Sauerstoffproduktion

4. Gegeben ist die Funktion $f(t) = 2t \cdot e^{-0{,}02t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie,
bestimmen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$,
ermitteln Sie die Extrem- und Wendestellen von f.

b) Wie ist das a zu wählen, damit $F(t) = a \cdot e^{-0{,}02t^2}$ eine Stammfunktion von f ist.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der t-Achse, dem Graphen von f und der Geraden mit $t = 10$ eingeschlossen wird.

c) Für $t \leq 0 \leq 15$ beschreibt f (t) modellhaft die momentane Sauerstoffproduktion einer Buche an einem Sommertag mit 15 Stunden Sonnenscheindauer ab dem Sonnenaufgang $t = 0$, wobei man t in Stunden und f (t) in m^3 pro Stunde angibt. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f in diesem Sachzusammenhang. Zu welchem Zeitpunkt liegt die stärkste Abnahme der momentanen Sauerstoffproduktion vor?

d) Interpretieren Sie den bei b) berechneten Flächeninhalt in diesem Sachzusammenhang. Bestimmen Sie, wie viele Sonnenstunden vergangen sind, bis die Buche insgesamt $20 m^3$ Sauerstoff produziert hat.

e) Eine Funktion g soll nun die momentane Sauerstoffproduktion in m^3 pro Stunde an einem sonnigen Herbsttag beschreiben. Die Sonnenscheindauer beträgt 12 Stunden und die Intensität der auf die Blätter treffenden Strahlung ist geringer als an einem Sommertag. Damit verbunden ist eine geringere Sauerstoffproduktion. Das Maximum wird nach 4 Stunden $t = 4$ erreicht, also 4 Stunden nach Sonnenaufgang $t = 0$.
Begründen Sie, wie man den Funktionsterm von f verändern kann, damit man den Term einer möglichen Funktion g erhält.

Sauerstoffproduktion Ergebnisse

4. Gegeben ist die Funktion $f(t) = 2t \cdot e^{-0{,}02t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie,
bestimmen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$,
ermitteln Sie die Extrem- und Wendestellen von f.

Graph punktsymmetrisch
$f(t) \to 0$
$f'(t) = (2 - 0{,}08t^2) \cdot e^{-0{,}02t^2}$
$f''(t) = (-0{,}24t + 0{,}0032t^3) \cdot e^{-0{,}02t^2}$
$t_{min} = -5$, $t_{max} = 5$
Wendestellen: $t_{w1} = 0$, $t_{w2} = 8{,}66$, $t_{w3} = -8{,}66$

b) Wie ist das a zu wählen, damit $F(t) = a \cdot e^{-0{,}02t^2}$ eine Stammfunktion von f ist. $a = -50$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der t-Achse, dem Graphen von f und der Geraden mit $t = 10$ eingeschlossen wird. $A = 43{,}23$ FE

c) Für $t \leq 0 \leq 15$ beschreibt f (t) modellhaft die momentane Sauerstoffproduktion einer Buche an einem Sommertag mit 15 Stunden Sonnenscheindauer ab dem Sonnenaufgang $t = 0$, wobei man t in Stunden und f (t) in m^3 pro Stunde angibt. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f in diesem Sachzusammenhang. Zu welchem Zeitpunkt liegt die stärkste Abnahme der momentanen Sauerstoffproduktion vor?

8 Stunden 40 Minuten

d) Interpretieren Sie den bei b) berechneten Flächeninhalt in diesem Sachzusammenhang. Bestimmen Sie, wie viele Sonnenstunden vergangen sind, bis die Buche insgesamt $20 m^3$ Sauerstoff produziert hat.

Innerhalb der ersten 10 Stunden wurden $43{,}23 m^3$ Sauerstoff produziert.
$F(b) - F(0) = 20 \Rightarrow b = 5{,}05$

e) Eine Funktion g soll nun die momentane Sauerstoffproduktion in m^3 pro Stunde an einem sonnigen Herbsttag beschreiben. Die Sonnenscheindauer beträgt 12 Stunden und die Intensität der auf die Blätter treffenden Strahlung ist geringer als an einem Sommertag. Damit verbunden ist eine geringere Sauerstoffproduktion. Das Maximum wird nach 4 Stunden $t = 4$ erreicht, also 4 Stunden nach Sonnenaufgang $t = 0$.
Begründen Sie, wie man den Funktionsterm von f verändern kann, damit man den Term einer möglichen Funktion g erhält.

Der Graph von f wird in t- und in y-Richtung gestaucht: $g(x) = \frac{3}{4} \cdot f(\frac{5}{4}t)$

alternativ:
Ansatz: $g(t) = 2t \cdot e^{-at^2}$
$g'(t) = (2 - 4at^2) \cdot e^{-at^2}$
$g'(4) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{32}$