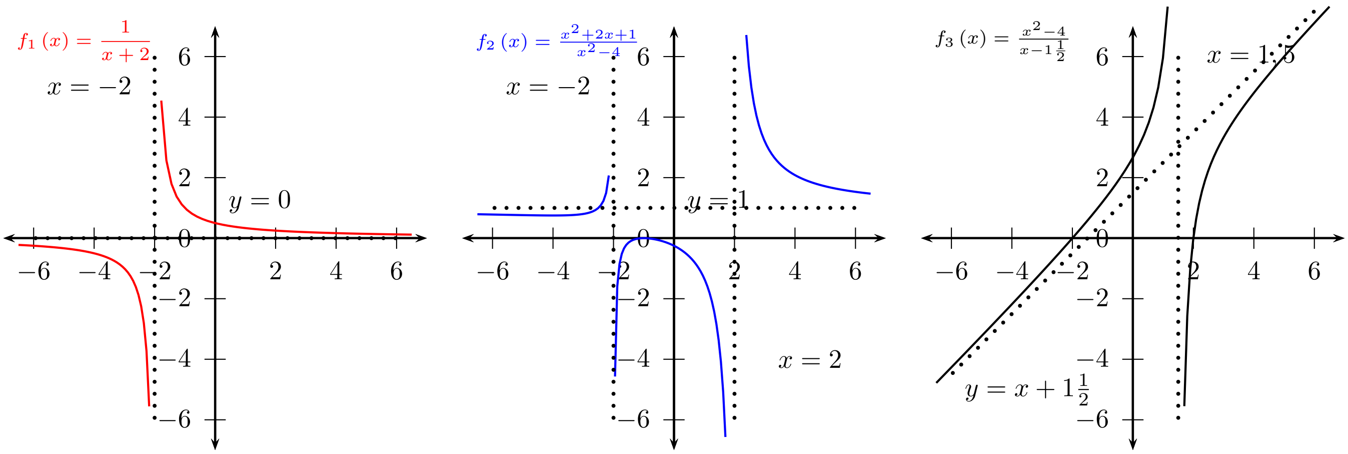
Kurvendiskussion
Gebrochenrationale Funktion
Aufgaben und Lösungen
http://www.fersch.de

24. August 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Gebrochenrationale Funktion



Formen der gebrochenrationalen Funktion

Summendarstellung der gebrochenrationale Funktion:

$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

$= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$

Zählerpolynom vom Grad n:

$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$

Nennerpolynom vom Grad m:

$N(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$

Produktdarstellung (faktorisierte Form) der gebrochenrationale Funktion:

$f(x) = a\frac{(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)...}{(x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)...}$

$z_1, z_2, z_3...$ Nullstellen des Zählers

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Zählerpolynom: $Z(x) = x^2 + 2x + 1$ Zählergrad:2

Nennerpolynom: $N(x) = x^2 - 4$ Nennergrad:2

Faktorisierte Form:

$f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$

$f_3(x) = \frac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$

Funktion nach der Polynomdivision:

$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$

Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich:

Nullstellen des Nennerpolynoms ausschließen.

Nennerpolynom: $N(x) = 0$

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners (Definitionslücken)

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{n_0, n_1, n_2..\}$

(siehe Algebra - Gleichungen)

Wertebereich:

Bestimmung nur nach Kurvendiskussion möglich.

$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Nenner Null setzen

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \quad / + 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:
$f(-x) = -f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse:
$f(-x) = f(x)$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Zählerpolynom gleich Null setzen.
Zählerpolynom: $Z(x) = 0$
$z_1, z_2, z_3...$ Nullstellen des Zählers
(siehe Algebra - Gleichungen)

$f_2(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$
Zählerpolynom gleich Null setzen:
$x^2+2x+1=0$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$
$x_1 = -1;$ 2-fache Nullstelle

Verhalten im Unendlichen - Grenzwert - Asymptoten

• Zählergrad>Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$
Das Vorzeichen der Glieder mit der höchsten Potenzen und der Grad der höchsten Exponenten, bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.
Grenzwert gegen plus Unendlich
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(\infty)^n}{(\infty)^m} = \pm\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = \pm\infty$

• Zählergrad=Nennergrad+1
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
Polynomdivision - schiefe Asymptote
• Zählergrad=Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$
horizontale Asymptote: $y = \dfrac{a_n}{b_m}$

• Zählergrad<Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
horizontale Asymptote: $y = 0$

Zählergrad < Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
Zählergrad = Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1x^2+2x+1}{1x^2-4} = \frac{1}{1} = 1$
Horizontale Asymptote: $y = 1$

Zählergrad = Nennergrad+1
$f_3(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(\infty)^2}{(\infty)^1} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(-\infty)^2}{(-\infty)^1} = -\infty$
oder
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1-\dfrac{4}{x^2})}{x(1-\dfrac{1\frac{1}{2}}{x})} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(1-\dfrac{4}{x^2})}{x(1-\dfrac{1\frac{1}{2}}{x})} = -\infty$

$Polynomdivision:$
$$\begin{array}{lll}
(x^2 & & -4 \quad) : (x-1\frac{1}{2}) = x+1\frac{1}{2} \\
-(x^2 & -1\frac{1}{2}x) & \\
\hline
 & 1\frac{1}{2}x & -4 \\
 & -(1\frac{1}{2}x & -2\frac{1}{4}) \\
\hline
 & & -1\frac{3}{4}
\end{array}$$
$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$
Schiefe Asymptote: $y = x + 1\frac{1}{2}$

Verhalten an den Definitionslücken - Grenzwert - Asymptoten

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1..\}$

$x_0, x_1..$ sind Definitionslücken von f(x)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$

Vertikale Asymptote: $x = x_0$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{(x+2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

Ableitung

Die Ableitungen bildet man durch die Quotientenregel:

$f'(x) = \dfrac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$f_1'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2}$

$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+4x+4) - (-1) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{0-(-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \dfrac{2(x+2)}{(x+2)^4}$

$= \dfrac{2}{(x+2)^3}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x^2-4) - (x^2+2x+1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{(2x^3+2x^2-8x-8) - (2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0 (LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0 (RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_2'(x) = \dfrac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$

$-2x^2 - 10x - 8 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$

$x_{1/2} = \dfrac{10 \pm 6}{-4}$

$x_1 = \dfrac{10+6}{-4} \qquad x_2 = \dfrac{10-6}{-4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$

$f''(-4) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(-4/\frac{3}{4})$

$f''(-1) = -6$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: $(-1/0)$

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1..$).

In diesen Nullstellen ($x_0, x_1..$) kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_1'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$

Zähler = 0

keine Lösung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -2$;   1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[\; f'(x) < 0$ smf

Wendepunkt und die 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1..$).

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$. Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht.

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Krümmung

$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

$Zhler = 0$

keine Lösung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_3 = -2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -2[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

2 Gebrochen rationale Funktion Zählergrad < Nennergrad

2.1 Aufgaben

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$

(2) $f(x) = \frac{-1}{x}$

(3) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

(4) $f(x) = \frac{-1}{x-2}$

(5) $f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}}$

(6) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(7) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

(8) $f(x) = \frac{3}{x^2+4}$

(9) $f(x) = \frac{-4}{x^2-4}$

(10) $f(x) = \frac{\frac{1}{5}}{x^2+2x+1}$

(11) $f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}}{x^2-6x+9}$

(12) $f(x) = \frac{9x}{x^2+3}$

(13) $f(x) = \frac{x}{x^2}$

(14) $f(x) = \frac{-3x+3}{2x^2+4x+2}$

(15) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}}$

(16) $f(x) = \frac{-x+3}{x^2-9}$

(17) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$

(18) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$

(19) $f(x) = \dfrac{-4x + \frac{1}{2}}{x^2 + 4}$

(20) $f(x) = \dfrac{2x - \frac{1}{4}}{x^2 - 4}$

(21) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{5}x}{x^2 + 2x + 1}$

(22) $f(x) = \dfrac{-1\frac{1}{2}x + 2}{x^2 - 6x + 9}$

(23) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

(24) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

(25) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{1}{x}$
Nenner faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{1}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{0 - 1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{x^4}$
$= \frac{2}{x^3}$
$= \frac{2}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(1)} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

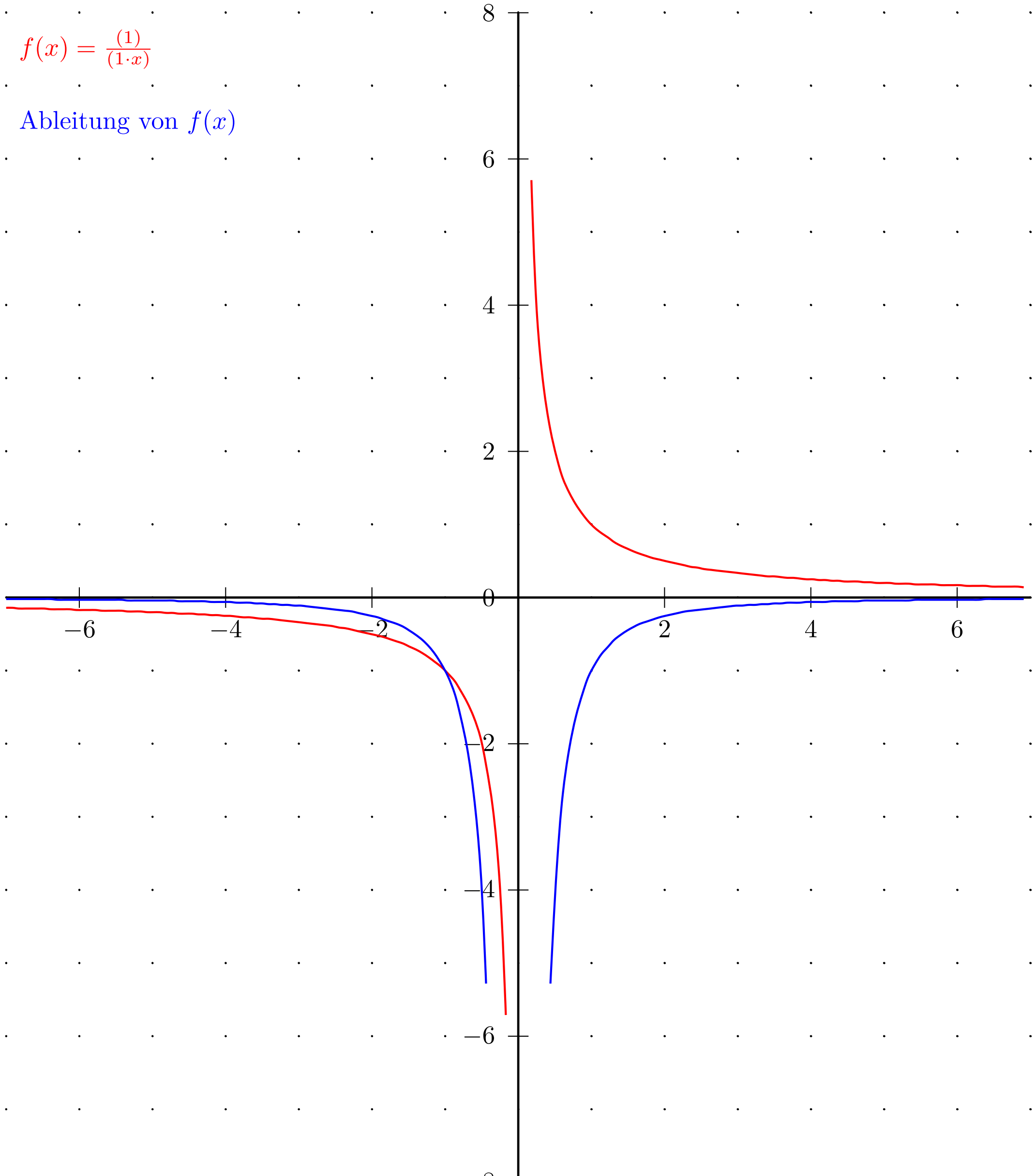
• Kruemmung
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$-0,00583$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$-0,00728$
-6	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{108}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$-0,012$
-5	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-4	$-\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-3	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-1	-1	-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
0	∞	$3265\frac{15}{49}$	$-\infty$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	∞	$3265\frac{15}{49}$	$-\infty$
$\frac{1}{2}$	2	-4	16
1	1	-1	2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,445$	$0,593$
2	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
3	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
4	$\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$0,012$
6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$

Aufgabe (2)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{-1}{x}$
Nenner faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{-1}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{-1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{0 \cdot x - (-1) \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{0 - (-1)}{(x)^2}$
$= \frac{1}{(x)^2}$
$= \frac{1}{(x)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x}{x^4}$
$= \frac{-2}{x^3}$
$= \frac{-2}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(-1)}{x(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{1}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{1}{x^2}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 0;\quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0\quad$ streng monoton steigend

