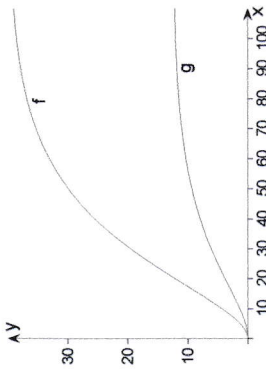


Buchenwachstum



12. Das Wachstum einer Buche kann durch

$$f(x) = 40 \left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right)^2 \quad x \geq 0$$

modelliert werden, Baumhöhe $f(x)$ in m, Zeit x in Jahren.

a) bis d) sollen ohne GTR bearbeitet werden.

a) Welche maximale Höhe hat die Buche?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 40$$

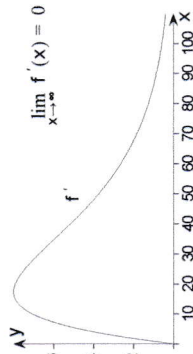
b) Zeigen Sie, dass die Wachstumsgeschwindigkeit durch

$$f'(x) = \frac{16}{5} \left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right) e^{-\frac{1}{25}x}$$

erfasst wird.

Wohin strebt sie für $x \rightarrow \infty$?

Skizzieren Sie den Grafen von f' .



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

An welcher Stelle ist die Wachstumsgeschwindigkeit maximal?

Zwischenergebnis:

$$f''(x) = \frac{16}{125} \left(2e^{-\frac{1}{25}x} - 1\right) e^{-\frac{1}{25}x}$$

$$25 \ln(2) = 17.33$$

c) Die Wachstumsgeschwindigkeit einer zweiten Buche ist durch

$$g(x) = e^{-\frac{1}{25}x} - e^{-\frac{2}{25}x}$$

gegeben.

Für diese Buche gilt auch $g(0) = 0$.

Vergleichen Sie die Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen und

treffen Sie eine Aussage über ihr unterschiedliches Wachstum. $f(x) = \frac{16}{5}g'(x)$, siehe Grafik

d) Ermitteln Sie einen Funktionsterm für $g(x)$.

$$g(x) = -25e^{-\frac{1}{25}x} + \frac{25}{2}e^{-\frac{2}{25}x} + \frac{25}{2}$$

e) Zeichnen Sie den Grafen von g .

f) Nach welcher Zeit hat die erste Buche die halbe Baumhöhe erreicht?

nach 30,7 Jahren

g) Nach welcher Zeit beträgt die Höhendifferenz der beiden Buchen 10 m?

nach 23,1 Jahren

Konzentration eines Medikamentes

Die Medikamenten-Konzentration im Blut wird durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = kx \cdot e^{k-x}, \quad k > 0$$

modelliert (x Zeit in Stunden nach der Einnahme, $f_k(x)$ in mg/l).

Der Parameter k erfasst die Menge eines Zusatzstoffes, der den Konzentrationsverlauf beeinflusst.



a) Zu sehen sind die Graphen für $k \in \{0.25, 0.5, 0.85, 1, 3.5\}$.

Ordnen Sie die Graphen dem jeweiligen k begründet zu und beschreiben Sie den Einfluss von k .

b) Bestimmen Sie für die Funktionenschar die Hochpunkte.

c) Welche Werte sind für k zulässig, damit die maximale Konzentration des Medikaments den Wert 1 keinesfalls überschreitet?

d) Für welches k beträgt die maximale Konzentration 0.5?

Für welchen Zeitraum beträgt die Konzentration dann mindestens 0.25 mg/l ?

e) Wie sind a und b zu wählen, damit $F_k(x) = (ax + b)e^{k-x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.

Bestimmen Sie für $k = 0.25$ die durchschnittliche Konzentration für die ersten 12 Stunden.