Übungsaufgaben zu Kurvendiskussion von gebrochenrationalen Funktionen

Diskutieren Sie folgende gebrochenrationale Funktionen hinsichtlich des Definitions- und Wertebereichs, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, mögliche Extrempunkte sowie Wendepunkte. Geben Sie weiterhin Polstellen und Asymptoten an und skizzieren Sie anschließend den Graphenverlauf.

1. $f(x) = \frac{x^3}{1-2x^2}$
2. $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-9}$
3. $f(x) = \frac{x^3-2x^2+4x}{x-1}$
4. $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$
5. $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$
6. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.
7. $f(x) = \frac{1}{2+4x^2}$
8. $f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}$
9. $f(x) = \frac{x^3-8}{4x}$

Anmerkung: Auf den Nachweis für Wendepunkte kann bei Aufgabe 3 verzichtet werden.

Lösungen

1. DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$ WB: $y \in \mathbb{R}$

   Ableitungen: $f'(x) = \frac{-2x^4+3x^2}{(1-2x^2)^2}$; $f''(x) = \frac{4x^3+6x}{(1-2x^2)^3}$; $f'''(x) = \frac{24x^4+72x^2+6}{(1-2x^2)^4}$

   Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0;0)$

   Nullstellen: $S_Y(0;0)$

   Symmetrie: Punktsymmetrie

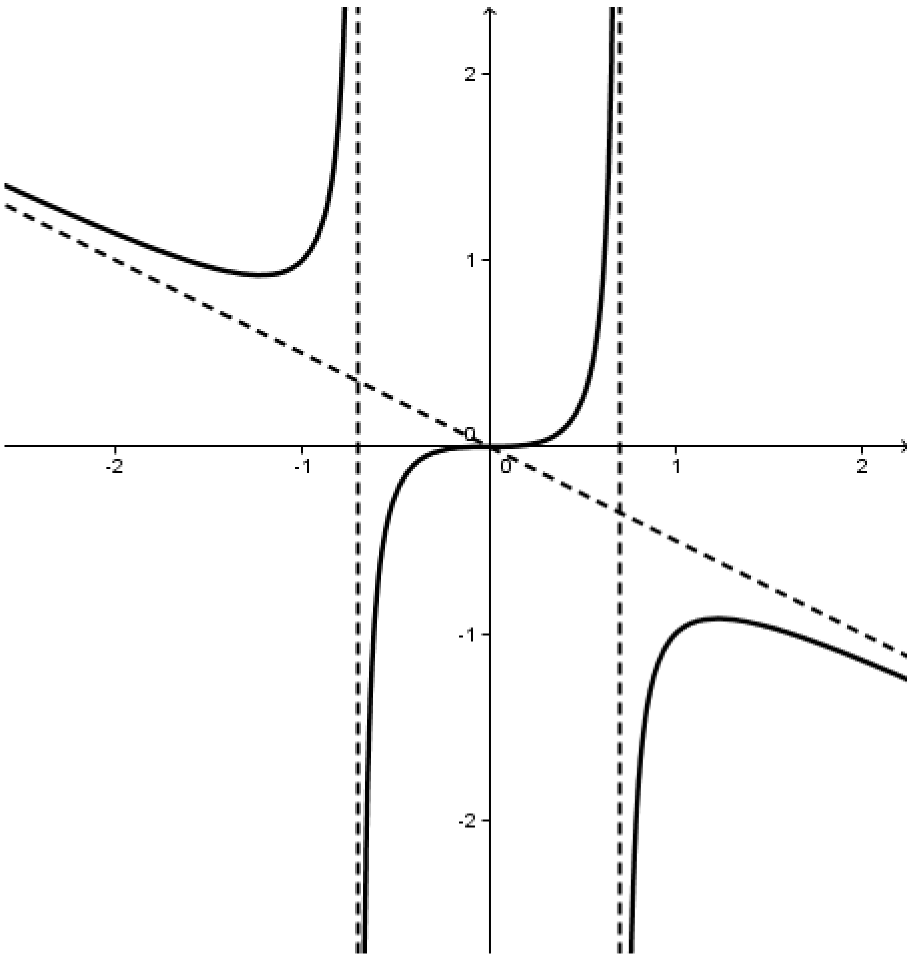
   Extrempunkte: Tiefpunkt $T(1{,}22; -0{,}92)$ Hochpunkt $H(-1{,}22; 0{,}92)$