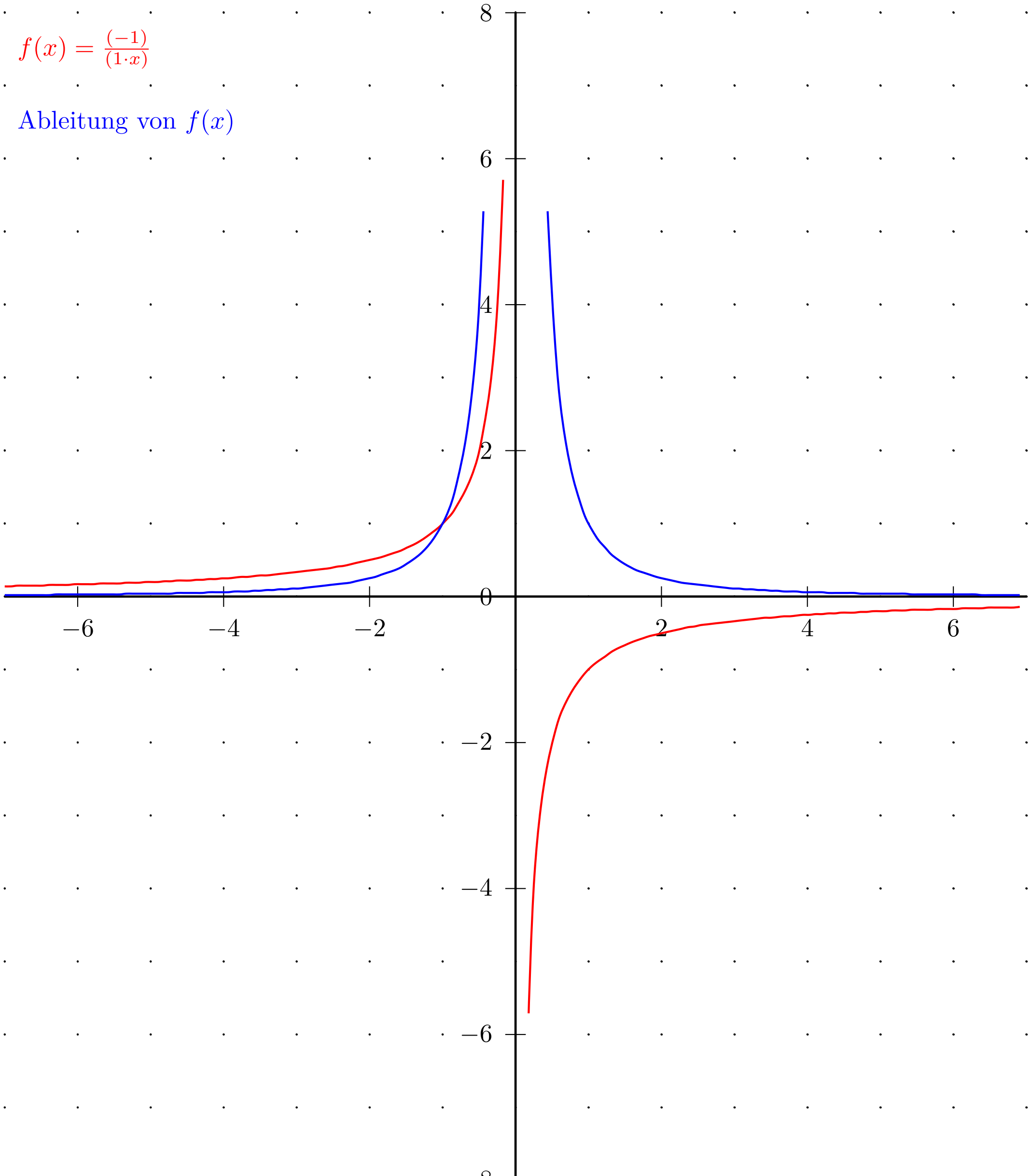
• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-2}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0;\quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0\quad$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0\quad$ rechtsgekrümmt
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$0,00583$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$0,0237$	$0,00728$
-6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{121}$	$0,012$
-5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$0,0219$
-4	$\frac{1}{4}$	$0,0625$	$\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$0,0816$	$0,0466$
-3	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
-2	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,445$	$0,593$
-1	1	1	2
$-\frac{1}{2}$	2	4	16
0	$-\infty$	$-3265\frac{15}{49}$	∞

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\infty$	$-3265\frac{15}{49}$	∞
$\frac{1}{2}$	-2	4	-16
1	-1	1	-2
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,445$	$-0,593$
2	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
3	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$0,0816$	$-0,0466$
4	$-\frac{1}{4}$	$0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,0219$
5	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{4}{121}$	$-0,012$
6	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{108}$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$0,0237$	$-0,00728$
7	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$-0,00583$

Aufgabe (3)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{1}{x+2}$

Nenner faktorisieren:

$x + 2 = 0$

$x + 2 = 0 \qquad / - 2$

$x = -2$

$x_1 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{1}{(x+2)}$

• Definitionsbereich: $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{1}{x+2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2}$

$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+4x+4) - (-1) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{0-(-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2(x+2)}{(x+2)^4}$

$= \frac{2}{(x+2)^3}$

$= \frac{2}{x^3+6x^2+12x+8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$1 = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(1+\frac{2}{x})} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{-1}{x^2+4x+4} = 0$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{-1}{x^2+4x+4}$

Zaehler = 0

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;\infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{2}{x^3+6x^2+12x+8}$

$Zaehler = 0$

keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

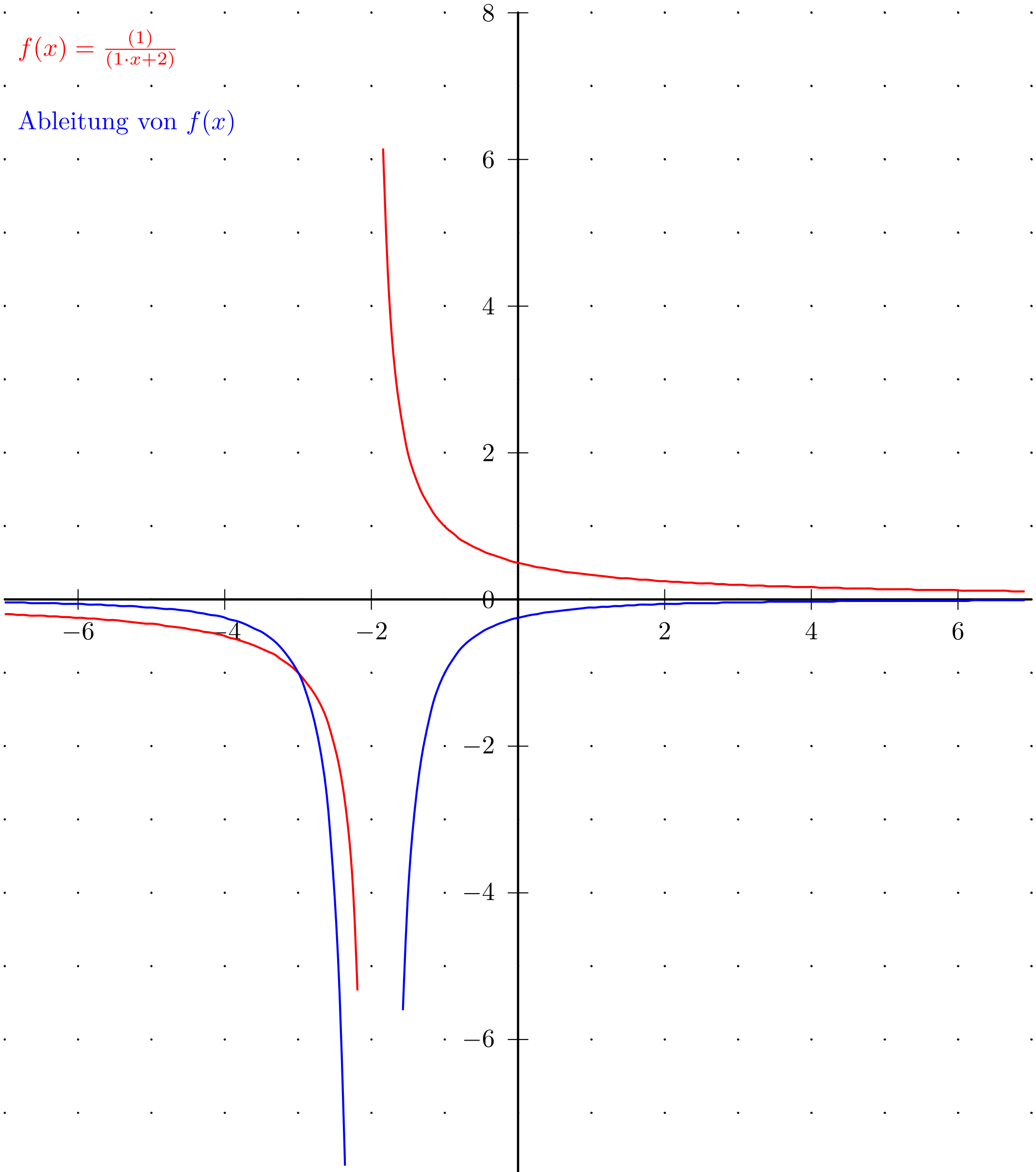
$x_3 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2;\infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-2[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-6	$-\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-5	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-4	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-3	-1	-1	-2
$-2\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
-2	∞	$3265\frac{15}{49}$	$-\infty$
$-1\frac{1}{2}$	2	-4	16
-1	1	-1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,445$	$0,593$
0	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
1	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
2	$\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$0,012$
4	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
5	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$-0,0178$	$0,00474$
6	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{64}$	$0,00391$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{17}$	$-0,0138$	$0,00326$
7	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{81}$	$0,00274$

Aufgabe (4)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-1}{x-2}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_1 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-1}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) = \frac{-1}{x-2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-2) - (-1) \cdot 1}{(x-2)^2}$

$= \frac{0 - (-1)}{(x-2)^2}$

$= \frac{1}{(x-2)^2}$

$= \frac{1}{(x-2)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 1 \cdot (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{0 - (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{-2(x-2)}{(x-2)^4}$

$= \frac{-2}{(x-2)^3}$

$= \frac{-2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1 = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(-1)}{x(1-\frac{2}{x})} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-1}{(x-2)} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-1}{(x-2)} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4} = 0$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4}$

