Besondere Integrale

$$\boxed{\int e^x \, dx = e^x + c}$$

$$\int e^u \, dx = \frac{1}{u'} \cdot e^u + c$$

Wenn u ein ganzrationaler Ausdruck 1. Grades

Einfache Integrale:

$$\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c \qquad \int \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c$$

Besteht der Integrand (das was hinter $\int$-Zeichen steht) aus einer einfachen Grundfunktion (bspw. e, sin, cos, $\sqrt{\ }$, etc.) mit einen einfachen Argument (das was in Klammer, im Exponent, ... steht; hier: 2x) kann die Funktion einfach integriert werden.

nur mit einfachen x, kein x^2 o.ä.

$$\int \text{Grundfunktion(irgendwas)} \, dx = \frac{1}{\text{Ableitung des irgendwas}} \cdot \text{Stammfunktion Grundfunktion(irgendwas)}$$

$$\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c \qquad \int \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c$$

Substitution:

Einfache Integrale mit komplizierteren Argument/Verkettungen/bestimmte Produkte

$$\int (3x+5)^4 \, dx = \frac{1}{15} (3x+5)^5 + c \qquad \int x \cdot \sin(x^2) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$$

$$\int \underbrace{(3x+5)^4}_{\text{kompliziertes Argument}} dx = \frac{1}{15}(3x+5)^5 + c$$

Verkettung $(3x+5)^4$ statt x^4

1. Festlegen, was ersetzt werden muss (was in der Klammer steht)

sei: $z = 3x+5$

2. z ableiten

$$z' = \frac{dz}{dx} = 3$$

3. z' nach dx umstellen

$$dx = \frac{dz}{3}$$

$$\int (3x+5)^4 \, dx = \int z^4 \frac{dz}{3} = \int \frac{1}{3} z^4 \, dz$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot z^5 + c = \frac{1}{15} z^5 + c = \frac{1}{15}(3x+5)^5 + c$$

$$\int x \cdot \sin(x^2) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$$

↳ wenn das Produkt die Form $\int \underbrace{u'(x)}_{\text{ist Ableitung von } u(x)} \cdot v(u(x)) \, dx$

sei: $z = x^2$

$$z' = \frac{dz}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{dz}{2x}$$

$$\int x \cdot \sin(x^2) \, dx = \int x \cdot \sin(z) \frac{dz}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2x} \cdot x \sin(z) \, dz = \int \frac{1}{2} \sin(z) \, dz$$

$$= -\frac{1}{2} \cos(z) + c = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$$

sonstige Produkte → Produktintegration bzw partielle Integration

$$\boxed{\text{Regel: } \int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx}$$

$$\int x \cdot e^x \, dx$$

Festlegen von u nach folgender Regel:

Logarithmisch (ln, lg, log)
Invers trigonometrisch (arccos, arcsin, ...)
Algebraisch (x, x^2+x-2)
Trigonometrisch (sin, cos, ...)
Exponentiell (e^x, a^x)

gut → schlecht

hier: $\int x \cdot e^x \, dx$

→ $u = x$!

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$u = x$ $\qquad u' = 1$

$v = e^x$ $\qquad v' = e^x$

Brüche der Form $\frac{u'}{u}$:

ungefähr die Ableitung von

$$\int \frac{u'}{u} \, dx = \ln(|u|) + c$$

BSP: ungefähr die Ableitung von

$$\int \frac{x^2}{x^3-1} \, dx = \ln(|x^3-1|) + c$$

anwenden der Regel mit Probe

Probe (ableiten)

$\frac{3x^2}{x^3-1}$

noch nicht ganz richtig

nächster Versuch: $\int \frac{x^2}{x^3-1} \, dx = \frac{1}{3} \ln(|x^3-1|) + c$

Probe (ableiten)

$\frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{x^2}{x^3-1}$

richtig!

BSP2:

ungefähr die Ableitung von

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+1} \, dx = \ln(|x^2+3x+1|) + c$$

Probe (ableiten)

$\frac{2x+3}{x^2+3x+1}$

ungefähr die Ableitung von

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+1}\,dx = \ln(|x^2+3x+1|)+c$$

x^2+3x+1

noch nicht ganz richtig

Probe (ableiten)

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+1}\,dx = 2\cdot\ln(|x^2+3x+1|)+c$$

$$2\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+1} = \frac{4x+6}{x^2+3x+1}$$

richtig