   Wendepunkte: Sattelpunkt bei $S_Y(0;0)$

   Polstellen: $x_{p1} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $x_{p2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ sind Polstellen der Funktion

   Asymptoten: $g(x) = -\frac{1}{2}x$ ist Asymptote der Funktion

   Schaubild:



2. DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge y \geq -\frac{2}{9} \wedge y < -1$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{14x}{(x^2-9)^2}$; $f''(x) = \frac{-42x^2-126}{(x^2-9)^3}$; $f'''(x) = \frac{168x^3+1512x}{(x^2-9)^4}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y\left(0; -\frac{2}{9}\right)$

Nullstellen: $N_1(\sqrt{2}; 0)$ und $N_2(-\sqrt{2}; 0)$

Symmetrie: Achsensymmetrie

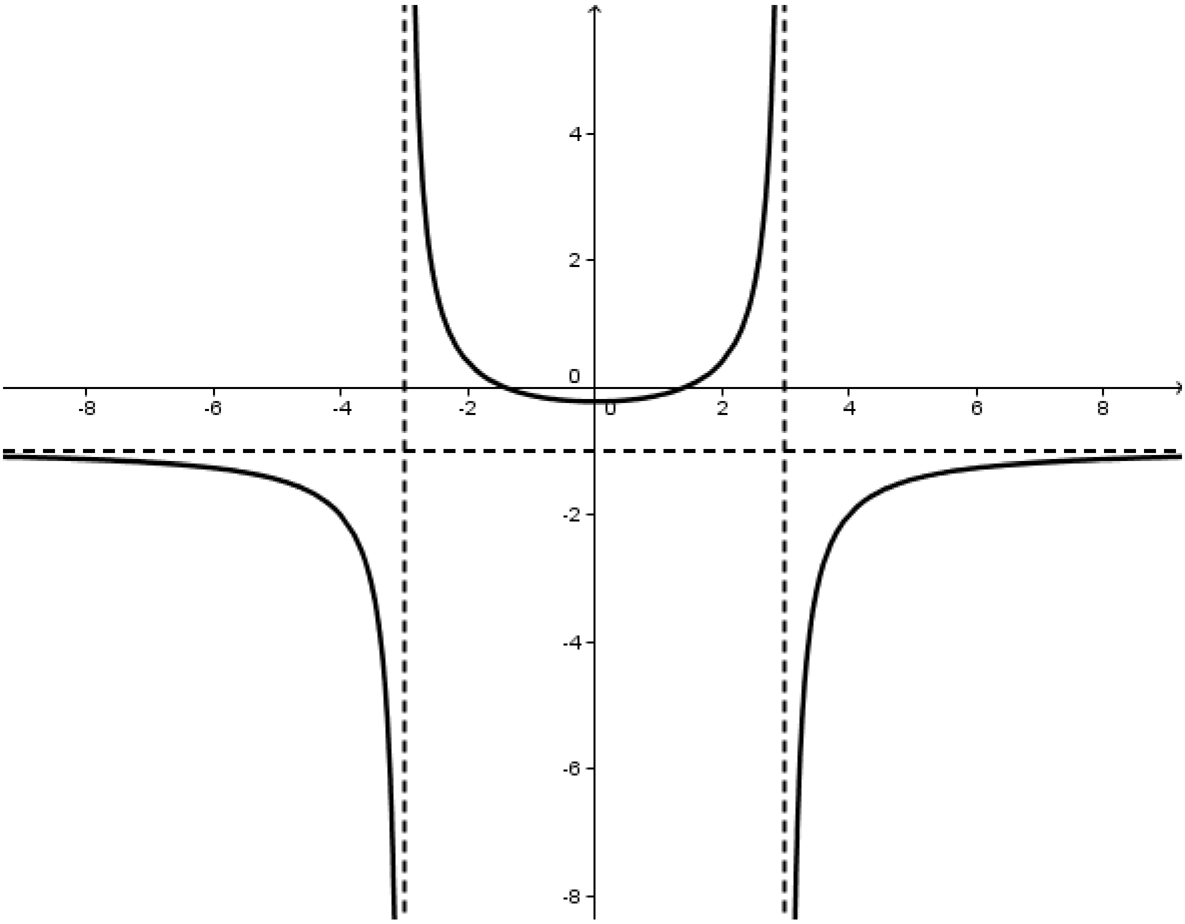
Extrempunkte: Tiefpunkt $T\left(0; -\frac{2}{9}\right)$