Zaehler $= 0$

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{-2}{x^3-6x^2+12x-8}$

$Zaehler = 0$

keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

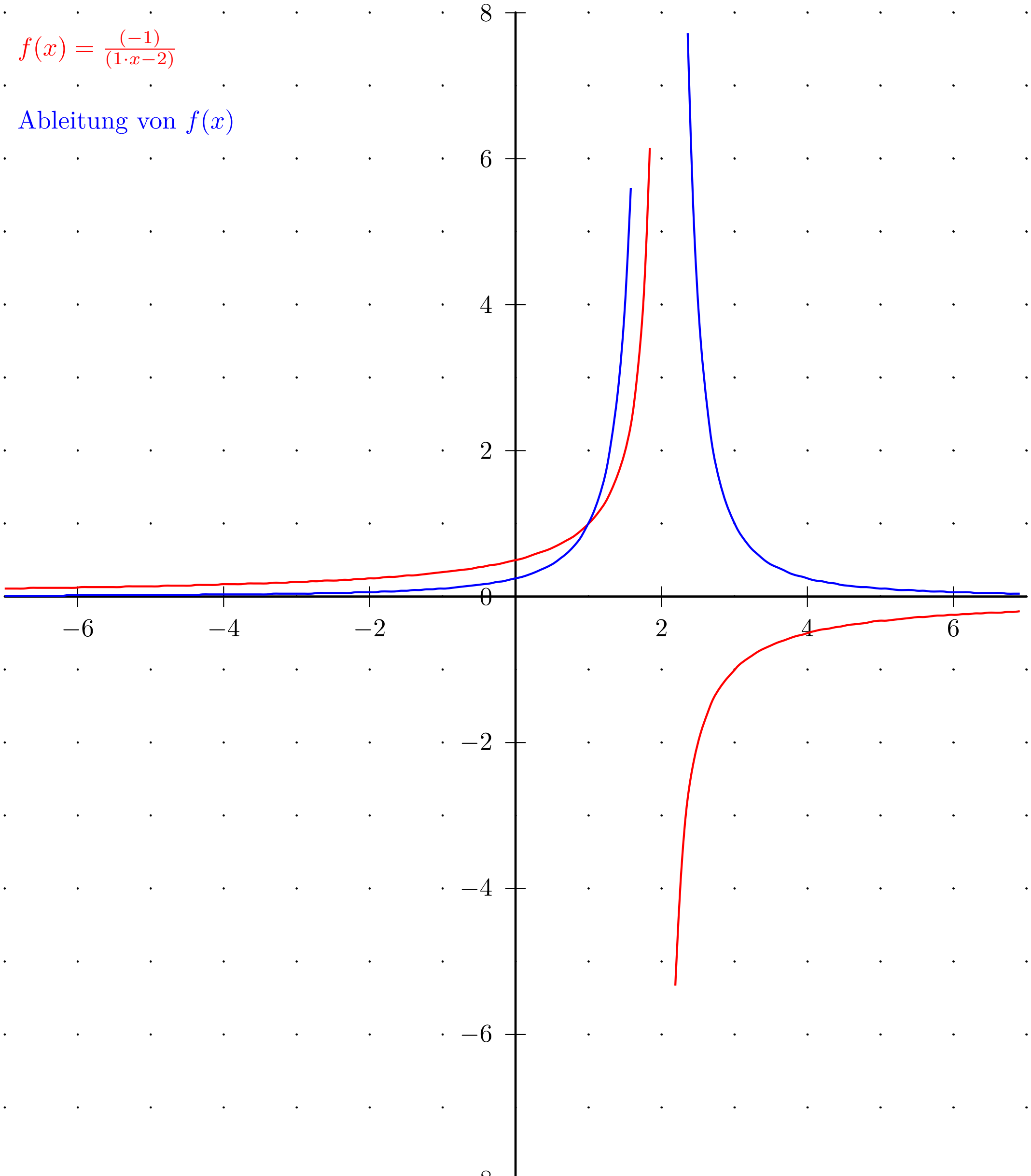
$x_3 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 2[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]2; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$0,00274$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{17}$	$0,0138$	$0,00326$
-6	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$0,00391$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$0,0178$	$0,00474$
-5	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$0,00583$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$0,0237$	$0,00728$
-4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{121}$	$0,012$
-3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$0,0219$
-2	$\frac{1}{4}$	$0,0625$	$\frac{1}{32}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$0,0816$	$0,0466$
-1	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,0741$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,445$	$0,593$
1	1	1	2
$1\frac{1}{2}$	2	4	16
2	$-\infty$	$-3265\frac{15}{49}$	∞
$2\frac{1}{2}$	-2	4	-16
3	-1	1	-2
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,445$	$-0,593$
4	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
5	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,0741$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$0,0816$	$-0,0466$
6	$-\frac{1}{4}$	$0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,0219$
7	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$

Aufgabe (5)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}}$

Nenner faktorisieren:

$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0$

$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0 \qquad / + \frac{1}{2}$

$-\frac{2}{3}x = \frac{1}{2} \qquad / : \left(-\frac{2}{3}\right)$

$x = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}}$

$x = -\frac{3}{4}$

$\underline{x_1 = -\frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}(x + \frac{3}{4})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot (-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{2}{3})}{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{0 - \frac{2}{9}}{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-\frac{2}{9}}{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-\frac{2}{9}}{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}) - (-\frac{2}{9}) \cdot (\frac{8}{9}x + \frac{2}{3})}{(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{0 - (-\frac{16}{81}x - \frac{4}{27})}{(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{\frac{16}{81}x + \frac{4}{27}}{(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{\frac{16}{81}x + \frac{4}{27}}{(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-\frac{1}{3} = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{3}{4}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$x \in]-\infty; -\frac{3}{4}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(-\frac{1}{3})}{x(-\frac{2}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{x})} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to -\frac{3}{4}^+} \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}(x+\frac{3}{4})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to -\frac{3}{4}^-} \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}(x+\frac{3}{4})} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -\frac{3}{4}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}} = 0$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}}$

Zaehler $= 0$

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -\frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$

	$x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{3}{4}[\quad \cup \quad]-\frac{3}{4}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{\frac{16}{81}x + \frac{4}{27}}{\frac{16}{81}x^4 + \frac{16}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{16}}$

$Zaehler = 0$

$\frac{16}{81}x + \frac{4}{27} = 0 \qquad / - \frac{4}{27}$

$\frac{16}{81}x = -\frac{4}{27} \qquad / : \frac{16}{81}$

$x = \frac{-\frac{4}{27}}{\frac{16}{81}}$

$x = -\frac{3}{4}$

$x_3 = -\frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_4 = -\frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$

	$x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\frac{3}{4}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -\frac{3}{4}[\quad \cup \quad]-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{2}{25}$	$-0,0128$	$-0,0041$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{23}$	$-0,0151$	$-0,00526$
-6	$-\frac{2}{21}$	$-0,0181$	$-0,00691$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{19}$	$-0,0222$	$-0,00933$
-5	$-\frac{2}{17}$	$-0,0277$	$-0,013$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{15}$	$-0,0356$	$-0,019$
-4	$-\frac{2}{13}$	$-0,0473$	$-0,0291$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-0,0661$	$-0,0481$
-3	$-\frac{2}{9}$	$-0,0988$	$-0,0878$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,163$	$-0,187$
-2	$-\frac{2}{5}$	$-0,32$	$-0,512$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,889$	$-2,37$
-1	-2	$-8,04$	$-64,3$
$-\frac{1}{2}$	2	$-8,04$	$64,3$
0	$\frac{2}{3}$	$-0,889$	$2,37$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{2}{3}$	$-0,889$	$2,37$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,32$	$0,512$
1	$\frac{2}{7}$	$-0,163$	$0,187$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-0,0988$	$0,0878$
2	$\frac{2}{11}$	$-0,0661$	$0,0481$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0473$	$0,0291$
3	$\frac{2}{15}$	$-0,0356$	$0,019$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{17}$	$-0,0277$	$0,013$
4	$\frac{2}{19}$	$-0,0222$	$0,00933$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{21}$	$-0,0181$	$0,00691$
5	$\frac{2}{23}$	$-0,0151$	$0,00526$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{25}$	$-0,0128$	$0,0041$
6	$\frac{2}{27}$	$-0,011$	$0,00325$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{29}$	$-0,00951$	$0,00262$
7	$\frac{2}{31}$	$-0,00832$	$0,00215$

Aufgabe (6)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{1}{x^2}$
Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_1 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x}{x^4}$
$= \frac{-2}{x^3}$
$= \frac{-2}{x^3}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^3 - (-2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{0 - (-6x^2)}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^2}{x^6}$
$= \frac{6}{x^4}$
$= \frac{6}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-2}{x^3} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 0;\quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0\quad$ streng monoton steigend

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0\quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{6}{x^4}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0;\quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup\quad]0; \infty[\quad f''(x) > 0\quad$ linksgekrümmt
Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{49}$	$0,00583$	$0,0025$
$-6\frac{1}{2}$	$0,0237$	$0,00728$	$0,00336$
-6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$	$0,00463$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{4}{121}$	$0,012$	$0,00656$
-5	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$	$0,0096$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{81}$	$0,0219$	$0,0146$
-4	$\frac{1}{16}$	$0,0313$	$0,0234$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$0,0466$	$0,04$
-3	$\frac{1}{9}$	$0,0741$	$0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$0,128$	$0,154$
-2	$\frac{1}{4}$	$0,25$	$0,375$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$0,593$	$1,19$
-1	1	2	6
$-\frac{1}{2}$	4	16	$96,2$
0	∞	0	$-\infty$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	∞	0	$-\infty$
$\frac{1}{2}$	4	-16	$96,2$
1	1	-2	6
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$-0,593$	$1,19$
2	$\frac{1}{4}$	$-0,25$	$0,375$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$-0,128$	$0,154$
3	$\frac{1}{9}$	$-0,0741$	$0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$-0,0466$	$0,04$
4	$\frac{1}{16}$	$-0,0313$	$0,0234$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{81}$	$-0,0219$	$0,0146$
5	$\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$	$0,0096$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{4}{121}$	$-0,012$	$0,00656$
6	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{108}$	$0,00463$
$6\frac{1}{2}$	$0,0237$	$-0,00728$	$0,00336$
7	$\frac{1}{49}$	$-0,00583$	$0,0025$

Aufgabe (7)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{-1}{x^2}$
Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{-1}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{-1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{x^4}$
$= \frac{2}{x^3}$
$= \frac{2}{x^3}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^3 - 2 \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{0 - 6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-6x^2}{x^6}$
$= \frac{-6}{x^4}$
$= \frac{-6}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(-1)}{x^2(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1}{x^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{2}{x^3} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'\,(x) = \frac{2}{x^3}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0;\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

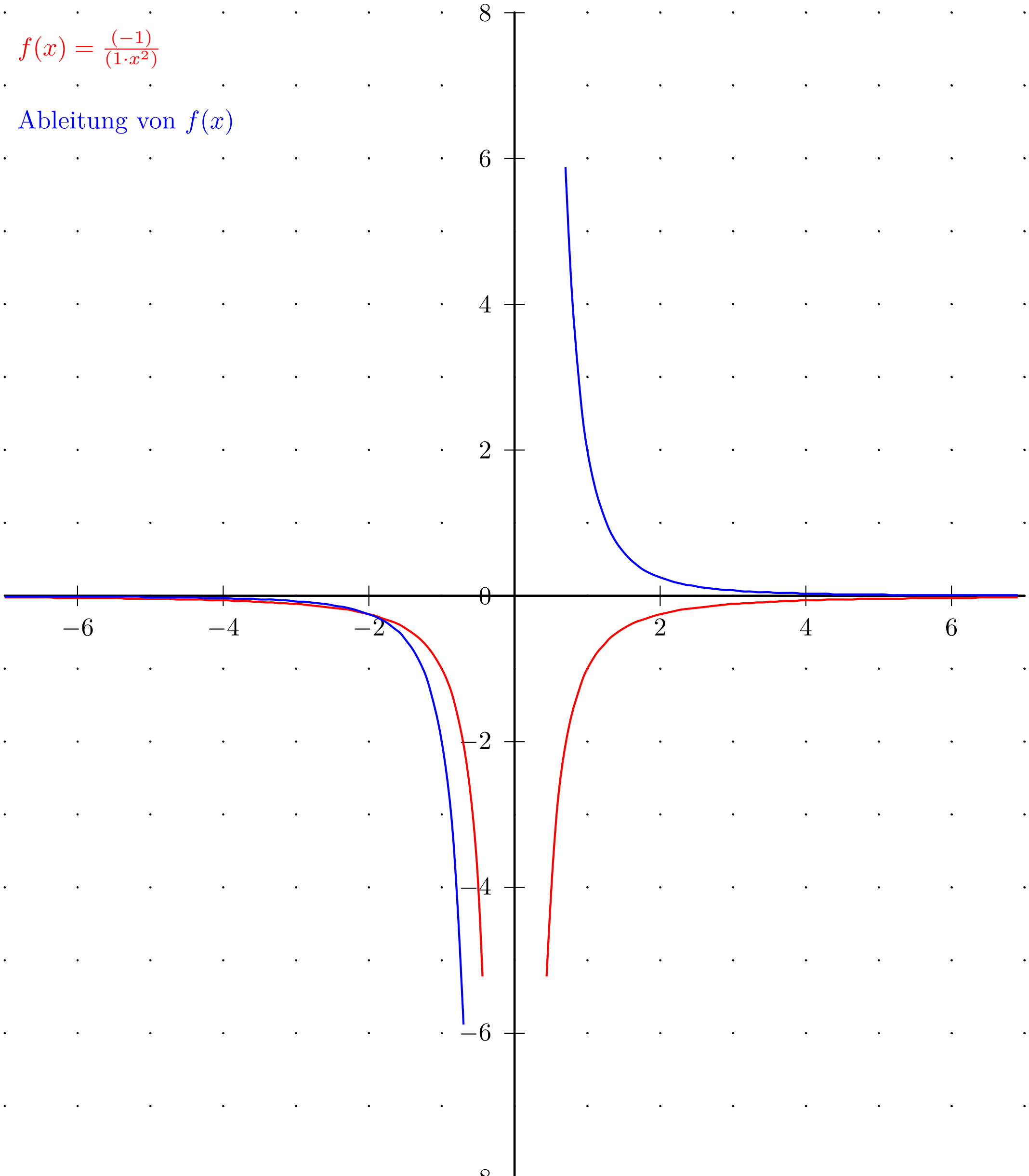
$x \in]-\infty;0[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''\,(x) = \frac{-6}{x^4}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{49}$	$-0,00583$	$-0,0025$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,0237$	$-0,00728$	$-0,00336$
-6	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{108}$	$-0,00463$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{121}$	$-0,012$	$-0,00656$
-5	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$	$-0,0096$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$	$-0,0146$
-4	$-\frac{1}{16}$	$-0,0313$	$-0,0234$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{49}$	$-0,0466$	$-0,04$
-3	$-\frac{1}{9}$	$-0,0741$	$-0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{25}$	$-0,128$	$-0,154$
-2	$-\frac{1}{4}$	$-0,25$	$-0,375$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$-0,593$	$-1,19$
-1	-1	-2	-6
$-\frac{1}{2}$	-4	-16	$-96,2$
0	$-\infty$	0	∞

