FORMELSAMMLUNG

BBS I Technik
Kaiserslautern

TECHNISCHES GYMNASIUM

Mathematik

FORMELSAMMLUNG

BBS I Technik
Kaiserslautern

Lineare Funktion

Normalform
$$f\ \ x\quad mx\quad b$$

Steigung
$$m\quad \frac{f\ \ x_2\quad f\ \ x_1}{x_2\quad x_1};\quad x_2\quad x_1\quad 0$$

Zweipunkteform
$$\frac{f\ \ x\quad f\ \ x_1}{x\quad x_1}\quad \frac{f\ \ x_2\quad f\ \ x_1}{x_2\quad x_1}\ ;\quad x\quad x_1\quad x_2\quad x_1\quad 0$$

Punktrichtungsform
$$f\ \ x\quad f\ \ x_1\quad m\ \ x\quad x_1\ ;\quad x\quad x_1\quad 0$$

senkrechte Geraden
$$m\ \ m\quad 1$$

Quadratische Funktion

allgemeine Form
$$f\ \ x\quad a_2x^2\quad a_1x\quad a_0$$

Nullstellen
$$f\ \ x\quad ax^2\quad bx\quad c \qquad\qquad f\ \ x\quad x^2\quad px\quad q$$

$$f\ \ x\quad 0$$

$$x_{1/2}\quad \frac{b\quad \sqrt{b^2\quad 4ac}}{2a} \qquad\qquad x_{1/2}\quad \frac{p}{2}\quad \sqrt{\frac{p}{2}^{\ 2}\quad q}$$

Diskriminante
$$\underbrace{D\quad b^2\quad 4ac \qquad\qquad D\quad \frac{p}{2}^{\ 2}\quad q}$$

$D\ \ 0$ es existieren 2 Lösungen
$D\ \ 0$ es existiert 1 Lösung (doppelte Nullstelle)
$D\ \ 0$ es existiert keine Lösung

SHARP EL 506W: MODE 2 2

Scheitelform
$$f\ \ x\quad a_2\ \ x\quad p^{\ 2}\quad q \qquad S\quad p/q$$

Linearfaktordarstellung
$$f\ \ x\quad a_2\ \ x\quad x_1\quad x\quad x_2 \qquad x_{1/2}: \text{Nullstellen}$$

Schnittpunkte zweier Graphen

Bedingung
$$f(x)\quad g(x)$$

Symmetrieeigenschaften

Achsensymmetrie
$$f\ \ x\quad f\quad x$$

Punktsymmetrie
$$f\ \ x\quad f\quad x$$

Ganzrationale Funktionen

Definition
$$f\ \ x\quad a_nx^n\quad a_{n\ 1}x^{n\ 1}\quad ...\quad a_1x^1\quad a_0$$

Nullstellen
$f\ \ x\quad 0$ für n 3 gilt: SHARP EL 506W: MODE 2 3

Linearfaktorzerlegung
$$f\ \ x\quad a_ng(x)\ \ (x\quad x_1)$$

Verhalten ganzrationaler Funktionen für x

$$\lim_{x}\ (a_nx^n\quad ...a_1x\quad a_0)\quad sign\ \ a_n \qquad \textit{für n gerade}$$

$$\lim_{x}(a_nx^n\quad ...a_1x\quad a_0)\quad sign\ \ a_n \qquad \textit{für n ungerade}$$

$$\lim_{x}\ (a_nx^n\quad ...a_1x\quad a_0)\quad 1\ \ sign\ \ a_n \qquad \textit{für n ungerade}$$

Mathematik

FORMELSAMMLUNG

BBS I Technik
Kaiserslautern

Umkehrfunktionen

$x_1 \quad x_2 \qquad f \; x_1 \quad f \; x_2$	Bedingung für umkehrbare Funktionen
$f^{\;1}: \quad f \; x \quad x$	Umkehrfunktion von f(x)
$D_{f^{\;1}} \quad W_f; \qquad W_{f^{\;1}} \quad D_f$	Definitionsbereich Wertebereich

Umkehrfunktion der allg. Potenzfunktion

$f \; x \quad a_n \; x \quad p^{\;n} \quad q$	$S_f \; \text{-}p/q$		allg. Potenzfunktion
$D_f = \mathbb{R}$	$W_f \quad \mathbb{R}$	n ungerade	Definitionsbereich
$D_f = \; x \quad \mathbb{R}/x \quad p$	$W_f \quad x \quad \mathbb{R}/x \quad q; a_n \quad 0$	n ungerade	Wertebereich
$f^{\;1} \; x \quad \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \sqrt[n]{x \quad q} \quad p$	$S_{f^{\;1}} \; q/ \quad p$		Umkehrfunktion
$D_{f^{-1}} \quad W_f \quad \mathbb{R}$	$W_{f^{\;1}} \quad D_f \quad \mathbb{R}$	n ungerade	Definitionsbereich
$D_{f^{-1}} \quad W_f \quad x \quad \mathbb{R}/x \quad q; a_n \quad 0$	$W_{f^{\;1}} \quad D_f \quad x \quad \mathbb{R}/x \quad p$	n ungerade	Wertebereich

Nichtrationale Funktionen

trigonometrische Funktionen

trigonometrische Funktionen

rechtwinkliges Dreieck:	trigonometrische Funktionen:	Periode
$\sin \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$	$f \; x \quad \sin x$	2
$\cos \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$	$f \; x \quad \cos x$	2
$\tan \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$	$f \; x \quad \tan x$	
$\cot \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$	$f \; x \quad \cot x$	

$$360 \qquad 2$$

$$\frac{}{360} \qquad \frac{}{180}$$

Umrechnung:
Grad in Bogenmaß

$$f \; x \quad \sin \; x \quad \frac{}{2} \quad \cos x$$

Zusammenhang zwischen sin- und cos-Fkt.

$$f \; x \quad a \sin \; d \; x \quad c \quad b$$

allgemeine sin-Funktion

- a Amplitudenänderung
- b Verschiebung in y-Richtung
- c Phasenverschiebung
- d Periodenänderung $\frac{\text{Periode}}{\text{d}}$

Mathematik

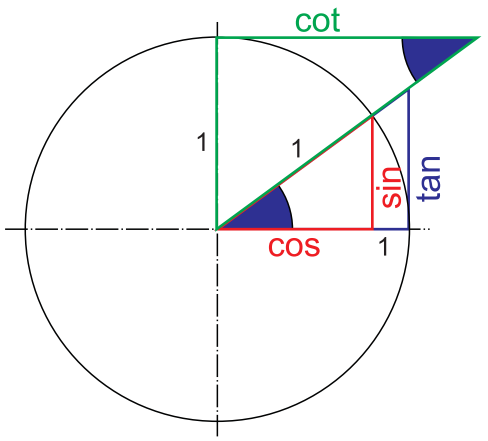
FORMELSAMMLUNG

BBS I Technik
Kaiserslautern

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen (Arkusfunktionen)

$\sin^{1}: f\ x \quad \arcsin x \quad D \quad 1,1\ , \quad W \quad \frac{}{2},\frac{}{2}$	Arkussinus-Funktion
$\cos^{1}: f\ x \quad \arccos x \quad D \quad 1,1\ , \quad W \quad 0,$	Arkuscosinus-Funktion
$\tan^{1}: f\ x \quad \arctan x \quad D \quad \mathbb{R}, \quad W \quad \frac{}{2},\frac{}{2}$	Arkustangens-Funktion
$\cot^{1}: f\ x \quad \mathrm{arc}\cot x \quad D \quad \mathbb{R}, \quad W \quad 0,$	Arkuscotangens-Funktion

trigonometrische Funktionen am Einheitskreis



$$\sin^2 \quad \cos^2 \quad 1$$

$$\tan \quad \frac{\sin}{\cos}$$

$$\cot \quad \frac{\cos}{\sin} \quad \frac{1}{\tan}$$

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

Potenz- und Wurzelrechnung

$$a^m \quad a^n \quad a^{m\ n}; \qquad \frac{a^m}{a^n} \quad a^{m\ n}; \qquad a^m{}^{\ n} \quad a^{m\ n}$$

Potenzgesetze

$$\sqrt[m]{a} \quad \sqrt[n]{a} \quad \sqrt[m\ n]{a^{m\ n}}; \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} \quad \sqrt[m\ n]{a^{m\ n}}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \quad \sqrt[m\ n]{a}; \quad \sqrt[n]{a^m} \quad a^{\frac{m}{n}}$$

Wurzelgesetze

Wachstums- Zerfallsfunktionen

Exponentialfunktion

$f\ x \quad c\ a^x \qquad a \quad 1; \qquad a \quad 0$

Definition

Eigenschaften

$f\ 0 \quad a^0 \quad 1 \qquad\qquad P\ 0/1$

$f\ x \quad a^x \qquad a \quad 0 \qquad f\ x$ steigt streng monoton

$f\ x \quad a^x \qquad 0 \quad a \quad 1 \qquad f\ x$ fällt streng monoton

$f\ x \quad a^x \qquad a \quad 0 \qquad f\ x$ ist nicht definiert

natürliche Exponentialfunktion (e-Fkt.)

$f\ x \quad c\ a^x \quad c\ e^{\ln a\ x}$

Zusammenhang zwischen Exponentialfunktion und e-Funktion

$\ln a \qquad\qquad f\ x \quad e^{\ x}$

0 Wachstumsprozesse

0 Zerfallsprozesse

Wachstums- und Zerfallsfunktionen

Mathematik

FORMELSAMMLUNG

BBS I Technik
Kaiserslautern

Logarithmenrechnung

Logarithmengesetze

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a\left(u^n\right) = n \cdot \log_a u$$

Logarithmen mit verschiedenen Basen

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

Logarithmusfunktion

Definition

$$f(x) = a^x \quad (a > 0;\ a \neq 1) \qquad f^{-1}(x) = \log_a x$$

Eigenschaften

$$f(x) = \log_a x \quad a > 0 \qquad \textit{monton steigend}$$

$$0 < a < 1 \qquad \textit{monton fallend}$$

Gebrochenrationale Funktionen

Definition

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0},\ x \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}}_{\text{Nennernullstellen}} \text{ mit k} \leq \text{m}$$

Eigenschaften gebrochenrationaler Funktionen

Definitionsbereich

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x / N(x) = 0\}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$$f(0) = \frac{Z(0)}{N(0)} \quad N(0) \neq 0$$

Nullstellen

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = 0 \Leftrightarrow Z(x) = 0 \wedge N(x) \neq 0$$

nicht definierte Stellen

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

$Z(x_1) \neq 0 \wedge N(x_1) = 0 \Rightarrow x_1$ ist n-fache Nullstelle mit:

Pole

$N(x) = (x - x_1)^n \cdot N_1(x) \Rightarrow x_1$ ist Polstelle mit VZW n ungerade
Polstelle ohne VZW n gerade

$$Z(x_1) = N(x_1) = 0$$

$$f(x) = \frac{Z_1(x_1)}{N_1(x_1)}$$

Lücken: $N_1(x_1) \neq 0;\ x_1$ ist eine Lücke

Pol: $N_1(x_1) = 0;\ x_1$ ist ein Pol

Mathematik

FORMELSAMMLUNG

BBS I Technik
Kaiserslautern

Verhalten für x ∞ (Asymptoten)

Asymptoten

$$f\ \ x \quad \frac{Z\ \ x}{N\ \ x} \quad \frac{a_n x^n \quad ...a_1 x \quad a_0}{b_m x^m \quad ...b_1 x \quad b_0}$$

$$m \quad n \qquad g\ \ x \quad 0 \text{ ist Asymptote}$$

$$m \quad n \qquad g\ \ x \quad \frac{a_n}{b_m} \text{ ist Asymptote}$$

Grenzfunktion

$m \quad n$ es existiert eine ganzrationale Grenzfunktion $g\ \ x$ vom Grad: $n - m$

Differenzialrechnung ganzrationaler Funktionen

Sekantensteigung

Sekantensteigung

$$m_s \quad \frac{f\ \ x \quad f\ \ x_0}{x \quad x_0} \quad \mathrm{x} \quad \mathrm{D} \quad x \quad x_0$$

Differenzenquotientenfunktion

Differenzenquotientenfunktion

$$m_s\ \ x \quad \frac{f\ \ x \quad f\ \ x_0}{x \quad x_0};\ \mathrm{x} \quad \mathbb{R} \setminus \ x_0$$

Differenzierbarkeit

Tangentensteigung

$$m_t \quad \lim_{x \quad x_0} m_s\ \ x \quad \lim_{x \quad x_0} \frac{f\ \ x \quad f\ \ x_0}{x \quad x_0} \qquad D \quad \mathbb{R} \setminus \ x_0$$

Ableitungsfunktion

$$f'\ \ x_0 \quad \lim_{x \quad x_0} \frac{f\ \ x \quad f\ \ x_0}{x \quad x_0} \quad x_0 \quad D_f$$

Ableitungsregeln

einfache Ableitungsregeln

$$f(x) \quad a \quad x^n \qquad\qquad f'\ \ x \quad n \quad a \quad x^{n \quad 1}$$

$$f(x) \quad c \qquad\qquad f'(x) \quad 0$$

$$f(x) \quad c \quad u(x) \qquad\qquad f'(x) \quad c \quad u'(x)$$

$$(x) \quad u(x) \quad v(x) \qquad\qquad f'(x) \quad u'(x) \quad v'(x)$$

Ableitungen höherer Ordnung

höhere Ableitungen

$$f' : x \quad f'(x)$$

$$f'' : x \quad f''(x)$$

$$f''' : x \quad f'''(x)$$

$$f^{(n)} : x \quad f^{(n)}(x)$$

Mathematik

Bedeutung der Ableitungen

Monotonie

Steigung

f´(x)>0 f ist **streng monoton wachsend**
f´(x)<0 f ist **streng monoton fallend**

Extremwerte

f´(x_0)=0 f hat ein lokales **Extremum**, x_0 heißt **Extremstelle** — lokaler Extremwert
f´(x_0)=0 f´´(x_0)>0 **Tiefpunkt** **T(x_0/f(x_0)),** — lokales Minimum
f´(x_0)=0 f´´(x_0)<0, **Hochpunkt** **H(x_0/f(x_0)).** — lokales Maximum

Krümmung

Krümmung

f´´(x)>0 G_f ist **linksgekrümmt**
f´´(x)<0 G_f ist **rechtsgekrümmt**

Wendepunkte

Wendepunkt

f´´(x_0) = 0 f´´´(x_0) 0 f´´(x_0) ändert das Vorzeichen an der Stelle x_0**)**
Wendepunkt **W(x_0/f(x_0))**

Sattelpunkte

Sattelpunkt

f´(x_0)=0 f´´(x_0) = 0 f´´´(x_0) 0 f´´(x_0) ändert das Vorzeichen an der Stelle x_0)
Sattelpunkt **S(x_0/f(x_0))**

Tangentengleichung

Tangentengleichung

$$g\ x\quad f\ (x_0)\ x\quad x_0\ + f(x_0)$$

Ableitungsregeln

Produktregel

$$f\ x\quad u\ x\quad v\ x$$

$$f\ x\quad u\ x\ \ v\ x\quad u\ x\quad v\ x$$

Quotientenregel

$$f\ x\quad \frac{u\ x}{v\ x}$$

$$f\ x\quad \frac{u\ x\ \ v\ x\quad u\ x\quad v\ x}{v\ x^{\ 2}}$$

Kettenregel

$$f\ x\quad g\ \ h\ x$$

$$f\ x\quad g\ \ h\ x\quad h\ \ x$$

Kurvendiskussion

Lösungsschritte einer vollständigen Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich
2. Symmetrieeigenschaften
3. Achsenschnittpunkte
4. ggf. Pole, Lücken, Verhalten an den Polen
5. Verhalten für x , ggf. Asymptoten oder Grenzfunktion bestimmen
6. Ableitungen
7. Extremstellen und Monotonie
8. Wendestellen und Krümmung
9. Graph der Funktion

Extremwertaufgaben

Lösungsschritte

1. Aufstellen der Zielfunktion
2. Variablen benennen
3. Aufstellen der Nebenbedingungen
4. Einsetzen der Nebenbedingung in die Zielfunktion
5. Extremwerte der Funktion berechnen
6. ggf. Variablen berechnen

Integralrechnung

bestimmtes Integral

Definition

$$\lim_{n}\langle S_n\rangle \quad \lim_{n}\langle s_n\rangle \quad {}_{a}^{b}\ f(x)dx.$$

Eigenschaften des bestimmten Integrals:

Integrationsregeln

$${}_{a}^{a}\ f(x)dx \quad 0 \quad und \quad {}_{a}^{b}\ f(x)dx \quad - \ {}_{b}^{a}\ f(x)dx$$

$${}_{a}^{b}\ f(x) \quad g(x) \ dx \quad {}_{a}^{b}\ f(x)dx \quad {}_{a}^{b}\ g(x)dx$$

$${}_{a}^{b}\ k \ f(x)dx \quad k \ {}_{a}^{b}\ f(x)dx$$

$${}_{a}^{b}\ f(x)dx \quad {}_{a}^{c}\ f(x)dx \quad {}_{c}^{b}\ f(x)dx$$

Stammfunktion

$$\mathrm{F}\,(\mathrm{x}) \quad \mathrm{f(x)\ für\ alle\ x} \quad a,b \ .$$

Stammfunktion

$$f \ \ x \ dx \quad F \ \ x \quad C; \ C \quad \mathbb{R}$$

Integrationsregel für Potenzfunktionen

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}}dx \quad \frac{x^{n\ \ 1}}{n \ \ 1} \quad C; \quad n \quad \mathbb{N}$$

erweiterte Integrationsregel

$$\mathrm{x}^{\mathrm{a}}dx \quad \frac{x^{a\ \ 1}}{a \ \ 1} \quad C; \quad a \quad \mathbb{R}\setminus \quad 1$$

Flächenberechnung

Funktionsgraph verläuft oberhalb der x-Achse:

G_f verläuft oberhalb der x-Achse

$$A \quad {}_{a}^{b}\ f(x)dx \quad F(x)\ {}_{a}^{b} \quad F(b) \quad F(a)$$

Funktionsgraph verläuft unterhalb der x-Achse:

G_f verläuft unterhalb der x-Achse

$$\mathrm{A} \quad \left| {}_{\mathrm{a}}^{b}\ \mathrm{f}(x)dx \right| \quad \left| F(x)\ {}_{a}^{b} \right| \quad \left| F(b) \quad F(a) \right|$$

Funktionsgraph schneidet die x-Achse:

G_f schneidet die x-Achse

$$\mathrm{A}=\left| {}_{\mathrm{a}}^{x_1}\ \mathrm{f}(x)dx \right| \quad \left| {}_{x_1}^{x_2}\ \mathrm{f}(x)dx \right| \quad \ldots \quad \left| {}_{x_n}^{\mathrm{b}}\ \mathrm{f}(x)dx \right|; \ \mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n : \mathrm{Nullstellen\ von\ f}$$

Flächen zwischen den Graphen zweier Funktionen f(x) und g(x)

Fläche zwischen zwei Graphen

$$\mathrm{A} \quad \left| {}_{\mathrm{a}}^{x_1}\ \mathrm{f}(x) \quad g(x) \ dx \right| \quad \left| {}_{x_1}^{x_2}\ \mathrm{f}(x) \quad g(x) \ dx \right| \quad \ldots \quad \left| {}_{x_n}^{\mathrm{b}}\ \mathrm{f}(x) \quad g(x) \ dx \right|$$

Volumen von Rotationskörpern

Rotation um die x-Achse

$$V \ \ x \quad {}_{a}^{b}\ f \ \ x \ ^{2} dx$$

Hohlkörper

$$V \ \ x \quad {}_{a}^{b}\ f \ \ x \ ^{2} \quad g \ \ x \ ^{2} \quad dx$$

Rotation um die y-Achse

$$V \ \ x \quad {}_{a}^{b}\ f^{\ 1} \ x_1 \ ^{2} dx$$

Mathematik

Nichtrationale Funktionen

Exponentialfunktion

Definition und Eigenschaften

$f \; x \quad c \; a^{x}$	$D_f \quad \mathbb{R}; W_f \quad \mathbb{R}$
$f \; 0 \quad c \; a^{0} \quad c$	$P \; 0/c$ gehört zu allen Grafen
$f \; x \quad c \; a^{x} \quad 0$	keine Nullstellen
$\lim\limits_{x} a^{x} \quad 0\,!$	die x-Achse ist Asymptote

a>1	Wachstumsfunktion
0<a<1	Zerfallsfunktion
0<c<1	Stauchung
c>1	Streckung
$c \quad 0$	Spiegelung
$f \; x \quad c \; a^{x \; b} \quad d$	Verschiebung von G_f um b Einheiten in Richtung der x-Achse und um d Einheiten in Richtung der f x -Achse

Natürliche Exponentialfunktion

e-Funktion

$$f \; x \quad c \; a^{x} \qquad f \; x \quad c \; e^{\;x} \; mit \qquad \ln a$$

: Wachstums- oder Zerfallskonstante

0 Wachstums-

0 Zerfallsprozesse

Ableitung der e-Funktion

$f \; x \quad e^{x}$	$f \; x \quad e^{x}$	Ableitung
$f(x) \quad e^{u \; x}$	$f\,(x) \quad e^{u \; x} \quad u \quad x$	Kettenregel

Integration der e-Funktion

$e^{x}dx \quad e^{x} \quad C$	Grundintegral
$u \quad x \quad e^{u \; x}\, dx \quad e^{u \; x} \quad C$	Verkettung

Natürliche Logarithmusfunktion

Umkehrfunktion

$$f \; x \quad e^{x} \qquad f^{\;1} \; x \quad \ln x$$

Definition und Eigenschaften

$f \; x \quad \ln x \quad D_f \quad \mathbb{R}\;; \quad W_f \quad \mathbb{R}$	
$f \; 1 \quad \ln 1 \quad 0$	Nullstelle
$f \; e \quad \ln e \quad 1$	
$\lim\limits_{x \;\; 0} \ln x$	y-Achse ist senkrechte Asymptote
$\lim\limits_{x} \ln x$	

Ableitung der ln-Funktion

$f\quad x\qquad \ln x \qquad\qquad f\quad x\quad \frac{1}{x}$

Ableitung

$f\quad x\qquad \ln\left|u\quad x\right| \qquad\qquad f\quad x\quad \frac{1}{u\quad x}\quad u\quad x\qquad \frac{u\quad x}{u\quad x}$

Kettenregel

natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion

$\frac{1}{x}dx\qquad \ln\left|x\right|\;;x\qquad 0$

Grundintegral

$\frac{u\quad x}{u\quad x}\qquad \ln\left|u\quad x\right|\qquad C$

Verkettung

Näherungsweise Berechnung von Nullstellen

Newton Verfahren

$x_{n\quad 1}\qquad x_n\qquad \frac{f\quad x_0}{f\quad x_0}$

Iterationsvorschrift

Newton Verfahren mit SHARP EL-506W

1. MODE 0
2. Formel mit einer Variable eingeben
3. MATH
4. SOLV **0**
5. ENT
6. START? Anfangswert eingeben
7. ENT
8. *dx?* Wert (Genauigkeit) eingeben
9. ENT

SHARP EL-506W

Funktionenscharen

Ortskurven

Koordinaten der Ortspunkte $P_t(u\quad t\;/v\quad t\;)$

mit $x\qquad u\quad t$ und $f\quad x\qquad v\quad t$ folgt:

$t\qquad u\quad x$ in $v\quad t$ einsetzen:

$f_H\quad x\qquad v\quad u\quad x\qquad$ Ortskurve

Funktionsgleichung
der Ortspunkte

Mathematik

Trigonometrische Funktionen

Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Ableitung

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \cot x \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Integration trigonometrischer Funktionen

Grundintegrale

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln\left|\cos x\right| + C$$

$$\int \cot(x)\,dx = \ln\left|\sin\right| + C$$

Umkehrfunktionen

Definition

$f(x)$ sei eine umkehrbare Funktion, dann heißt die Funktion

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ Umkehrfunktion von } f(x).$$

$$D(f^{-1}) = W(f);\ W(f^{-1}) = D(f)$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Ableitungsregel

$f(x)$ sei umkehrbar und differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$,

dann gilt: $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ableitung der Arcusfunktionen

Ableitungen der Arcusfunktionen

$$f(x) = \arcsin(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D_{f'} =]-1;1[$$

$$f(x) = \arccos(x) \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D_{f'} =]-1;1[$$

$$f(x) = \arctan(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot}(x) \qquad f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$$

Arcusfunktionen als Stammfunktionen

Grundintegrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C_1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C = -\operatorname{arccot}(x) + C_1$$

Mathematik

Integrationsverfahren

Grund- oder Stammintegrale

Grundintegrale

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C; \quad a \neq -1$
2. $\int e^x dx = e^x + C;$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$
6. $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$
7. $\int tan(x)\, dx = -\ln|\cos(x)| + C$
8. $\int \cot(x)\, dx = \ln|\sin| + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos(x) + C$
13. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
14. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arc\,cot}(x) + C$

Integrationsregeln

Faktorregel

$$\int_a^b C \cdot f(x)\, dx = C \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

Summenregel

$$\int_a^b \left(f_1(x) + \ldots + f_n(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Vertauschungsregel

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Mathematik

Integration durch Substitution

Substitutionsverfahren

$I \; x \quad f \; g \; x \; dx$

1. Substitutionsgleichungen

$$z \; g \; x \; ; \qquad z \; \frac{dz}{dx} \; g \; x$$

$$dx \; \frac{dz}{g \; x}$$

2. Integralsubstitution, -berechnung

$$I \; z \quad h \; z \; dz \; H \; z \; C_1$$

3. Resubstitution

$$I \; x \quad H \; g \; x \quad C_1 \; F \; x \quad C$$

Wichtige Integralsubstitutionen

Integraltypen

Integraltyp	*Substitution*
$f \; ax \; b \; dx$	$z \; ax \; b$
$f \; x \; f \; x \; dx$	$z \; f \; x$
$g \; x \; f \; g \; x \; dx$	$z \; g \; x$
$\frac{f \; x}{f \; x} dx$	$z \; f \; x$
$\frac{g \; x}{f \; g \; x} dx$	$z \; g \; x$
$f \; x \; dx \quad g \; z \; f \; g \; z \; dx$	$x \; g \; z$
$f \; x; \sqrt{a^2 \; x^2} \; dx$	$x \; a \sin z$

Partielle Integration oder Produktintegration

partielle Integration

$$\overset{b}{\underset{a}{}} u \; v\,dx \quad u \; v \,\Big|_a^b \quad \overset{b}{\underset{a}{}} u \; v\,dx$$

Integration echt gebrochen rationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung

1. Schritt: Bestimmung des echt gebrochenrationalen Anteiles $r \; x$

2. Schritt: Partialbruchzerlegung von $r \; x$

$$r(x) \; \frac{Z(x)}{N(x)}$$

- 2.1. Bestimmung der Nennernullstellen
- 2.2. Partialbruchzerlegung von $r(x)$
- 2.3. Berechnung der Konstanten

3. Schritt: Integration der Partialbrüche

Vektorrechnung

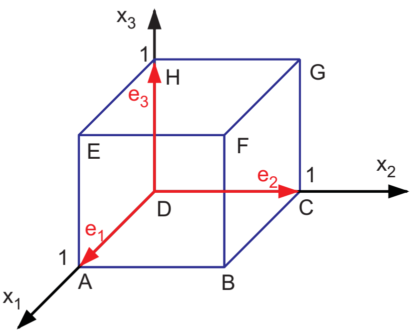
Grundlagen

Basisvektoren

Koordinatensystem

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 \quad \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} \;;\; \vec{e}_2 \quad \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix} \;;\; \vec{e}_3 \quad \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}$$



Ortsvektoren

$$\overrightarrow{OF} \quad \begin{matrix}f_1\\f_2\\f_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \quad \begin{matrix}f_1\\f_2\\f_3\end{matrix} \quad \vec{f}$$

Komponentendarstellung eines Vektors

$$\vec{a} \quad \underbrace{\vec{a}_{x1} \quad \vec{a}_{x2} \quad \vec{a}_{x3}}_{\text{Vektorkomponenten}} \quad a_{x1}\ \vec{e}_1 \quad \underbrace{a_{x2}}_{\text{Vektor koordinaten}}\ \vec{e}_2 \quad a_{x3}\ \vec{e}_3 \quad \underbrace{\begin{matrix}a_{x1}\\a_{x2}\\a_{x3}\end{matrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$$

Vektor durch zwei Punkte

Vektor durch zwei Punkte

$$\overrightarrow{AB} \quad \begin{matrix}b_1\\b_2\\b_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix}$$

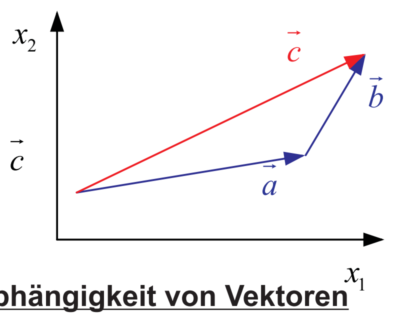
Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Vektoroperationen

$$\vec{a} \quad \begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix}$$

Addition/Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} \quad \vec{b} \quad \begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}b_1\\b_2\\b_3\end{matrix} \quad \begin{matrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{matrix} \quad \vec{c}$$



Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

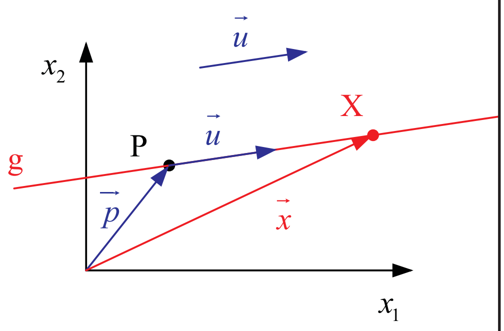
$$r_1\ \vec{a}_1 \quad r_2\ \vec{a}_2 \quad \ldots r_n\ \vec{a}_n \quad \vec{o} \qquad r_1, r_2, \ldots r_n \quad \mathbb{R}$$

genau eine Lösung mit $r_1 \quad r_2 \quad \ldots \quad r_n \quad 0$ besitzt.

Mathematik

Vektorielle Darstellung von Geraden

Punkt-Richtungsform einer Geraden



$$g:\ \vec{x}\quad \vec{p}\quad t\,\vec{u};\qquad t\quad \mathbb{R}$$

$\vec{p}$: Stützvektor, $\vec{u}$: Richtungsvektor

Geradengleichung in Parameterfrom

Gegenseitige Lage von Geraden

Für die Geraden g: $\vec{x}\quad \vec{p}\quad t\vec{u}$ und h: $\vec{x}\quad \vec{q}\quad s\vec{v}$ gilt:

g und h ...

schneiden sich in einem Punkt, wenn die Gleichung:

$\vec{p}\quad t\vec{u}\quad \vec{q}\quad s\vec{v}$ genau eine Lösung hat.

sind identisch, wenn die Gleichung:

$\vec{p}\quad t\vec{u}\quad \vec{q}\quad s\vec{v}$ unendlich viele Lösungen hat.

haben keinen gemeinsamen Punkt, wenn die Gleichung:

$\vec{p}\quad t\vec{u}\quad \vec{q}\quad s\vec{v}$ keine Lösung hat.

sind parallel, wenn die Gleichung:

$\vec{u}\quad s\vec{v}$ genau eine Lösung hat.

Lagebeziehungen von Geraden

Spurpunkte von Geraden

Die Schnittpunkte einer Geraden $g:\ \vec{x}\quad \vec{p}\quad t\vec{u}$

mit den 3 Koordinatenebenen nennt man Spurpunkte.

Spurpunkte

Vektorielle Darstellung von Ebenen

Punkt-Richtungsform einer Ebene

$$E:\ \vec{x}\quad \vec{p}\quad r\,\vec{u}\quad s\,\vec{v};\qquad r,s\quad \mathbb{R}$$

$\vec{p}$: Stützvektor; $\vec{u}$ und $\vec{v}$: Spannvektoren

Ebenengleichung in Parameterform

Mathematik

Koordinatengleichungen von Ebenen

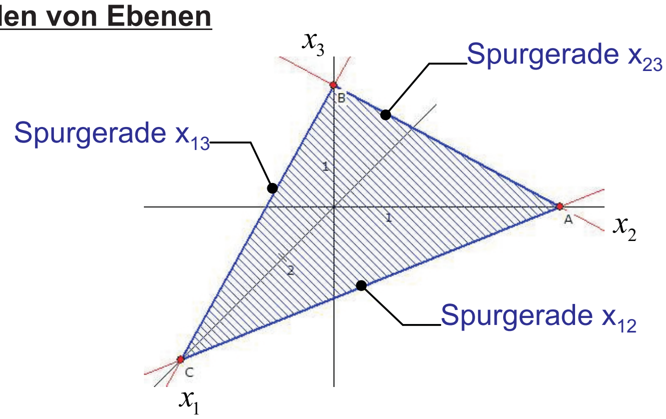
Ebenengleichung in Koordinatenform

$$\text{E: } ax_1 \quad bx_2 \quad cx_3 \quad d$$

einer der drei Koeffizienten a, b, c ist ungleich 0

Spurgeraden von Ebenen

Spurgeraden



Die Schnittgeraden einer Ebene $E: \vec{x} \quad \vec{p} \quad r\vec{u}+ \quad s\vec{v}$ mit den 3 Koordinatenebenen nennt man Spurgeraden s_{12}, s_{13} und s_{23}.

Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene

Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

Für eine Gerade g: $\vec{x} \quad \vec{p} \quad t\vec{u}$ und eine Ebene E: $\vec{x} \quad \vec{q} \quad r\vec{v} \quad s\vec{w}$ gilt:

g und E schneiden sich in einem Punkt Durchstoßpunkt ,
wenn die Gleichung $\vec{p} \quad t\vec{u} \quad \vec{q} \quad r\vec{v} \quad s\vec{w}$ genau eine Lösung hat.

g ist parallel zu E und liegt nicht in E,
wenn die Gleichung $\vec{p} \quad t\vec{u} \quad \vec{q} \quad r\vec{v} \quad s\vec{w}$ keine Lösung hat.

g liegt in E,
wenn die Gleichung $\vec{p} \quad t\vec{u} \quad \vec{q} \quad r\vec{v} \quad s\vec{w}$
unendlich viele Lösungen hat.

Gegenseitige Lage zweier Ebenen

Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Für für zwei verschiedene Ebenen E: $\vec{x} \quad \vec{p} \quad r\vec{u} \quad s\vec{v}$
und E*: $\overrightarrow{x*} \quad \overrightarrow{p*} \quad r*\overrightarrow{u*} \quad s*\overrightarrow{v*}$ gilt:

E und E* schneiden sich in einer Geraden Schnittgerade ,
wenn die Gleichung $\vec{x} \quad \vec{p} \quad r\vec{u} \quad s\vec{v} \quad \overrightarrow{p*} \quad r*\overrightarrow{u*} \quad s*\overrightarrow{v*}$
unendlich viele Lösungen hat.

E und E* sind zueinander parallel,
wenn die Gleichung $\vec{x} \quad \vec{p} \quad r\vec{u} \quad s\vec{v} \quad \overrightarrow{p*} \quad r*\overrightarrow{u*} \quad s*\overrightarrow{v*}$
keine Lösung besitzt.

Betrag (Länge) eines Vektors

Länge eines Vektors

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Länge des zu $\vec{a}$ gehörenden Pfeiles.

Der Betrag wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet.

Einheitsvektor

Ein Vektor mit $|\vec{a}|$ 1 nennt man Einheitsvektor.

$$\vec{a} \quad \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \qquad |\vec{a}| \quad \sqrt{a_1^2 \quad a_2^2}$$

$$\vec{a} \quad \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \qquad |\vec{a}| \quad \sqrt{a_1^2 \quad a_2^2 \quad a_3^2}$$

Skalarprodukt von Vektoren

Ist der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so heißt:

Skalarprodukt

$$\vec{a} \quad \vec{b} \qquad |\vec{a}| \quad |\vec{b}| \quad \cos$$

das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Rechengesetze für Skalarprodukte

Rechengesetze

$\vec{a} \quad \vec{b} \qquad \vec{b} \quad \vec{a}$ Kommutativgesetz

$\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \qquad \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{c}$ Distributivgesetz

$$\vec{a} \quad \vec{b} \qquad \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{a} \qquad \vec{b} \quad \vec{b}$$

Koordinatenform des Skalarproduktes

Koordinatenform

$$\vec{a} \quad \vec{b} \quad \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \qquad a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad a_3 \quad b_3$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Winkelberechnung

$$\arccos \frac{\vec{a} \quad \vec{b}}{|\vec{a}| \quad |\vec{b}|}$$

Orthogonale Vektoren

orthogonale Vektoren

$$\vec{a} \quad \vec{b} \quad 0 \qquad\qquad \vec{a} \quad \vec{b}$$

Mathematik

Normalenform der Ebenengleichung

Normalenform der Ebenengleichung in vektorieller Form

$$E: \quad \vec{x} \quad \vec{p} \quad \vec{n} \quad 0$$

$\vec{p}$: Sützpunkt, $\vec{n}$: Normalenvektor

Normalenform der Ebene in vektorieller Darstellung

Normalform der Ebenengleichung in Koordinatenform

$$\text{E:} \quad a_1x_1 \quad a_2x_2 \quad a_3x_3 \quad b$$

$$\vec{n} \quad \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \qquad \text{Normalenvektor der Ebene E.}$$

Normalenform der Ebene in Koodinatenform

Normalenvektor

Orthogonalität von Geraden und Ebenen

Zwei Geraden heißen zueinander orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind.

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad 0$

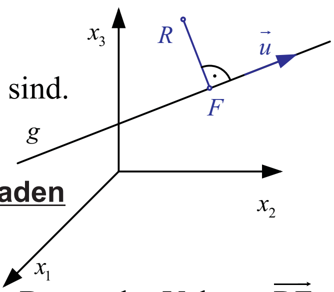
Eine Gerade und eine Ebene heißen zueinander orthogonal, wenn der Richtungsvektor der Geraden zu den beiden Spannvektoren der Ebene orthogonal ist.

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad 0 \quad \vec{u} \quad \vec{w} \quad 0$

senkrechte Geraden und Ebenen

Zwei Ebenen sind orthogonal, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal sind.

$\vec{n}_1 \quad \vec{n}_2 \quad 0$



Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der Abstand eines Punktes R von einer Geraden g: $\vec{x} \quad \vec{p} \quad s\vec{u}$ ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{RF}$, wobei F der Fußpunkt des Lotes von R auf g ist.

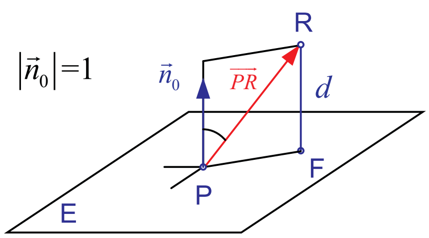
$$d \quad \left|\overrightarrow{RF}\right| \text{ mit } \overrightarrow{RF} \quad \vec{u} \quad 0 \text{ mit } F \quad \text{g} \qquad \vec{p} \quad s_F\vec{u} \quad \vec{r} \quad \vec{u} \quad 0$$

Abstand: Punkt zu Gerade

HESSE´sche Normalenform der Ebene

HESSE´sche Normalenform in vektorieller Darstellung

$$E: \qquad \vec{x} \quad \vec{p} \quad \vec{n}_0 \quad 0; \qquad |\vec{n}_0|=1$$



HESSE´sche Normalenform in vektorieller Darstellung

$$\left| \vec{r} \quad \vec{p} \quad \vec{n}_0 \right| \quad d$$

$d:$ senkrechter Abstand von R zur Ebene E

Abstand: Punkt zu Ebene

Mathematik

FORMELSAMMLUNG

BBS I Technik
Kaiserslautern

HESSE´sche Normalenform in Koordinatenform

HESSE´sche Normalenform in Koordinatendarstellung

$$E: \quad \frac{a_1x_1 \quad a_2x_2 \quad a_3x_3 \quad b}{\sqrt{a_1^2 \quad a_2^2 \quad a_3^2}} \quad 0$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Abstand: Punkt zu Ebene

Abstand d von R $r_1 / r_2 / r_3$ zur Ebene $E: \frac{a_1x_1 \quad a_2x_2 \quad a_3x_3 \quad b}{\sqrt{a_1^2 \quad a_2^2 \quad a_3^2}} \quad 0$

$$d \quad \left| \frac{a_1r_1 \quad a_2r_2 \quad a_3r_3 \quad b}{\sqrt{a_1^2 \quad a_2^2 \quad a_3^2}} \right|$$

Vektorprodukt

Definition: Vektorprodukt

$$\vec{a} \quad \vec{b} \quad \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_2b_3 \quad a_3b_2 \\ a_1b_3 \quad a_3b_1 \\ a_1b_2 \quad a_2b_1 \end{matrix}$$

Eigenschaften

Für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

1. $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$
2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem
3. Der Betrag von $\vec{c}$ ist ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

$$|\vec{c}| \quad |\vec{a} \quad \vec{b}| \quad |\vec{a}| \quad |\vec{b}| \quad \sin$$

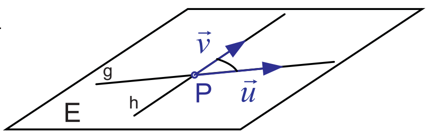
Abstand windschiefer Geraden

windschiefe Geraden

Sind g und h zwei windschiefe Geraden im Raum mit $g: \vec{x} \quad \vec{p} \quad r\vec{u}$ und $h: \vec{x} \quad \vec{q} \quad r\vec{v}$ und $\vec{n}_0$ ein Einheitsvektor mit $\vec{n}_0 \quad \vec{u}$ und $\vec{n}_0 \quad \vec{v}$, dann haben g und h den Abstand:

$$d \quad | \vec{q} \quad \vec{p} \quad \vec{n}_0 |$$

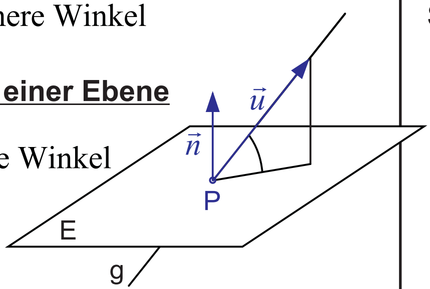
Schnittwinkel zweier Geraden



Schnittwinkel

$$\arccos \frac{|\vec{u} \quad \vec{v}|}{|\vec{u}| \quad |\vec{v}|}, \ \alpha \text{ ist der kleinere Winkel}$$

Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene



$$\arcsin \frac{|\vec{u} \quad \vec{n}|}{|\vec{u}| \quad |\vec{n}|}, \ \alpha \text{ ist der kleinere Winkel}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

$$\arccos \frac{|\vec{n}_1 \quad \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \quad |\vec{n}_2|}, \ \alpha \text{ ist der kleinere Winkel}$$

Mathematik

Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen

Wenn darstellbar als	dann Lösung mit ... versuchen	
nur y' ; y'' ; y''' etc	n-fache Integration	Sonderfall
$y \quad f(x)\ h(y)$	Trennung der Variablen	DGL 1. Ordnung
$y\,(x) \quad f(a \ \ x \quad b \ \ y(x) \quad c)$	Substitution: $u(x) \quad ax \quad by(x) \quad c$	
$y \ \ x \quad f \ \dfrac{y \ \ x}{x}$	Substitution: $u \quad \dfrac{y(x)}{x}$	
$y' \ \ f \ \ x \ \ \ y \quad S \ \ x$ mit S(x) Störfunktion		
$S \ \ x \quad 0$	Trennung der Variablen (s.o.)	
$S \ \ x \quad 0$	Variation der Konstanten $y \quad S \ \ x \ \ e^{f(x)dx}\,dx \quad C \quad e^{f(x)dx}$	
$y' \quad y\ f(x) \quad y^{n} \ \ g(x)$ n = 2 ; 3 ; 4 ; ...	Substitution: $z \quad y^{1 \ \ n}$	
DGL des exponentiellen Wachstums $f'(t) \quad k \ \ f(t)$	$f(t) \quad c \ \ e^{k\,t}$	
DGL des beschränkten Wachstums $f'(t) \quad k \ \ (S \quad f(t))$	$f(t) \quad S \quad c \ \ e^{\ \ k\,t}$	
DGL des logistischen Wachstums $f'(t) \quad k \ \ f(t) \ \ (S \quad f(t))$	$f(t) \quad \dfrac{a \ \ S}{a \quad (S \quad a) \ \ e^{\ \ S\,k\,t}}$ mit $a \quad f(0)$	
Sonderfall: $y'' \quad f(x, y')$	Substitution: $u \quad y'$	DGL 2. Ordnung
$y'' \ \ f(x) \ \ y' \ \ g(x) \ \ y \quad 0$	$y \quad e^{k\,x}$ über charakteristische Gleichung	

Mathematik