Wendepunkte: kein Wendepunkt

Polstellen: $x_{p1} = -3$ und $x_{p2} = 3$ sind Polstellen der Funktion

Asymptoten: $g(x) = -1$ ist waagerechte Asymptote der Funktion

Schaubild:



3. DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ WB: $y \in \mathbb{R}$

   Ableitungen: $f'(x) = \frac{2x^3-5x^2+4x-4}{(x-1)^2}$; $f''(x) = \frac{2x^3-6x^2+6x+4}{(x-1)^3}$

   Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0;0)$

   Nullstellen: $S_Y(0;0)$

   Symmetrie: keine

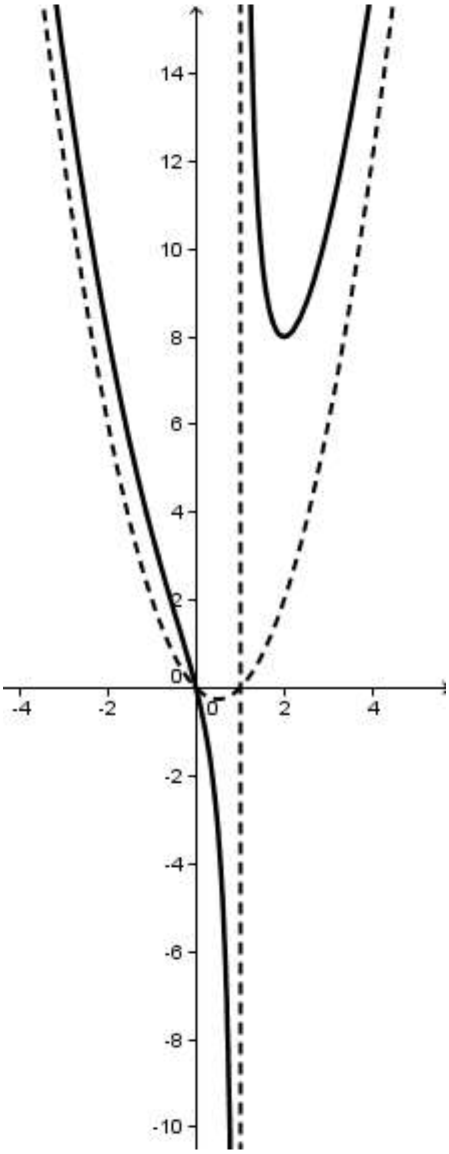
   Extrempunkte: Tiefpunkt $T(2;8)$

   Wendepunkte: nicht nötig zu untersuchen!

   Polstellen: $x_p = 1$ ist Polstelle der Funktion

   Asymptoten: $g(x) = x^2 - x$ ist Näherungskurve der Funktion

   Schaubild:



4. DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge y \leq -4 \wedge y \geq 4$

   Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$; $f''(x) = \frac{8}{x^3}$; $f'''(x) = \frac{-24}{x^4}$