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\infty$	0	∞
$\frac{1}{2}$	-4	16	$-96,2$
1	-1	2	-6
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$0,593$	$-1,19$
2	$-\frac{1}{4}$	$0,25$	$-0,375$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{25}$	$0,128$	$-0,154$
3	$-\frac{1}{9}$	$0,0741$	$-0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{49}$	$0,0466$	$-0,04$
4	$-\frac{1}{16}$	$0,0313$	$-0,0234$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$	$-0,0146$
5	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$	$-0,0096$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{121}$	$0,012$	$-0,00656$
6	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$	$-0,00463$
$6\frac{1}{2}$	$-0,0237$	$0,00728$	$-0,00336$
7	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$	$-0,0025$

Aufgabe (8)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{3}{x^2+4}$

Nenner faktorisieren:

$x^2+4=0$

$1x^2+4=0 \qquad /-4$

$1x^2=-4 \qquad /:1$

$x^2=\dfrac{-4}{1}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{3}{(x^2+4)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

$f\left(x\right)=\dfrac{3}{x^2+4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{0\cdot(x^2+4)-3\cdot 2x}{(x^2+4)^2}$

$=\dfrac{0-6x}{(x^2+4)^2}$

$=\dfrac{-6x}{(x^2+4)^2}$

$=\dfrac{-6x}{(x^2+4)^2}$

$f''\left(x\right)=\dfrac{(-6)\cdot(x^4+8x^2+16)-(-6x)\cdot(4x^3+16x)}{(x^4+8x^2+16)^2}$

$=\dfrac{(-6x^4-48x^2-96)-(-24x^4-96x^2)}{(x^4+8x^2+16)^2}$

$=\dfrac{18x^4+48x^2-96}{(x^4+8x^2+16)^2}$

$=\dfrac{18x^4+48x^2-96}{(x^4+8x^2+16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler=0$

$3=0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

kein Vorzeichenwechsel

$x\in\mathbb{R}$	$f(x)>0$	oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x^2(1+\frac{4}{x^2})}=0$$

Horizontale Asymptote: $y=0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{-6x}{x^4 + 8x^2 + 16} = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -\frac{3}{8}$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/\frac{3}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-6x}{x^4 + 8x^2 + 16}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{18x^4 + 48x^2 - 96}{x^8 + 16x^6 + 96x^4 + 256x^2 + 256}$
$Zaehler = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$18u^2 + 48u - 96 = 0$

$u_{1/2} = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-96)}}{2 \cdot 18}$
$u_{1/2} = \frac{-48 \pm \sqrt{9,22 \cdot 10^3}}{36}$
$u_{1/2} = \frac{-48 \pm 96}{36}$
$u_1 = \frac{-48 + 96}{36} \qquad u_2 = \frac{-48 - 96}{36}$
$u_1 = 1\frac{1}{3} \qquad u_2 = -4$
$x^2 = 1\frac{1}{3}$
$x = \pm\sqrt{1\frac{1}{3}}$
$x_1 = 1,15 \qquad x_2 = -1,15$
$x^2 = -4x = \pm\sqrt{-4}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_3 = -1,15; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1,15; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

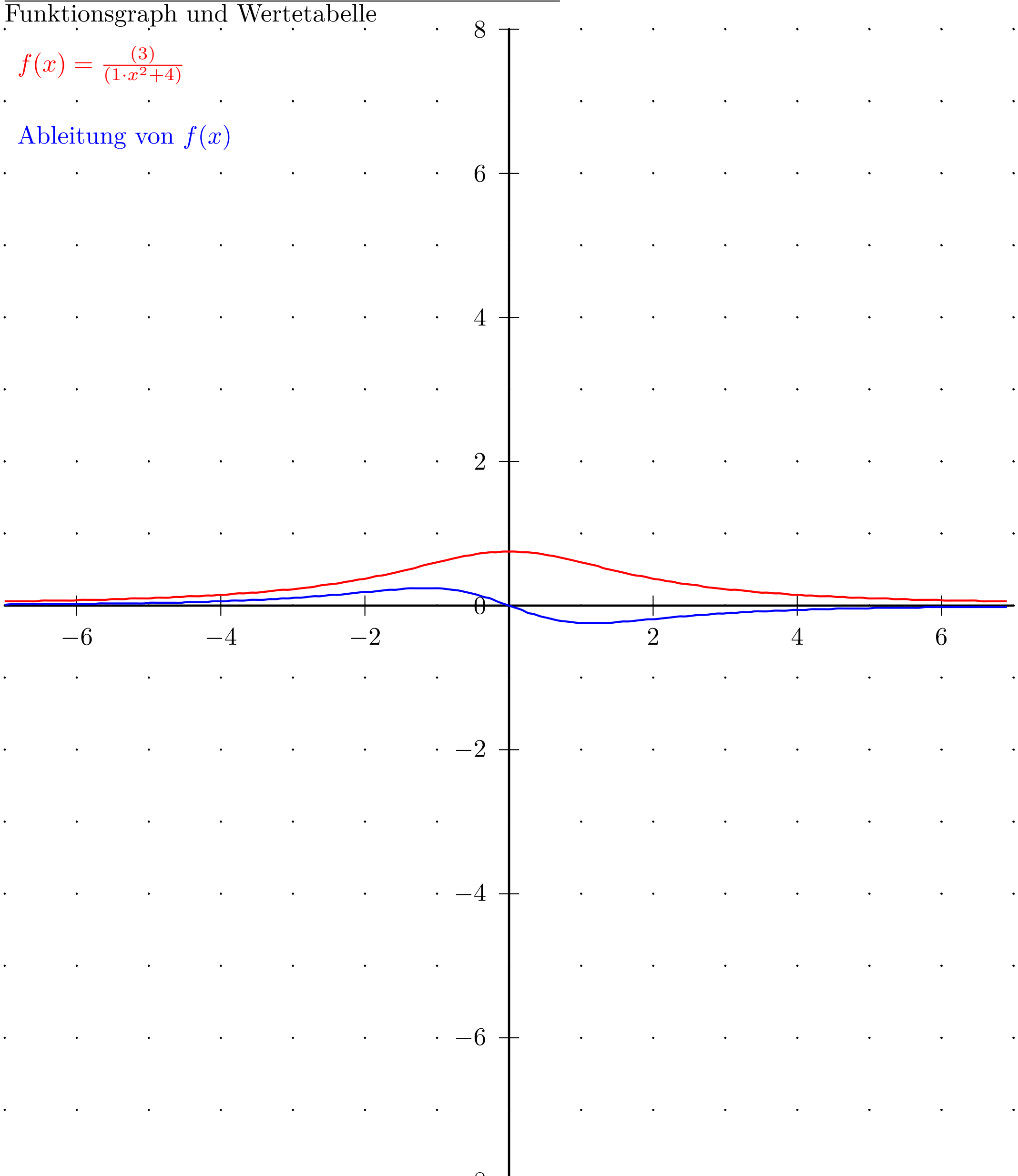
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-1,15$	$< x <$	$1,15$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1,15[\quad \cup \quad]1,15; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$x \in]-1,15; 1,15[$	$f''(x) < 0$	rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{3}{53}$	$0,015$	$0,00576$
$-6\frac{1}{2}$	$0,0649$	$0,0182$	$0,00744$
-6	$\frac{3}{40}$	$0,0225$	$0,00975$
$-5\frac{1}{2}$	$0,0876$	$0,0281$	$0,013$
-5	$\frac{3}{29}$	$0,0357$	$0,0175$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{12}{97}$	$0,0459$	$0,0239$
-4	$\frac{3}{20}$	$0,06$	$0,033$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{12}{65}$	$0,0795$	$0,0458$
-3	$\frac{3}{13}$	$0,107$	$0,0628$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{12}{41}$	$0,143$	$0,0822$
-2	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$0,0937$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{25}$	$0,23$	$0,0676$
-1	$\frac{3}{5}$	$0,24$	$-0,048$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{12}{17}$	$0,166$	$-0,254$
0	$\frac{3}{4}$	0	$-0,375$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{3}{4}$	0	$-0,375$
$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{17}$	$-0,166$	$-0,254$
1	$\frac{3}{5}$	$-0,24$	$-0,048$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{25}$	$-0,23$	$0,0676$
2	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$0,0937$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{12}{41}$	$-0,143$	$0,0822$
3	$\frac{3}{13}$	$-0,107$	$0,0628$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{12}{65}$	$-0,0795$	$0,0458$
4	$\frac{3}{20}$	$-0,06$	$0,033$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{12}{97}$	$-0,0459$	$0,0239$
5	$\frac{3}{29}$	$-0,0357$	$0,0175$
$5\frac{1}{2}$	$0,0876$	$-0,0281$	$0,013$
6	$\frac{3}{40}$	$-0,0225$	$0,00975$
$6\frac{1}{2}$	$0,0649$	$-0,0182$	$0,00744$
7	$\frac{3}{53}$	$-0,015$	$0,00576$

Aufgabe (9)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-4}{x^2-4}$

Nenner faktorisieren:

$x^2-4=0$

$1x^2-4=0 \qquad /+4$

$1x^2=4 \qquad /:1$

$x^2=\frac{4}{1}$

$x=\pm\sqrt{4}$

$x_1=2 \qquad x_2=-2$

$\underline{x_1=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-4}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

$f(x) = \frac{-4}{x^2-4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0\cdot(x^2-4)-(-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{0-(-8x)}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{8x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{8x}{(x^2-4)^2}$

$f''(x) = \frac{8\cdot(x^4-8x^2+16)-8x\cdot(4x^3-16x)}{(x^4-8x^2+16)^2}$

$= \frac{(8x^4-64x^2+128)-(32x^4-128x^2)}{(x^4-8x^2+16)^2}$

$= \frac{-24x^4+64x^2+128}{(x^4-8x^2+16)^2}$

$= \frac{-24x^4+64x^2+128}{(x^4-8x^2+16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler=0$

$-4=0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x<$	-2	$<x<$	2	$<x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x\in]-2;2[\quad f(x)>0\quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x\in]-\infty;-2[\quad\cup\quad]2;\infty[\quad f(x)<0\quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(-4)}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{-4}{(x+2)(x-2)} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{-4}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$
$\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{-4}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{-4}{(x+2)(x-2)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{8x}{x^4-8x^2+16} = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{8x}{x^4-8x^2+16}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_5 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]0;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-24x^4+64x^2+128}{x^8-16x^6+96x^4-256x^2+256}$
$Zaehler = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$-24u^2 + 64u + 128 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{-64 \pm \sqrt{64^2 - 4\cdot(-24)\cdot128}}{2\cdot(-24)}$
$u_{1/2} = \dfrac{-64 \pm \sqrt{1,64\cdot10^4}}{-48}$
$u_{1/2} = \dfrac{-64 \pm 128}{-48}$
$u_1 = \dfrac{-64+128}{-48} \qquad u_2 = \dfrac{-64-128}{-48}$

$u_1 = -1\frac{1}{3} \qquad u_2 = 4$

$x^2 = -1\frac{1}{3} x = \pm\sqrt{-1\frac{1}{3}}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_7 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_9 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

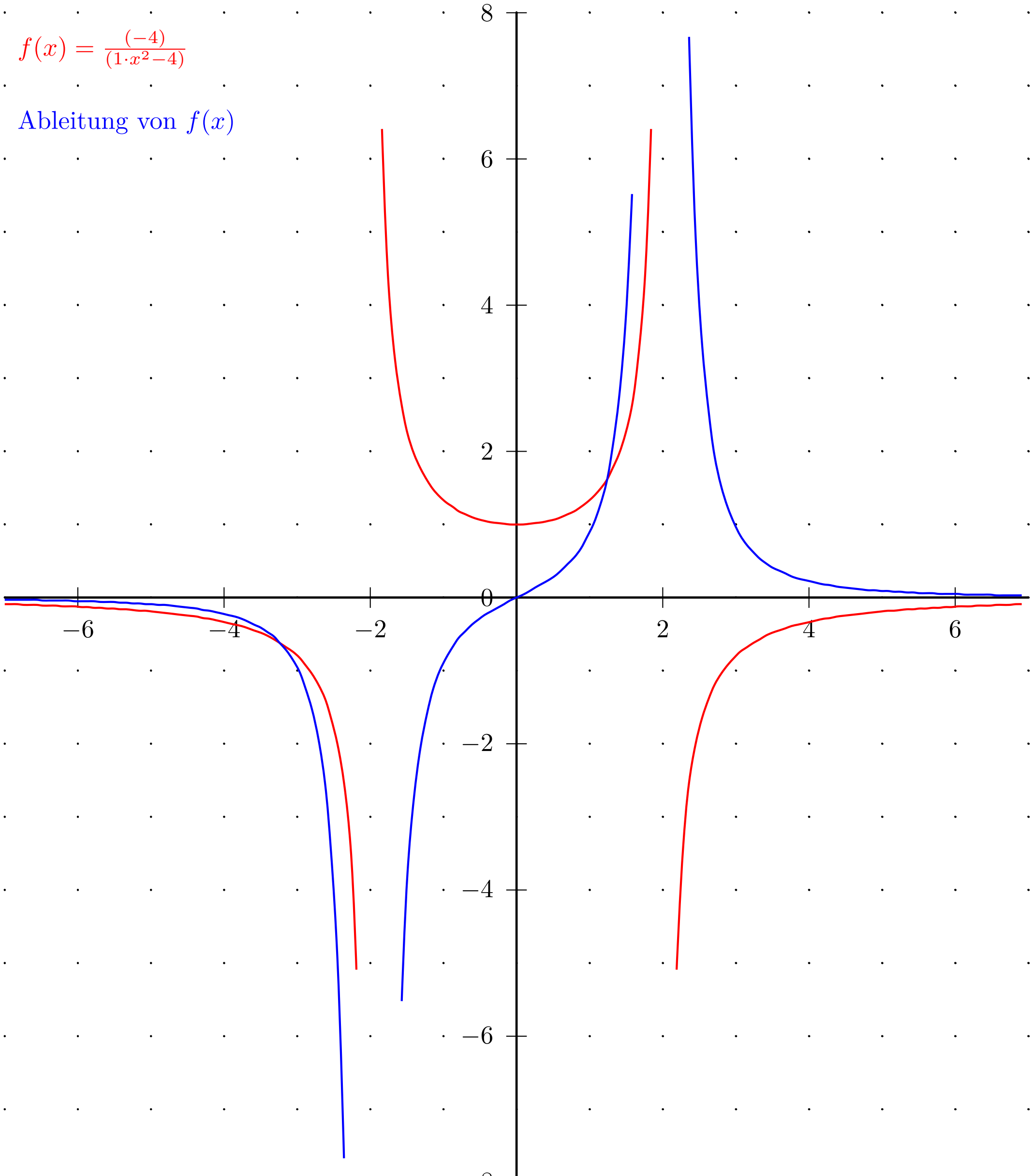
$\underline{x_10 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-2; 2[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{4}{45}$	$-0,0277$	$-0,0133$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,105$	$-0,0355$	$-\frac{2}{107}$
-6	$-\frac{1}{8}$	$-0,0469$	$-0,0273$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{105}$	$-0,0639$	$-0,0419$
-5	$-\frac{4}{21}$	$-0,0907$	$-0,0682$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{65}$	$-0,136$	$-0,121$
-4	$-\frac{1}{3}$	$-0,222$	$-0,241$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{33}$	$-0,411$	$-0,581$
-3	$-\frac{4}{5}$	$-0,96$	$-1,98$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{9}$	$-3,96$	-16
-2	$-\infty$	$3,27\cdot 10^3$	∞
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{7}$	$-3,92$	$16,1$
-1	$1\frac{1}{3}$	$-0,889$	$2,07$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{15}$	$-0,284$	$0,721$
0	1	0	$0,5$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	$0,5$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{15}$	$0,284$	$0,721$
1	$1\frac{1}{3}$	$0,889$	$2,07$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{7}$	$3,92$	$16,1$
2	$-\infty$	$-3,27\cdot 10^3$	∞
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{9}$	$3,96$	-16
3	$-\frac{4}{5}$	$0,96$	$-1,98$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{33}$	$0,411$	$-0,581$
4	$-\frac{1}{3}$	$0,222$	$-0,241$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{65}$	$0,136$	$-0,121$
5	$-\frac{4}{21}$	$0,0907$	$-0,0682$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{105}$	$0,0639$	$-0,0419$
6	$-\frac{1}{8}$	$0,0469$	$-0,0273$
$6\frac{1}{2}$	$-0,105$	$0,0355$	$-\frac{2}{107}$
7	$-\frac{4}{45}$	$0,0277$	$-0,0133$

Aufgabe (10)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}}{x^2+2x+1}$

Nenner faktorisieren:

$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \frac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}}{x^2+2x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0\cdot(x^2+2x+1) - \frac{1}{5}\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{0-(\frac{2}{5}x+\frac{2}{5})}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{-\frac{2}{5}(x+1)}{(x+1)^4}$

$= \frac{-\frac{2}{5}}{(x+1)^3}$

$= \frac{-\frac{2}{5}}{x^3+3x^2+3x+1}$

$f''(x) = \frac{0\cdot(x^3+3x^2+3x+1) - (-\frac{2}{5})\cdot(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{0-(-1\frac{1}{5}x^2-2\frac{2}{5}x-1\frac{1}{5})}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{1\frac{1}{5}x^2+2\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5}}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{1\frac{1}{5}x^2+2\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5}}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$\frac{1}{5} = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{5}}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)^2} = \infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{5}}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{5}}{x^3+3x^2+3x+1}$$

Zaehler = 0

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{1\frac{1}{5}x^2+2\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5}}{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1}$$

$Zaehler = 0$

$$1\frac{1}{5}x^2+2\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{2}{5} \pm \sqrt{\left(2\frac{2}{5}\right)^2 - 4\cdot 1\frac{1}{5}\cdot 1\frac{1}{5}}}{2\cdot 1\frac{1}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{2}{5} \pm \sqrt{0}}{2\frac{2}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{2}{5} \pm 0}{2\frac{2}{5}}$$

$x_1 = \dfrac{-2\frac{2}{5} + 0}{2\frac{2}{5}} \qquad x_2 = \dfrac{-2\frac{2}{5} - 0}{2\frac{2}{5}}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_3 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

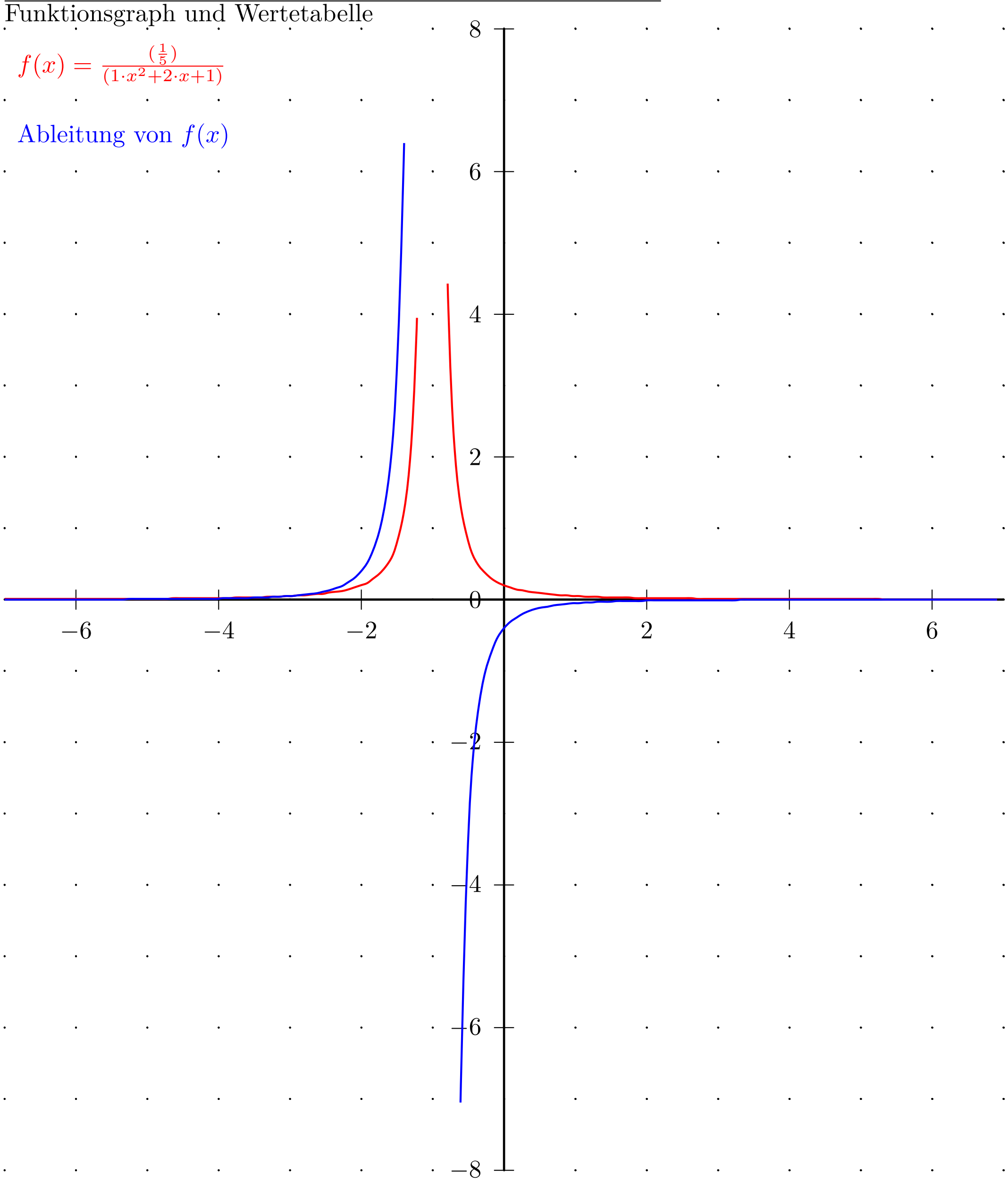
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$0,00556$	$0,00185$	$0,000926$
$-6\frac{1}{2}$	$0,00661$	$0,0024$	$0,00131$
-6	$\frac{1}{125}$	$0,0032$	$0,00192$
$-5\frac{1}{2}$	$0,00988$	$0,00439$	$0,00293$
-5	$\frac{1}{80}$	$0,00625$	$0,00469$
$-4\frac{1}{2}$	$0,0163$	$0,00933$	$0,008$
-4	$\frac{1}{45}$	$0,0148$	$0,0148$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{125}$	$0,0256$	$0,0307$
-3	$\frac{1}{20}$	$0,05$	$0,075$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{45}$	$0,119$	$0,237$
-2	$\frac{1}{5}$	$0,4$	$1,2$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$3,21$	$19,2$
-1	∞	0	$-\infty$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$-3,21$	$19,2$
0	$\frac{1}{5}$	$-0,4$	$1,2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{5}$	$-0,4$	$1,2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{45}$	$-0,119$	$0,237$
1	$\frac{1}{20}$	$-0,05$	$0,075$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{125}$	$-0,0256$	$0,0307$
2	$\frac{1}{45}$	$-0,0148$	$0,0148$
$2\frac{1}{2}$	$0,0163$	$-0,00933$	$0,008$
3	$\frac{1}{80}$	$-0,00625$	$0,00469$
$3\frac{1}{2}$	$0,00988$	$-0,00439$	$0,00293$
4	$\frac{1}{125}$	$-0,0032$	$0,00192$
$4\frac{1}{2}$	$0,00661$	$-0,0024$	$0,00131$
5	$0,00556$	$-0,00185$	$0,000926$
$5\frac{1}{2}$	$0,00473$	$-0,00146$	$0,000672$
6	$0,00408$	$-0,00117$	$0,0005$
$6\frac{1}{2}$	$0,00356$	$-0,000948$	$0,000379$
7	$0,00313$	$-0,000781$	$0,000293$

Aufgabe (11)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-1\frac{1}{2}}{x^2 - 6x + 9}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$1x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{+6 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{6 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{6+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{6-0}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

$\underline{x_1 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-1\frac{1}{2}}{(x-3)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = \dfrac{-1\frac{1}{2}}{x^2 - 6x + 9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2 - 6x + 9) - (-1\frac{1}{2}) \cdot (2x - 6)}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

$= \dfrac{0 - (-3x + 9)}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

$= \dfrac{3x - 9}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

$= \dfrac{3x - 9}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

$= \dfrac{3(x-3)}{(x-3)^4}$

$= \dfrac{3}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{3}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

