6. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x^2 - t^2)e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Graph sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrema und bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \infty$.
Auf welcher Kurve C liegen die Maxima aller K_t?
Welche Punkte von C sind nicht Maxima einer Kurve K_t?

Zur Kontrolle: $f_t'(x) = -2xe^{-x^2}(x^2 - 1 - t^2)$

b) Die Tangenten in den Schnittpunkten von K_t mit der x-Achse und die x-Achse schließen ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h(t)$ ein. Für welches t ist $h(t)$ maximal?

6. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = (x^2 - t^2)e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Graph sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_t auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Extrema und bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \infty$.

Graph achsensymmetrisch

Nullstellen: $x_{1,2} = \pm t$

Max $\left(\pm\sqrt{1+t^2} \mid e^{-1-t^2}\right)$

Auf welcher Kurve C liegen die Maxima aller K_t? $y = e^{-x^2}$

Welche Punkte von C sind nicht Maxima einer Kurve K_t? $-1 \le x \le 1$

Zur Kontrolle: $f_t'(x) = -2xe^{-x^2}(x^2 - 1 - t^2)$

b) Die Tangenten in den Schnittpunkten von K_t mit der x-Achse und die x-Achse schließen ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h(t)$ ein. Für welches t ist $h(t)$ maximal?

$y = 2te^{-t^2}(x - t)$

$h(t) = 2t^2e^{-t^2}, \quad t = 1$