   Schnittpunkt mit der y-Achse: keinen Schnittpunkt

   Nullstellen: keine Nullstellen

   Symmetrie: Punktsymmetrie

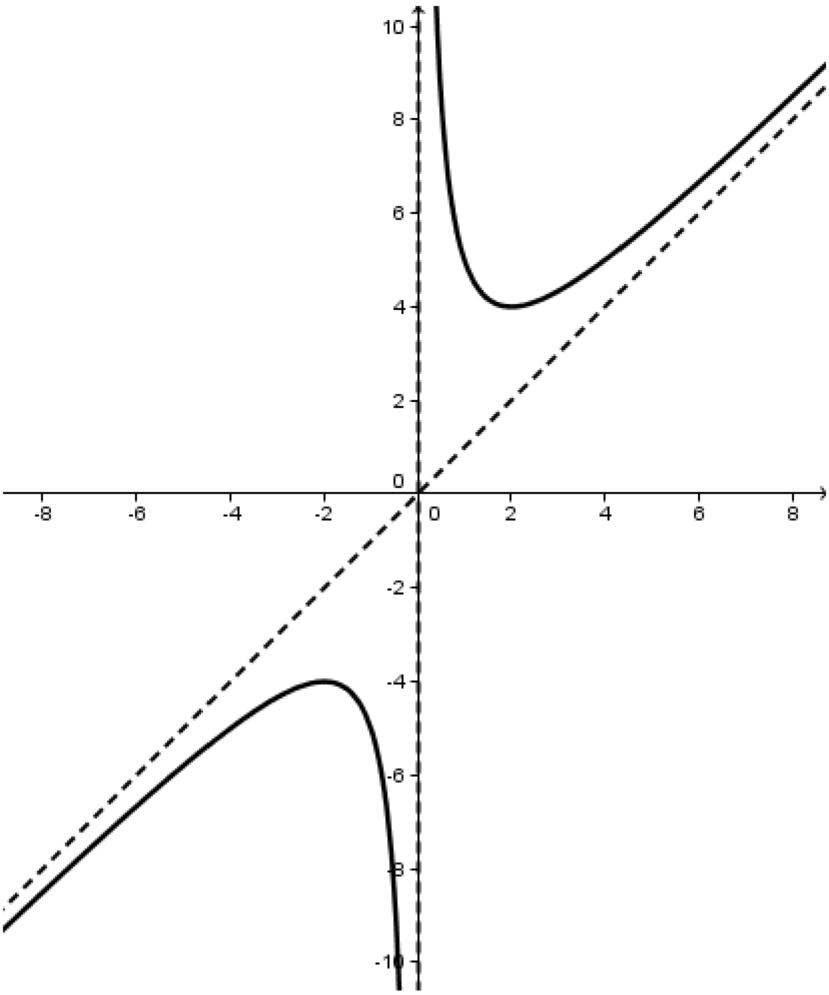
   Extrempunkte: Tiefpunkt $T(2; 4)$ Hochpunkt $H(-2; -4)$

   Wendepunkte: kein Wendepunkt

   Polstellen: $x_p = 0$ ist Polstelle der Funktion

   Asymptoten: $g(x) = x$ ist schiefe Asymptote der Funktion

   Schaubild:



5. DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge y \geq -1$

   Ableitungen: $f'(x) = \frac{-4x-4}{(x-1)^3}$; $f''(x) = \frac{8x+16}{(x-1)^4}$; $f'''(x) = \frac{-24x-72}{(x-1)^5}$

   Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0; 0)$

   Nullstellen: $S_Y(0; 0)$

   Symmetrie: keine Symmetrie

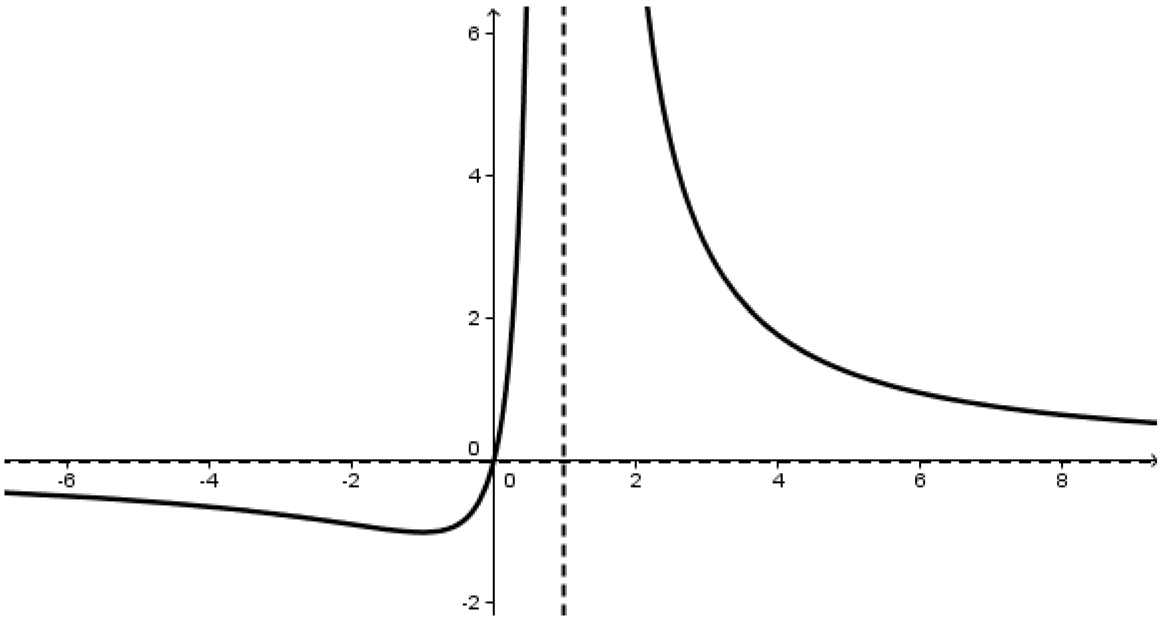
   Extrempunkte: Tiefpunkt $T(-1; -1)$

   Wendepunkte: $W\left(-2; -\frac{8}{9}\right)$

   Polstellen: $x_p = 1$ ist Polstelle der Funktion

   Asymptoten: x-Achse ist waagerechte Asymptote der Funktion

   Schaubild:



6. DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ WB: $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$; $f'''(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0; 1)$