$f''(x) = \dfrac{0 \cdot (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 3 \cdot (3x^2 - 18x + 27)}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$

$= \dfrac{0 - (9x^2 - 54x + 81)}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$

$= \dfrac{-9x^2 + 54x - 81}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$

$= \dfrac{-9x^2 + 54x - 81}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1\dfrac{1}{2} = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;3[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(-1\frac{1}{2})}{x^2(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{-1\frac{1}{2}}{(x-3)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{-1\frac{1}{2}}{(x-3)^2} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{3}{x^3-9x^2+27x-27} = 0$$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{3}{x^3-9x^2+27x-27}$$

Zaehler = 0

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = 3;$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]3;\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;3[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-9x^2+54x-81}{x^6-18x^5+135x^4-540x^3+1,22\cdot 10^3x^2-1,46\cdot 10^3x+729}$$

$Zaehler = 0$

$$-9x^2+54x-81 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{54^2-4\cdot(-9)\cdot(-81)}}{2\cdot(-9)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{0}}{-18}$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm 0}{-18}$$

$$x_1 = \frac{-54+0}{-18} \qquad x_2 = \frac{-54-0}{-18}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$$

$x_3 = 3; \quad$ 2-fache Nullstelle

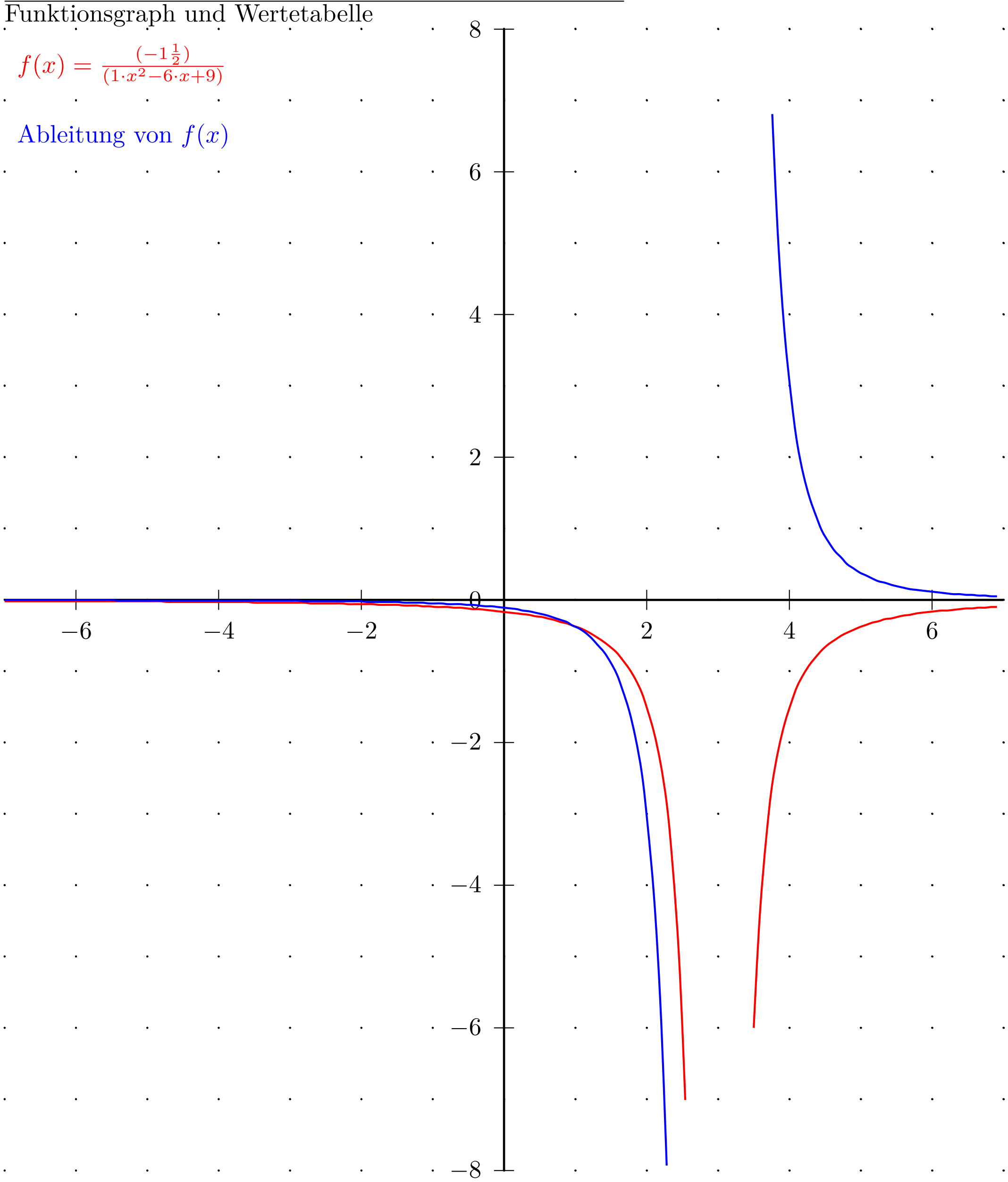
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_4 = 3; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	3	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-0,015$	$-0,003$	$-0,0009$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,0166$	$-0,0035$	$-0,0011$
-6	$-\frac{1}{54}$	$-0,00412$	$-0,00137$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,0208$	$-0,00489$	$-0,00172$
-5	$-0,0234$	$-0,00586$	$-0,0022$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{75}$	$-0,00711$	$-0,00284$
-4	$-\frac{3}{98}$	$-0,00875$	$-0,00375$
$-3\frac{1}{2}$	$-0,0355$	$-0,0109$	$-0,00504$
-3	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{72}$	$-0,00694$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{121}$	$-0,018$	$-0,00984$
-2	$-\frac{3}{50}$	$-\frac{3}{125}$	$-0,0144$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{27}$	$-0,0329$	$-0,0219$
-1	$-\frac{3}{32}$	$-0,0469$	$-0,0352$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{49}$	$-0,07$	$-0,06$
0	$-\frac{1}{6}$	$-0,111$	$-0,111$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{6}$	$-0,111$	$-0,111$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{25}$	$-0,192$	$-0,23$
1	$-\frac{3}{8}$	$-0,375$	$-0,563$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,889$	$-1,78$
2	$-1\frac{1}{2}$	-3	-9
$2\frac{1}{2}$	-6	$-24,1$	-144
3	$-\infty$	0	∞
$3\frac{1}{2}$	-6	$24,1$	-144
4	$-1\frac{1}{2}$	3	-9
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,889$	$-1,78$
5	$-\frac{3}{8}$	$0,375$	$-0,563$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{25}$	$0,192$	$-0,23$
6	$-\frac{1}{6}$	$0,111$	$-0,111$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{49}$	$0,07$	$-0,06$
7	$-\frac{3}{32}$	$0,0469$	$-0,0352$

Aufgabe (12)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{9x}{x^2+3}$
Zaehler faktorisieren:
$9x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 + 3 = 0$

$1x^2 + 3 = 0 \qquad / - 3$
$1x^2 = -3 \qquad / : 1$
$x^2 = \frac{-3}{1}$
keine Lösung

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{9x}{(x^2+3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{9x}{x^2+3}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{9 \cdot (x^2+3) - 9x \cdot 2x}{(x^2+3)^2}$
$= \frac{(9x^2+27) - 18x^2}{(x^2+3)^2}$
$= \frac{-9x^2+27}{(x^2+3)^2}$
$= \frac{-9x^2+27}{(x^2+3)^2}$
$f''(x) = \frac{(-18x) \cdot (x^4+6x^2+9) - (-9x^2+27) \cdot (4x^3+12x)}{(x^4+6x^2+9)^2}$
$= \frac{(-18x^5 - 108x^3 - 162x) - (-36x^5 + 324x)}{(x^4+6x^2+9)^2}$
$= \frac{18x^5 - 108x^3 - 486x}{(x^4+6x^2+9)^2}$
$= \frac{18x^5 - 108x^3 - 486x}{(x^4+6x^2+9)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$9x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(9)}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{-9x^2+27}{x^4+6x^2+9} = 0$

$-9x^2 + 27 = 0 \qquad / - 27$
$-9x^2 = -27 \qquad / : (-9)$
$x^2 = \dfrac{-27}{-9}$
$x = \pm\sqrt{3}$
$x_1 = 1,73 \qquad x_2 = -1,73$
$\underline{x_3 = -1,73; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1,73; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1,73) = 0,866 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1,73/-2,6)}$
$f''(1,73) = -0,866$
$f''(1,73) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,73/2,6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{-9x^2+27}{x^4+6x^2+9}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_5 = -1,73; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 1,73; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-1,73$	$< x <$	$1,73$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-1,73; 1,73[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1,73[\quad \cup \quad]1,73; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{18x^5 - 108x^3 - 486x}{x^8 + 12x^6 + 54x^4 + 108x^2 + 81}$
$Zaehler = 0$
$x(18x^4 - 108x^2 - 486) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad 18x^4 - 108x^2 - 486 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$18u^2 - 108u - 486 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{+108 \pm \sqrt{(-108)^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-486)}}{2 \cdot 18}$
$u_{1/2} = \dfrac{+108 \pm \sqrt{4,67 \cdot 10^4}}{36}$
$u_{1/2} = \dfrac{108 \pm 216}{36}$
$u_1 = \dfrac{108 + 216}{36} \qquad u_2 = \dfrac{108 - 216}{36}$
$u_1 = 9 \qquad u_2 = -3$
$x^2 = 9$

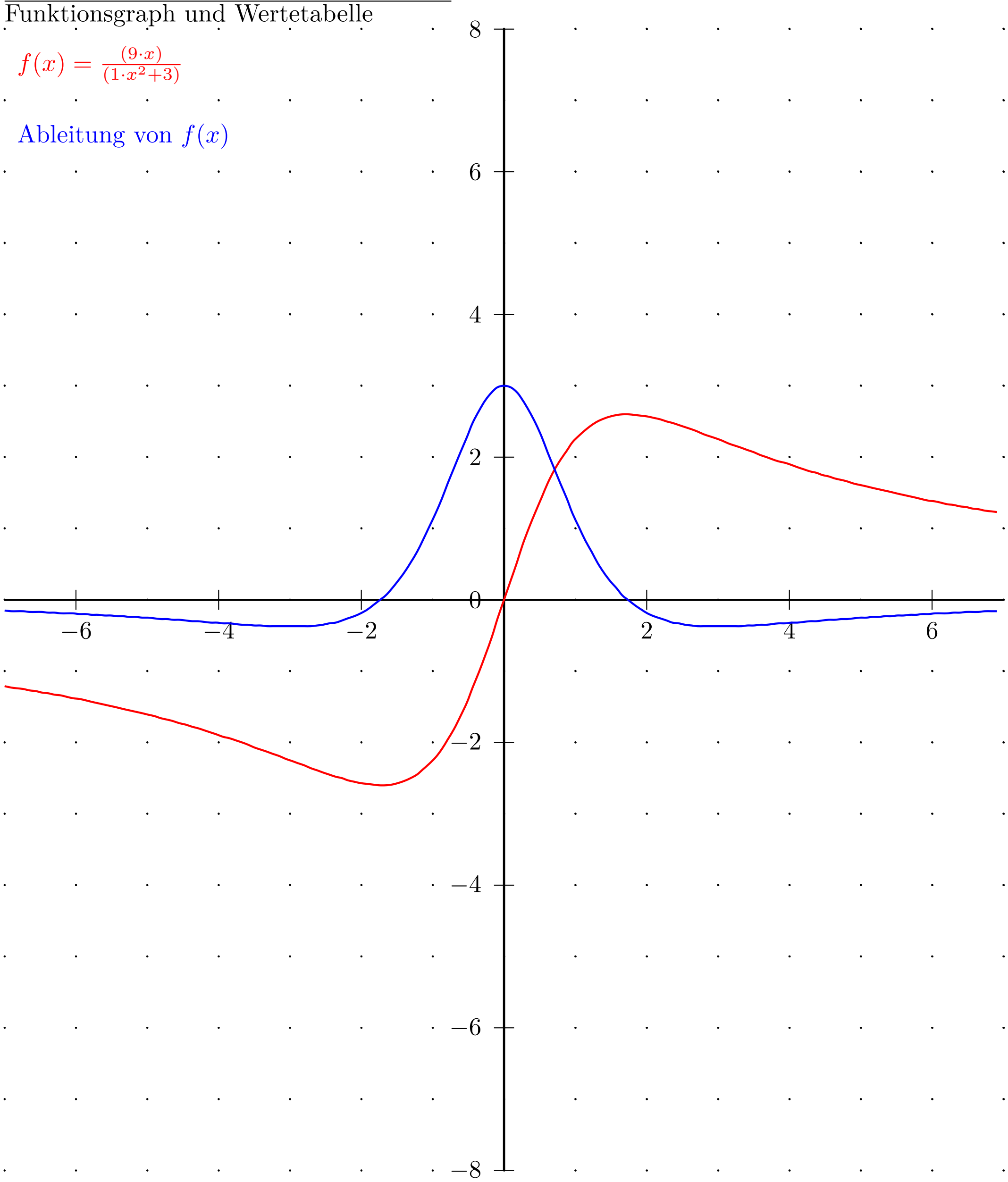
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$x^2 = -3x = \pm\sqrt{-3}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_7 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]0;3[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{11}{52}$	$-0,153$	$-0,0358$
$-6\frac{1}{2}$	$-1,29$	$-0,173$	$-0,042$
-6	$-1\frac{5}{13}$	$-0,195$	$-0,0492$
$-5\frac{1}{2}$	$-1,49$	$-0,222$	$-0,0572$
-5	$-1\frac{17}{28}$	$-0,253$	$-0,0656$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{23}{31}$	$-0,287$	$-0,0725$
-4	$-1\frac{17}{19}$	$-0,324$	$-0,0735$
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{61}$	$-0,358$	$-0,0577$
-3	$-2\frac{1}{4}$	$-0,375$	$9,57 \cdot 10^{-6}$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{16}{37}$	$-0,342$	$0,156$
-2	$-2\frac{4}{7}$	$-0,184$	$0,525$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{7}$	$0,245$	$1,26$
-1	$-2\frac{1}{4}$	$1,13$	$2,25$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{13}$	$2,34$	$2,29$
0	0	3	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	3	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{13}$	$2,34$	$-2,29$
1	$2\frac{1}{4}$	$1,13$	$-2,25$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{4}{7}$	$0,245$	$-1,26$
2	$2\frac{4}{7}$	$-0,184$	$-0,525$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{16}{37}$	$-0,342$	$-0,156$
3	$2\frac{1}{4}$	$-0,375$	$-9,57 \cdot 10^{-6}$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{4}{61}$	$-0,358$	$0,0577$
4	$1\frac{17}{19}$	$-0,324$	$0,0735$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{23}{31}$	$-0,287$	$0,0725$
5	$1\frac{17}{28}$	$-0,253$	$0,0656$
$5\frac{1}{2}$	$1,49$	$-0,222$	$0,0572$
6	$1\frac{5}{13}$	$-0,195$	$0,0492$
$6\frac{1}{2}$	$1,29$	$-0,173$	$0,042$
7	$1\frac{11}{52}$	$-0,153$	$0,0358$

