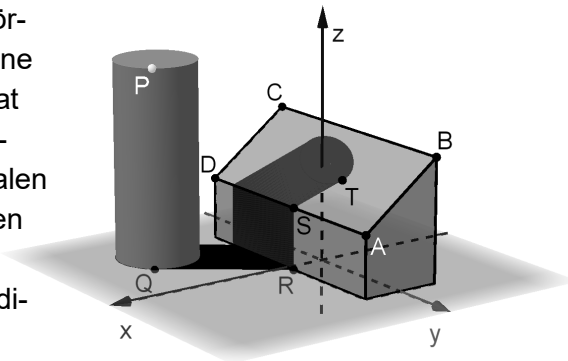
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt modellhaft ein zylinderförmiges Silo, dessen Schatten teilweise auf eine Scheune fällt. Das Silo ist 9,6 m hoch und hat einen Durchmesser von 4 m. Die beiden Gebäude stehen senkrecht auf einem horizontalen Untergrund, der im dargestellten kartesischen Koordinatensystem durch die xy -Ebene beschrieben wird. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.



Die Dachfläche der Scheune wird durch das Viereck mit den Eckpunkten $A(2|6|3)$, $B(-2|6|6)$, $C(-2|-6|6)$ und $D(2|-6|3)$ dargestellt.

a Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

b Das Viereck ABCD liegt in der Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $E : 3x + 4z = 18$)

c Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Dachfläche der Scheune gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

d Berechnen Sie das Volumen des Silos.

BE

3

3

2

2

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Das Sonnenlicht, das zu einem bestimmten Zeitpunkt auf die beiden Gebäude trifft, kann durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Der

Raubereich zwischen Silo und Scheune, der vom Sonnenlicht nicht erreicht wird, wird von mehreren Flächen begrenzt. Eine dieser Begrenzungsflächen wird durch das ebene Fünfeck PQRST beschrieben, wobei der Punkt T im Modell den Schatten von $P(7,2|-3,4|9,6)$ darstellt.

- e** Das Fünfeck PQRST liegt in der Ebene F. Begründen Sie ohne die Koordinaten eines weiteren Eckpunkts des Fünfecks zu bestimmen, dass F durch die Gleichung $3x + 4y = 8$ beschrieben wird. 4
- f** Berechnen Sie die Länge der Strecke \overline{ST} . 7
- g** Eine zweite Begrenzungsfläche des betrachteten Raumbereichs liegt im Modell in einer Ebene H: $3x + 4y = d$ mit $d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Wert von d. 4

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a $\overline{AB} = \overline{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{AB} \circ \overline{AD} = \overline{AB} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$	3
b $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ liefert das Gleichungssystem: I $x = 2 - 4r$ II $y = 6 - 12s$ III $z = 3 + 3r$ Aus I ergibt sich $r = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ und damit aus III $z = 3 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x + 4z = 18$.	3
c Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt $\cos \varphi = \frac{\vec{m} \circ \vec{n}}{ \vec{m} \vec{n} } = \frac{4}{5}$, d. h. $\varphi \approx 37^\circ$.	2
d $(2m)^2 \cdot \pi \cdot 9,6m \approx 121m^3$	2
e Es gilt $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, d. h. die Ebene, die durch die angegebene Gleichung dargestellt wird, ist parallel zu den Geraden, die das Sonnenlicht beschrei-	4

	ben, sowie zur Symmetrieachse des Zylinders, der das Silo darstellt. Zudem erfüllen die Koordinaten von P die angegebene Gleichung.	
f	<p>S hat die gleiche x-Koordinate und die gleiche z-Koordinate wie A. Da S in F liegt, gilt für seine y-Koordinate $3 \cdot 2 + 4y = 8$, d. h. $y = 0,5$.</p> <p>Gerade g durch P und T: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ -3,4 \\ 9,6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$</p> <p>Schnittpunkt von g und E: $3 \cdot (7,2 - 4t) + 4 \cdot (9,6 - 3t) = 18 \Leftrightarrow 60 - 24t = 18 \Leftrightarrow t = 1,75$, d. h. $T(0,2 1,85 4,35)$</p> <p>Damit: $\left \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1,85 \\ 4,35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} \right \approx 2,6$</p>	7
g	<p>Es handelt sich um die Begrenzungsfläche, die im Modell parallel zu F ist. Wegen $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$ und $\begin{pmatrix} 7,2 \\ -3,4 \\ 9,6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -6,6 \\ 9,6 \end{pmatrix}$ liegt der Punkt $(4,8 -6,6 9,6)$ in H.</p> <p>Damit: $d = 3 \cdot 4,8 - 4 \cdot 6,6 = -12$</p>	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I				I		X		
b	3					II			X	
c	2			I		II			X	
d	2					I		X		
e	4	III		II	II					X
f	7		II			II	II		X	
g	4		III	III		III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster² vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.