Nullstellen: keine Nullstellen

Symmetrie: keine Symmetrie

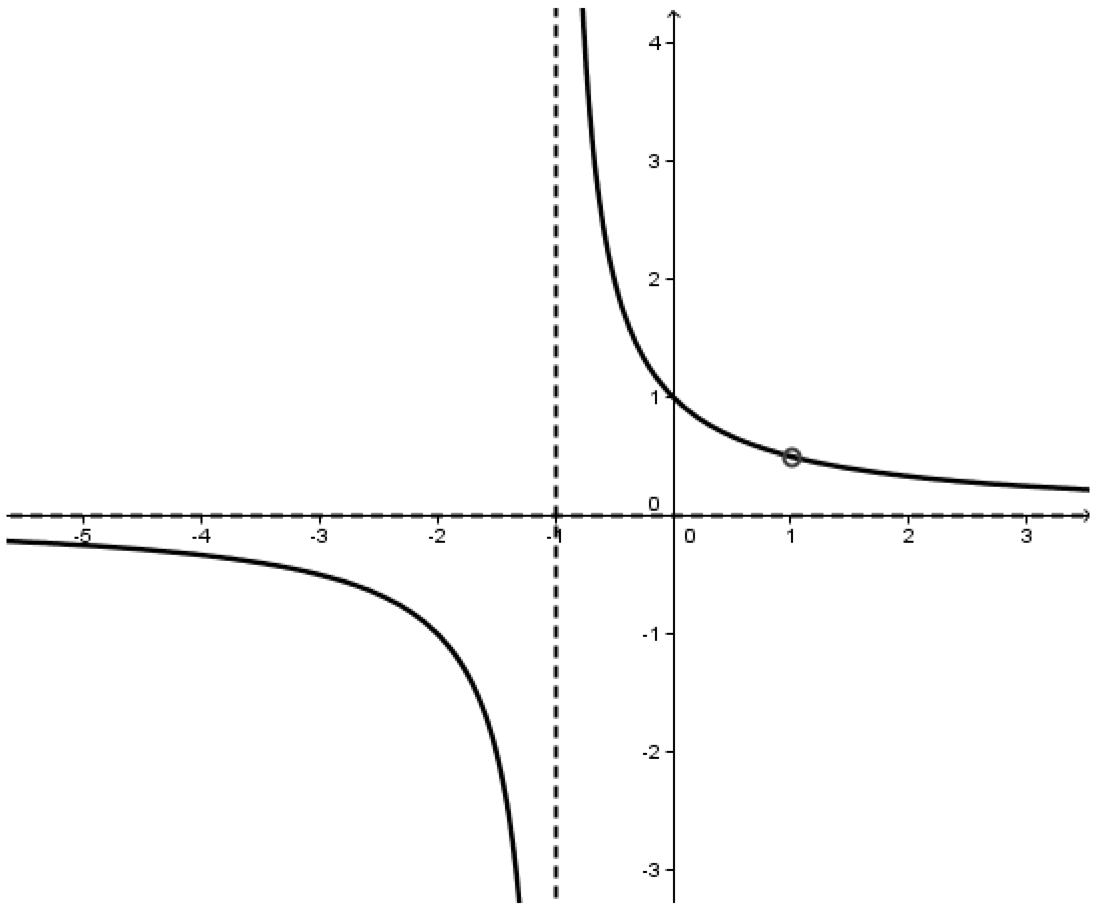
Extrempunkte: keinen Extrempunkt

Wendepunkte: keinen Wendepunkt

Polstellen: $x_{p1} = 1$ ist eine Lücke und $x_{p2} = -1$ ist eine Polstelle der Funktion

Asymptoten: x-Achse ist waagerechte Asymptote der Funktion

Schaubild:



7. DB: $x \in \mathbb{R}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge 0 < y \leq \frac{1}{2}$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{-8x}{(2+4x^2)^2}$; $f''(x) = \frac{96x^2-16}{(2+4x^2)^3}$; $f'''(x) = \frac{-1536x^3+768x}{(2+4x^2)^4}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

Nullstellen: keine Nullstellen

Symmetrie: Achsensymmetrie

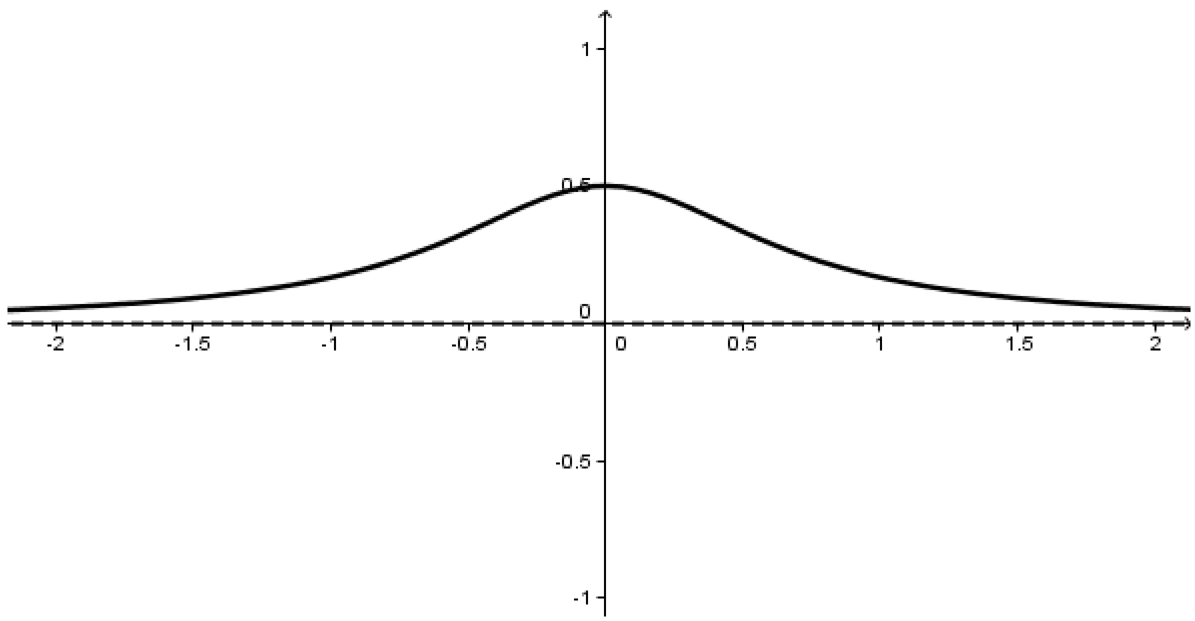
Extrempunkte: Hochpunkt $H\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

