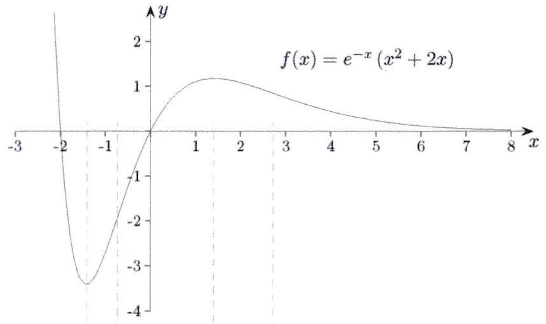
# $e$-Funktionen

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x)$ .
   Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Monotonie und Krümmung.
   Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

   *Lösung:*




$f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 2)$

$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 2)$

*fallend* $-\sqrt{2}$ *steigend* $\sqrt{2}$ *fallend*

*linksgekrümmt* $1 - \sqrt{3}$ *rechtsgekrümmt* $1 + \sqrt{3}$ *linksgekrümmt*

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 5xe^{-\frac{x}{2}}$ .

   a) Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung.
   Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
   ( *Zur Kontrolle:* $f'(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} \cdot (1 - \frac{x}{2})$ )

   b) Der Graph von $f$, die $x$-Achse und die Gerade $x = 5$ begrenzen eine Fläche.
   Berechnen Sie deren Inhalt.

   c) Der in b) betrachteten Fläche ist ein rechtwinkliges Dreieck einbeschrieben. Seine Eckpunkte sind $O(0\,|\,0)$, $P(x\,|\,f(x))$ sowie $Q(x\,|\,0)$ ($Q$ ist der Fußpunkt des Lotes von $P$ auf die $x$-Achse.). Rotiert dieses rechtwinklige Dreieck um die $x$-Achse, so entsteht ein gerader Kegel.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P$ für den Fall, dass das Volumen des Kegels maximal wird.

   d) Gegeben sei die Funktion $g$ mit $g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

   Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt: $g^{(n)}(x) = (-\frac{1}{2})^n e^{-\frac{x}{2}}(x - 2n)$



Lösung:

2. a) Nullstellen: $x = 0$

   Extrema: $f$ monoton steigend für $x < 2$, $f$ monoton fallend für $x > 2$ $\Longrightarrow$ $Max(2\,|\,\frac{10}{e})$

   Wendepunkte: $f''(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} \cdot (\frac{x}{4} - 1)$

   Krümmung: $f$ rechtsgekrümmt für $x < 4$, $f$ linksgekrümmt für $x > 4$ $\Longrightarrow$ $W\left(4\,|\,\frac{20}{e^2}\right)$

   Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

   b) $A = 5 \cdot \int_0^5 xe^{-\frac{x}{2}}\,dx = 5 \cdot \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x + 2)\right]_0^5 = 10\,(2 - \frac{7}{e^{2,5}}) = 14,25$ (partielle Integration)

   c) $V(x) = \frac{25}{3}\,\pi\,x^3 e^{-x}$ $(0 < x \leq 5)$, $V'(x) = \frac{25}{3}\,\pi\,e^{-x}(3x^2 - x^3)$, Maximum an der Stelle $x = 3$ .

   d) Induktionsanfang $n = 1:$ $g^{(1)}(x) = g'(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}(x - 2)$

   Induktionsschritt von $n$ auf $n+1:$ $g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)}(x))' = ((-\frac{1}{2})^n e^{-\frac{x}{2}}(x - 2n))' = \ldots$
   $= (-\frac{1}{2})^{n+1} e^{-\frac{x}{2}}(x - 2(n+1))$