Kontrolliere mithilfe der folgenden Musterlösungen deine Lösungen der Testaufgaben. Führe dann eine erneute Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich Exponentialfunktionen und Logarithmen durch.

1 Bestand eines exponentiellen Wachstums

Gesucht ist der Bestand nach 24 Stunden, also muss x = 24 in die Funktionsgleichung eingesetzt werden:

$f(24) = 16\,000 \cdot 1{,}3^{24} \approx 8\,684\,812{,}33 \approx 8\,700\,000$

Nach 24 Stunden existieren also etwa 8 700 000 Bakterien.

Bestand f(x) nach x Zeiteinheiten
$f(x) = c \cdot a^x$
c ≙ Anfangsbestand
a ≙ Wachstumsfaktor

2 Berechnungen des Wachstumsfaktors bei exponentiellem Wachstum

Die Länge der Alge nimmt exponentiell zu, also ist der allgemeine Ansatz der Funktionsgleichung zur Beschreibung des Wachstums: $f(x) = c \cdot a^x$, wobei c der Anfangsbestand zum Zeitpunkt x = 0 ist.
Der Anfangsbestand ist gegeben, also c = 5.
Um a zu bestimmen, muss der zweite Punkt bzw. das zweite Wertepaar (3 | 8,64) in die Funktionsgleichung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} 8{,}64 &= 5 \cdot a^3 && |:5 \\ 1{,}728 &= a^3 && |\sqrt[3]{} \\ 1{,}2 &= a \end{aligned}$$

Der Wachstumsfaktor a beträgt also 1,2. Die Länge der Alge nimmt an jedem Tag um 20 % zu, da 1,2 = 1 + 0,2 = 100 % + 20 %.

Wachstumsfaktor berechnen
1. Anfangsbestand c und zweites Wertepaar in $f(x) = c \cdot a^x$ einsetzen.
2. Gleichung nach a auflösen.

Wachstumsfaktor a:
$a = 1 + p$;
p ≙ prozentuale Änderung.
Für p = 20 % gilt:
$a = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$.

3 Bestimmen der Zeit, bis ein bestimmter Bestand erreicht wurde

Die Temperatur des heißen Wassers nimmt in jeder Minute um 5 % ab, also beträgt der Wachstumsfaktor a = 1 − 0,05 = 0,95 = 95 %. Die Anfangstemperatur c = 100 °C ist gegeben.
Die Funktion f mit $f(x) = 100 \cdot 0{,}95^x$ beschreibt den gegebenen Sachverhalt. Da die Frage ist, nach wie vielen Minuten die Temperatur des Wassers auf 40 °C gesunken ist, wird f(x) = 40 in die Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0{,}95^x &= 40 && |:100 \\ 0{,}95^x &= 0{,}4 && |\log_{0,95} \\ x &= \log_{0,95}(0{,}4) \\ x &= \frac{\lg(0{,}4)}{\lg(0{,}95)} \approx 17{,}86 \approx 18 \end{aligned}$$

Der lg (x) ist der Logarithmus zur Basis 10 und kann mit dem Taschenrechner bestimmt werden (lg- oder log-Taste).
Nach knapp 18 Minuten ist das Wasser also auf 40 °C abgekühlt.
Dass die obige Umformung richtig ist, lässt sich mit dem Logarithmusgesetz begründen, denn

$$\log_b(a^r) = r \cdot \log_b(a)$$

$$\begin{aligned} 0{,}95^x &= 0{,}4 && |\lg \\ \lg(0{,}95^x) &= \lg(0{,}4) \\ x \cdot \lg(0{,}95) &= \lg(0{,}4) && |: \\ x &= \frac{\lg(0{,}4)}{\lg(0{,}95)} \approx 17{,}86 \approx 18. \end{aligned}$$

Exponentielle Abnahme
5 % Abnahme:
$a = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

Exponentialgleichung mit log lösen:
$a^x = y \quad |\log_a$
$x = \log_a(y)$
$x = \frac{\lg(y)}{\lg(a)}$

4 Funktionsgleichungen für exponentielles Wachstum aufstellen

Der allgemeine Ansatz für das exponentielle Wachstum ist: $f(x) = c \cdot a^x$, wobei c der Anfangsbestand und a der Wachstumsfaktor ist. Der Anfangsbestand c ist gegeben mit c = 2 Mio. und für den Wachstumsfaktor a gilt:
a = 1 + p = 1 + 3 % = 1 + 0,03 = 1,03.
Also wird durch die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot 1{,}03^x$ der Sachverhalt näherungsweise beschrieben, wobei x die vergangene Zeit in Jahren ist und f(x) die Bevölkerungszahl in Millionen.