Wendepunkte: $W_1\left(\sqrt{\frac{1}{6}}; \frac{3}{8}\right)$ und $W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}; \frac{3}{8}\right)$

Polstellen: keine Polstelle

Asymptoten: x-Achse ist waagerechte Asymptote der Funktion

Schaubild:



8. DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ WB: $y \in \mathbb{R} \land y > 0$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^3}$; $f''(x) = \frac{12}{(x-2)^4}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Nullstellen: keine Nullstellen

Symmetrie: keine Symmetrie

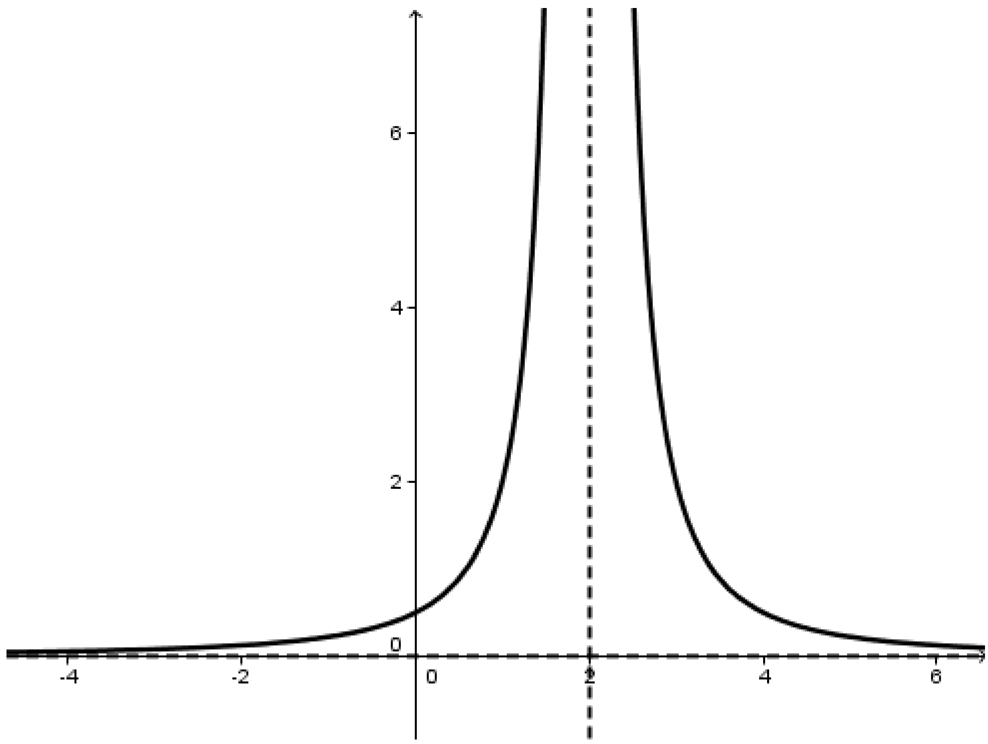
Extrempunkte: keinen Extrempunkt

Wendepunkte: keinen Wendepunkt

Polstellen: $x_p = 2$ ist Polstelle der Funktion

Asymptoten: x-Achse ist waagerechte Asymptote der Funktion

Schaubild:



9. DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ WB: $y \in \mathbb{R}$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^3+4}{2x^2}$; $f''(x) = \frac{x^3-8}{2x^3}$; $f'''(x) = \frac{12}{x^4}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0; 0)$

Nullstellen: $N(2; 0)$

Symmetrie: Keine Symmetrie

Extrempunkte: Tiefpunkt $T(-1{,}59; 1{,}89)$

Wendepunkte: $W(2; 0)$

Polstellen: $x_p = 0$ ist Polstelle der Funktion

Asymptoten: $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ ist Näherungskurve der Funktion

Schaubild: