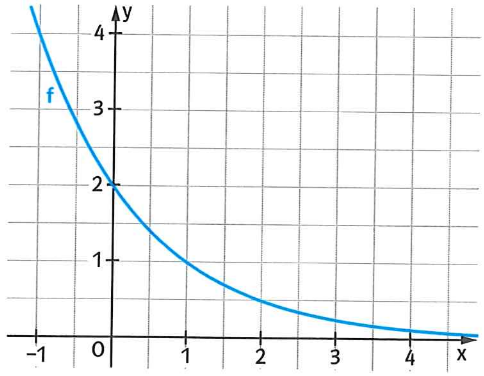
7 Graph und Gleichung einer Exponentialfunktion des Typs $f(x) = c \cdot a^x$

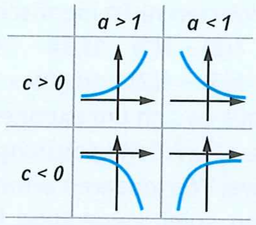
a) Um den Graphen der Funktion f skizzieren zu können, ist es sinnvoll, den generellen Verlauf einer Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = c \cdot a^x$ zu kennen (vgl. Rand).

Für die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$ gilt: $c = 2 > 0$ und $a = 0{,}5 < 1$, also sieht der grobe Verlauf so aus wie in der entsprechenden Figur auf der Randspalte ($c > 0$ und $0 < a < 1$). Außerdem geht der Graph von f durch die Punkte $P(0\,|\,2)$ und $Q(-1\,|\,4)$, denn $2 \cdot 0{,}5^0 = 2$ und $2 \cdot 0{,}5^{-1} = 4$. Hieraus ergibt sich der rechtsstehende Graph.



b) Der Graph von g ist vom Typ $c > 0$ und $a > 1$. Er geht durch die Punkte $P(0\,|\,0{,}5)$ und $Q(1\,|\,2)$, daher ist $c = 0{,}5$ und $a = 2 : 0{,}5 = 4$, also $g(x) = 0{,}5 \cdot 4^x$.

Exponentialfunktionen vom Typ $f(x) = c \cdot a^x$
$c \in \mathbb{R}$, $a > 0$



8 Potenzgleichung in Logarithmusgleichung umformen und umgekehrt

a) Die Potenzgleichung $a^x = b$ besitzt die Lösung $x = \log_a(b)$.
Also lässt sich die Gleichung $3^5 = 243$ mithilfe des Logarithmus schreiben als $\log_3(243) = 5$.

b) Die Logarithmusgleichung $\log_{49}(7) = \frac{1}{2}$ lässt sich in der Potenzschreibweise schreiben als $49^{\frac{1}{2}} = 7$ bzw. $\sqrt{49} = 7$.

Logarithmus
$a^x = b$ $(a > 0)$
besitzt die Lösung
$x = \log_a(b)$.

Es gilt:
$\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)} = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$

9 Logarithmen im Kopf bestimmen

a) Um den Logarithmus von 8 zur Basis 2 im Kopf zu bestimmen, überlegt man sich, wie man 8 als Potenz von 2 darstellen kann.
Da $8 = 2^3$, gilt $\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$.

b) Um den Logarithmus von $\frac{1}{3}$ zur Basis $\frac{1}{9}$ im Kopf zu bestimmen, überlegt man sich, wie man $\frac{1}{3}$ als Potenz von $\frac{1}{9}$ darstellen kann.
Da $\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$, gilt
$\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{9}}\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

$\log_a(b) = ?$
Überlege, ob sich b als Potenz von a darstellen lässt, also $a^? = b$.

Beachte:
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

10 Logarithmusgesetze anwenden

a) Nach der Produktregel für Logarithmen gilt:

$$\log_3(6) + \log_3(12) + \log_3\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$= \log_3\left(6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{8}\right)$$
$$= \log_3(9)$$
$$= 2$$

b) Nach der Quotientenregel für Logarithmen gilt:

$$\log_5(35) - \log_5(7)$$
$$= \log_5\left(\frac{35}{7}\right)$$
$$= \log_5(5)$$
$$= 1$$

c) Nach der Potenzregel für Logarithmen gilt:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^8\right)$$
$$= 8 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= 8 \cdot 2$$
$$= 16$$

Logarithmusgesetze

1. Produktregel
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

2. Quotientenregel
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

3. Potenzregel
$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$