5 Lineares oder exponentielles Wachstum

a) Bei dem in der Tabelle dargestellten Zerfall kann es sich nicht um linearen Zerfall handeln, da die Differenz zwischen den jeweils aufeinanderfolgenden y-Werten nicht identisch ist.

$f(2) - f(1) = 11{,}34 - 12{,}6 = -1{,}26$, aber
$f(3) - f(2) = 10{,}206 - 11{,}34 = -1{,}134 \neq -1{,}26$.

Falls es sich um exponentiellen Zerfall handelt, müssen alle Wertepaare zur selben Funktionsgleichung gehören. Diese Funktionsgleichung wird mithilfe von zwei Wertepaaren ermittelt. Welche beiden Wertepaare hierfür genommen werden, spielt keine Rolle. Hier werden die ersten beiden Wertepaare genommen.
$(1 \mid 12{,}6)$ wird in die allgemeine Gleichung $f(x) = c \cdot a^x$ eingesetzt:

$$12{,}6 = c \cdot a^1 \quad | :a$$
$$c = \frac{12{,}6}{a} \quad \text{Gleichung I}$$

$(2 \mid 11{,}34)$ sowie $c = \frac{12{,}6}{a}$ werden nun ebenfalls in die allgemeine Gleichung $f(x) = c \cdot a^x$ eingesetzt und die Gleichung wird nach a aufgelöst:

$$11{,}34 = \frac{12{,}6}{a} \cdot a^2 \quad | \text{ Vereinfachen}$$
$$11{,}34 = 12{,}6 \cdot a \quad | :12{,}6$$
$$a = 0{,}9$$

$a = 0{,}9$ in Gleichung I einsetzen:

$$c = \frac{12{,}6}{0{,}9} = 14$$

Also $f(x) = 14 \cdot 0{,}9^x$. Um zu überprüfen, ob das dritte und vierte Wertepaar auch zur Funktion f gehören, werden sie in f(x) eingesetzt:
$f(3) = 14 \cdot 0{,}9^3 = 10{,}206$ und $f(4) = 14 \cdot 0{,}9^4 = 9{,}1854$. Also wird durch die Tabelle das exponentielle Wachstum der Funktion f mit $f(x) = 14 \cdot 0{,}9^x$ beschrieben.
Den Wachstumsfaktor $a = 0{,}9$ erhält man ebenfalls durch das Teilen der jeweils aufeinanderfolgenden y-Werte (also z. B. $11{,}34:12{,}6 = 0{,}9$). Alle Quotienten der jeweils aufeinanderfolgenden y-Werte sind beim exponentiellen Wachstum gleich. Setzt man anschließend $a = 0{,}9$ sowie ein Wertepaar in die allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = c \cdot a^x$ ein, erhält man $c = 14$.

b) Bei diesem Prozess muss es sich um ein lineares Wachstum handeln, da sich das Wasservolumen in jeder Minute um denselben Summanden, nämlich 6 Liter, verändert bzw. vermehrt. Die absolute Änderung pro Zeitschritt bleibt also gleich. Offensichtlich ist 52 der Anfangswert zum Zeitpunkt $x = 0$. Da sich das Wasservolumen jede Minute um 6 Liter vermehrt, ist $m = 6$ die Wachstumsrate. Die Funktionsgleichung muss also lauten: $f(x) = 6x + 52$.

Lineares Modell
$f(t + 1) - f(t) = m$
$\Rightarrow$ f beschreibt ein lineares Wachstum

Funktionsgleichung
$f(x) = mx + n$
m: Wachstumsrate (absolute Änderung pro Zeitschritt)
n: Anfangswert zum Zeitpunkt $x = 0$

Exponentielles Modell
$f(t + 1) : f(t) = a$
$\Rightarrow$ f beschreibt ein exponentielles Wachstum

Funktionsgleichung
$f(x) = c \cdot a^x$
a: Wachstumsfaktor
($p = a - 1$ prozentuale Änderung pro Zeitschritt)
c: Anfangswert zum Zeitpunkt $x = 0$

Beachte:
$a^0 = 1$
$a^1 = a$

6 Potenzgesetze anwenden

a) Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Exponenten der Potenzen addiert werden und die Basis gleich bleibt, also:
$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$.

b) Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem die Basen der Potenzen multipliziert werden und der Exponent gleich bleibt, also:
$2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$.

c) Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Exponenten der Potenzen subtrahiert werden und die Basis gleich bleibt, also:
$a^6 : a^5 = a^{6-5} = a^1 = a$.

d) Potenzen werden potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden und die Basis gleich bleibt, also:
$(6^3)^2 = 6^{3 \cdot 2} = 6^6$.

Potenzgesetze

Potenzen mit gleicher Basis:
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ bzw.
$a^r : a^s = a^{r-s}$

Potenzen mit gleichem Exponenten:
$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ bzw.
$a^r : b^r = (a : b)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Potenzieren von Potenzen:
$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$