Aufgabe (13)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x}{x^2}$
Zaehler faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_1 = 0;$ 1-fache Nullstelle

Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$x_2 = 0;$ 2-fache Nullstelle

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{x}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{0 - 1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{x^4}$
$= \frac{2}{x^3}$
$= \frac{2}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(1)}{x^2(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

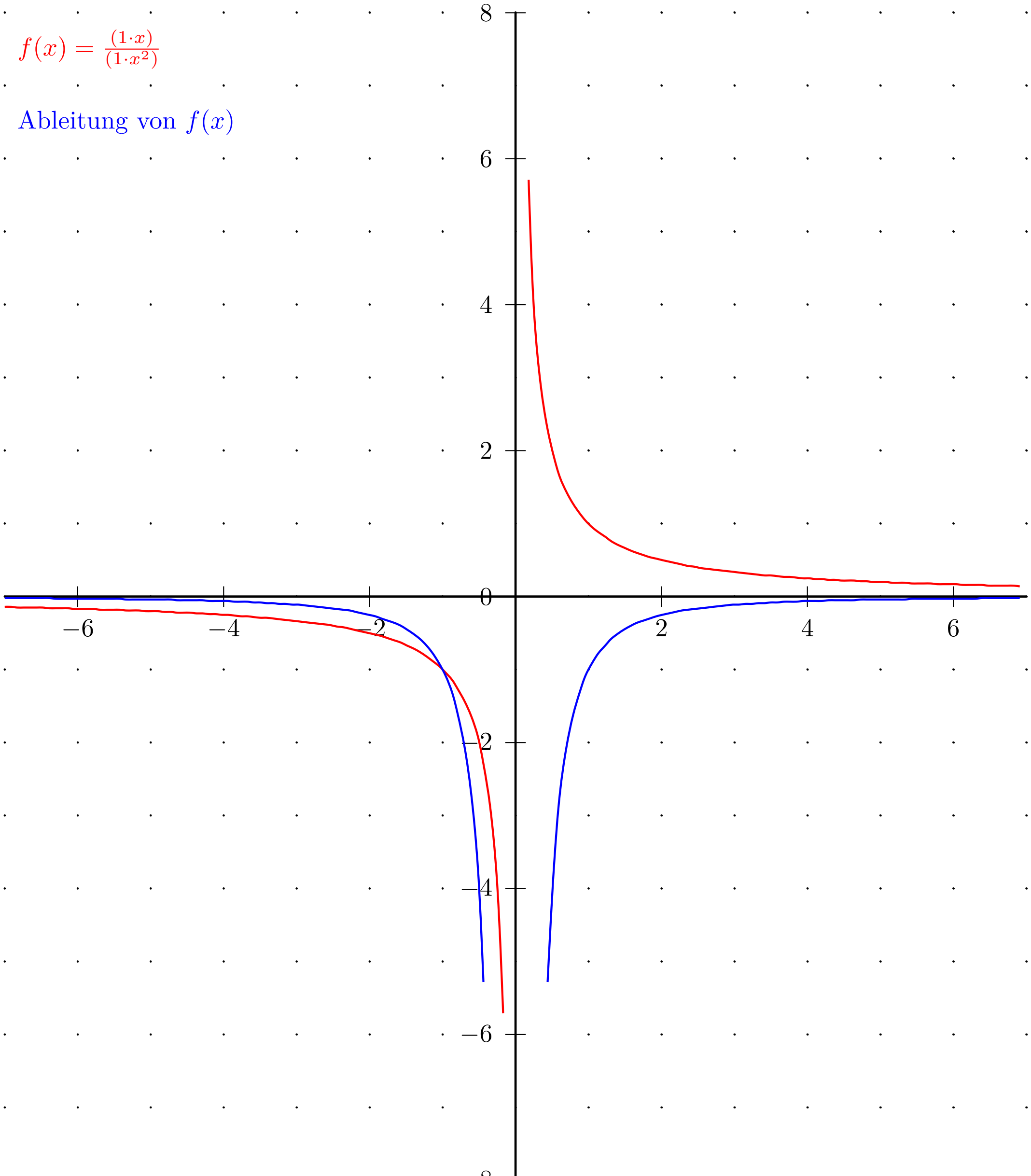
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

$x \in]-\infty;0[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$-0,00583$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$-0,00728$
-6	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{108}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$-0,012$
-5	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-4	$-\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-3	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-1	-1	-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
0	NaN	$3265\frac{15}{49}$	NaN

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	NaN	$3265\frac{15}{49}$	NaN
$\frac{1}{2}$	2	-4	16
1	1	-1	2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,445$	$0,593$
2	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
3	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
4	$\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$0,012$
6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$

Aufgabe (14)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-3x+3}{2x^2+4x+2}$

Zaehler faktorisieren:

$-3x+3=0$

$-3x+3=0 \qquad /-3$

$-3x=-3 \qquad /:(-3)$

$x=\frac{-3}{-3}$

$x=1$

$\underline{x_1 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x^2+4x+2=0$

$2x^2+4x+2=0$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{4}$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 0}{4}$

$x_1 = \frac{-4+0}{4} \qquad x_2 = \frac{-4-0}{4}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-3(x-1)}{2(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}}{x^2+2x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(-1\frac{1}{2})\cdot(x^2+2x+1)-(-1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2})\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{(-1\frac{1}{2}x^2-3x-1\frac{1}{2})-(-3x^2+3)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{1\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{1\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{1\frac{1}{2}(x+1)(x-3)}{(x+1)^4}$

$= \frac{1\frac{1}{2}(x-3)}{(x+1)^3}$

$= \frac{1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2}}{x^3+3x^2+3x+1}$

$f''(x) = \frac{1\frac{1}{2}\cdot(x^3+3x^2+3x+1)-(1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2})\cdot(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{(1\frac{1}{2}x^3+4\frac{1}{2}x^2+4\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2})-(4\frac{1}{2}x^3-4\frac{1}{2}x^2-22\frac{1}{2}x-13\frac{1}{2})}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \dfrac{-3x^3+9x^2+27x+15}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \dfrac{-3x^3+9x^2+27x+15}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}=0$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]1;\infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(-3+\frac{3}{x})}{x^2(2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-1\frac{1}{2}(x-1)}{(x+1)^2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-1\frac{1}{2}(x-1)}{(x+1)^2} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2}}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$

$1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2}=0 \qquad /+4\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}x=4\frac{1}{2} \qquad /:1\frac{1}{2}$

$x = \dfrac{4\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}$

$x = 3$

$\underline{x_4 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(3) = 0,0234 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(3/-\frac{3}{16})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2}}{x^3+3x^2+3x+1}$

Zaehler $= 0$

$\underline{x_5 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_6 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-1; 3[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-3x^3 + 9x^2 + 27x + 15}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$$

$Zaehler = 0$

$-3x^3 + 9x^2 + 27x + 15 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llll}
(-3x^3 & +9x^2 & +27x & +15 \quad) : (x+1) = -3x^2 + 12x + 15 \\
-(-3x^3 & -3x^2) & & \\
\hline
 & 12x^2 & +27x & +15 \\
 & -(12x^2 & +12x) & \\
\hline
 & & 15x & +15 \\
 & & -(15x & +15) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-3x^2 + 12x + 15 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 15}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{-6}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm 18}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 18}{-6} \qquad x_2 = \frac{-12 - 18}{-6}$$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 5$

$x_7 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

$x_8 = 5; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

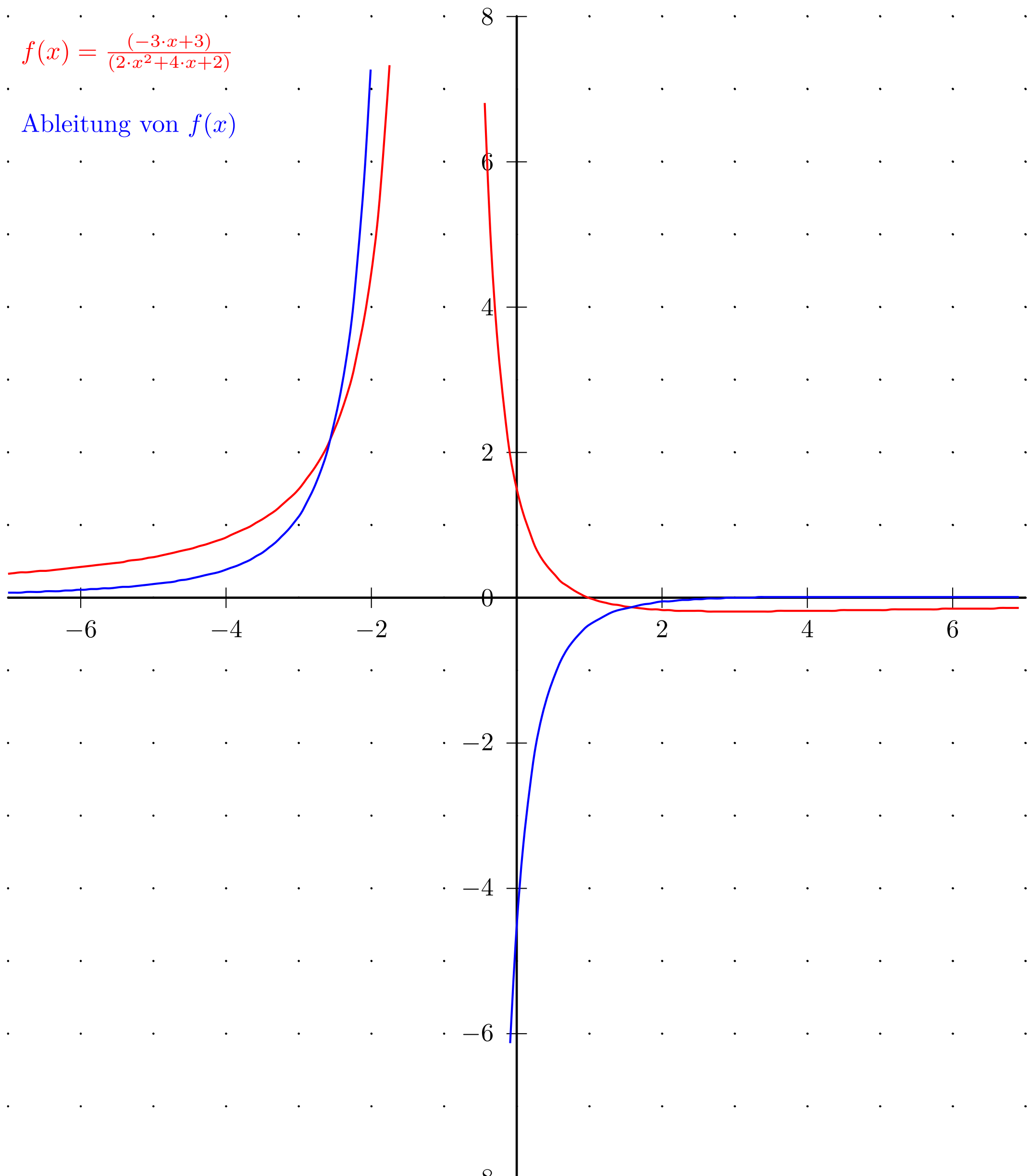
$x_9 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	5	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 5[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]5; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{36}$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{45}{121}$	$0,0857$	$0,0377$
-6	$\frac{21}{50}$	$0,108$	$0,0528$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{13}{27}$	$0,14$	$0,0768$
-5	$\frac{9}{16}$	$0,188$	$0,117$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{33}{49}$	$0,262$	$0,19$
-4	$\frac{5}{6}$	$0,389$	$0,333$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{25}$	$0,624$	$0,653$
-3	$1\frac{1}{2}$	$1,13$	$1,5$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$2,45$	$4,45$
-2	$4\frac{1}{2}$	$7,5$	21
$-1\frac{1}{2}$	15	$54,1$	313
-1	∞	$-4897\frac{47}{49}$	$-\infty$
$-\frac{1}{2}$	9	$-42,1$	265
0	$1\frac{1}{2}$	$-4,5$	15

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$1\frac{1}{2}$	$-4,5$	15
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-1,11$	$2,67$
1	0	$-0,375$	$0,75$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{25}$	$-0,144$	$0,269$
2	$-\frac{1}{6}$	$-0,0556$	$0,111$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{49}$	$-0,0175$	$0,05$
3	$-\frac{3}{16}$	$-1,79\cdot 10^{-6}$	$0,0234$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{27}$	$0,00823$	$0,011$
4	$-\frac{9}{50}$	$0,012$	$0,0048$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{121}$	$0,0135$	$0,00164$
5	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{72}$	$7,88\cdot 10^{-8}$
$5\frac{1}{2}$	$-0,16$	$0,0137$	$-0,00084$
6	$-\frac{15}{98}$	$0,0131$	$-0,00125$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{75}$	$0,0124$	$-0,00142$
7	$-\frac{9}{64}$	$0,0117$	$-0,00146$

Aufgabe (15)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}}$

Zaehler faktorisieren:

$\frac{1}{2}x + 1 = 0$

$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$

$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$

$x = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$

$x = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} = 0 \qquad / - \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{4} \qquad / : \frac{1}{2}$

$x^2 = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{\frac{1}{2}(x+2)}{\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x+2}{x^2+\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+\frac{1}{2}) - (x+2) \cdot 2x}{(x^2+\frac{1}{2})^2}$

$= \frac{(x^2+\frac{1}{2}) - (2x^2+4x)}{(x^2+\frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-x^2-4x+\frac{1}{2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-x^2-4x+\frac{1}{2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \frac{(-2x-4) \cdot (x^4+x^2+\frac{1}{4}) - (-x^2-4x+\frac{1}{2}) \cdot (4x^3+2x)}{(x^4+x^2+\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{(-2x^5-4x^4-2x^3-4x^2-\frac{1}{2}x-1) - (-4x^5-16x^4-8x^2+x)}{(x^4+x^2+\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{2x^5+12x^4-2x^3+4x^2-1\frac{1}{2}x-1}{(x^4+x^2+\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{2x^5+12x^4-2x^3+4x^2-1\frac{1}{2}x-1}{(x^4+x^2+\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$x + 2 = 0$

$x_2 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(\frac{1}{2} + x)}{x^2(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + \frac{1}{2}}{x^4 + x^2 + \frac{1}{4}} = 0$$

$$-x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{18}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm 4,24}{-2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 4,24}{-2} \qquad x_2 = \frac{4 - 4,24}{-2}$$

$x_1 = -4,12 \qquad x_2 = 0,121$

$x_3 = -4,12; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_4 = 0,121; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f''(-4,12) = 0,0139 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(-4,12/-0,121)$

$f''(0,121) = -16$

$f''(0,121) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(0,121/4,12)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + \frac{1}{2}}{x^4 + x^2 + \frac{1}{4}}$$

Zaehler $= 0$

$x_5 = -4,12; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_6 = 0,121; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-4,12$	$< x <$	$0,121$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-4,12; 0,121[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -4,12[\quad \cup \quad]0,121; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{2x^5 + 12x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1}{x^8 + 2x^6 + 1\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}}$$

$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$

$x_7 = -6,22;$ 1-fache Nullstelle

$x_8 = -0,308;$ 1-fache Nullstelle

$x_9 = 0,523;$ 1-fache Nullstelle

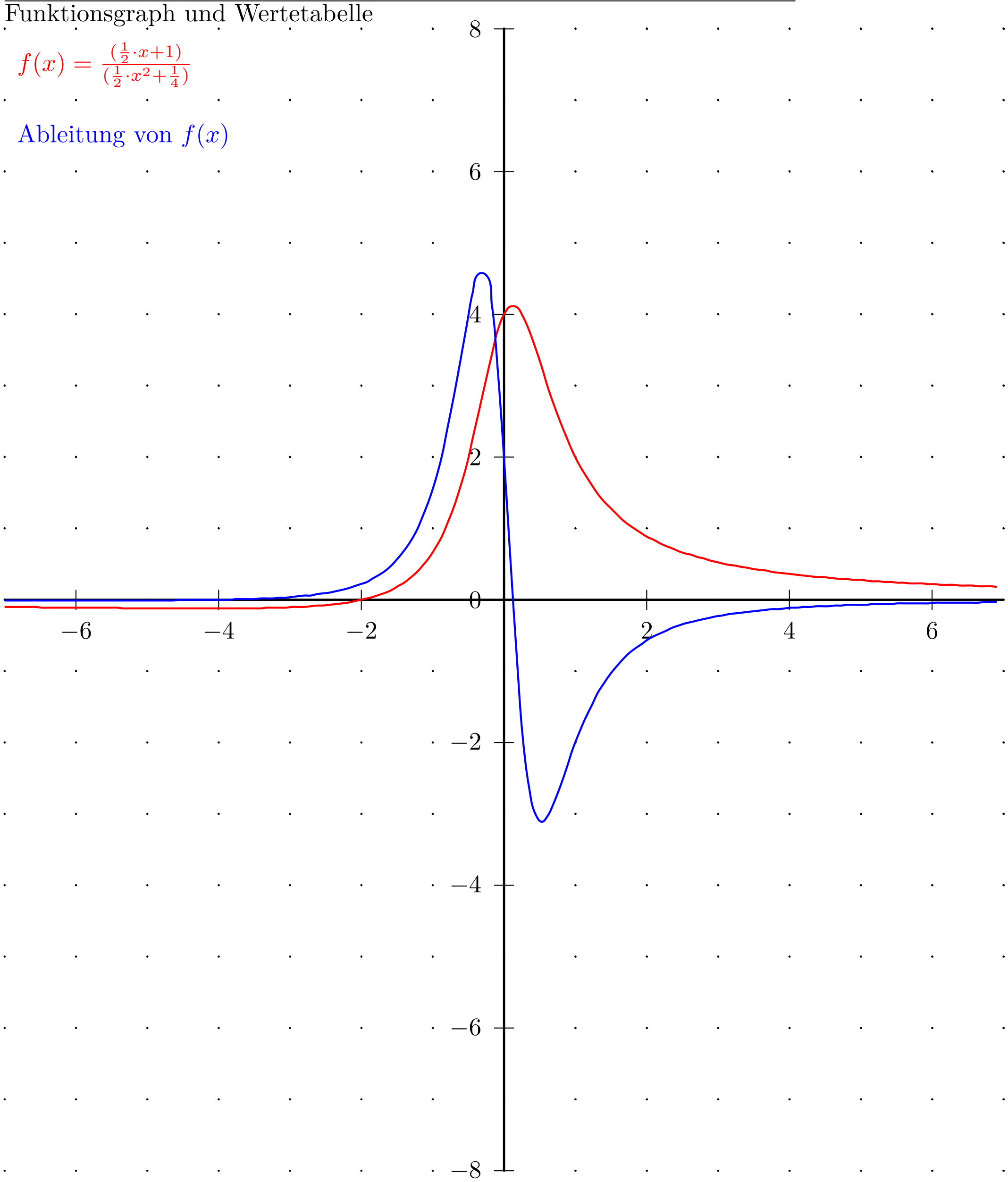
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-6,22$	$< x <$	$-0,308$	$< x <$	$0,523$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-6,22; -0,308[\quad \cup \quad]0,523; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -6,22[\quad \cup \quad]-0,308; 0,523[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{10}{99}$	$-0,00837$	$-0,000651$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{19}$	$-0,00862$	$-0,000317$
-6	$-\frac{8}{73}$	$-0,00863$	$0,000329$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{14}{123}$	$-\frac{1}{122}$	$0,00154$
-5	$-\frac{2}{17}$	$-0,00692$	$0,0038$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{10}{83}$	$-0,00406$	$0,00809$
-4	$-\frac{4}{33}$	$0,00184$	$0,0165$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{17}$	$0,0138$	$0,0337$
-3	$-\frac{2}{19}$	$0,0388$	$0,0712$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{27}$	$0,0933$	$0,16$
-2	0	$0,222$	$0,395$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$0,562$	$1,09$
-1	$\frac{2}{3}$	$1,56$	$3,26$
$-\frac{1}{2}$	2	4	$5,33$
0	4	2	-16

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	2	-16
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$-3,11$	$-0,596$
1	2	-2	$2,67$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{11}$	$-1,02$	$1,31$
2	$\frac{8}{9}$	$-0,568$	$0,615$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,346$	$0,315$
3	$\frac{10}{19}$	$-0,227$	$0,176$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{22}{51}$	$-0,158$	$0,106$
4	$\frac{4}{11}$	$-0,116$	$0,0681$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{26}{83}$	$-0,0877$	$0,0459$
5	$\frac{14}{51}$	$-0,0684$	$0,0321$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{10}{41}$	$-0,0547$	$0,0233$
6	$\frac{16}{73}$	$-0,0447$	$0,0174$
$6\frac{1}{2}$	$0,199$	$-0,0371$	$0,0132$
7	$\frac{2}{11}$	$-0,0312$	$0,0103$

Aufgabe (16)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\frac{-x+3}{x^2-9}$

Zaehler faktorisieren:

$-x+3=0$

$-1x+3=0 \qquad /-3$

$-1x=-3 \qquad /:(-1)$

$x=\frac{-3}{-1}$

$x=3$

$\underline{x_1=3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2-9=0$

$1x^2-9=0 \qquad /+9$

$1x^2=9 \qquad /:1$

$x^2=\frac{9}{1}$

$x=\pm\sqrt{9}$

$x_1=3 \qquad x_2=-3$

$\underline{x_2=-3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3=3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\frac{-(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$

• Term gekürzen

$f\left(x\right)=\frac{-1}{(x+3)}$

$f\left(x\right)=\frac{-1}{x+3}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\frac{0\cdot(x+3)-(-1)\cdot 1}{(x+3)^2}$

$=\frac{0-(-1)}{(x+3)^2}$

$=\frac{1}{(x+3)^2}$

$=\frac{1}{(x+3)^2}$

$f''\left(x\right)=\frac{0\cdot(x^2+6x+9)-1\cdot(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$

$=\frac{0-(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$

$=\frac{-2x-6}{(x^2+6x+9)^2}$

$=\frac{-2x-6}{(x^2+6x+9)^2}$

$=\frac{-2(x+3)}{(x+3)^4}$

$=\frac{-2}{(x+3)^3}$

$= \frac{-2}{x^3+9x^2+27x+27}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(-1+\frac{3}{x})}{x^2(1-\frac{9}{x^2})} = 0$$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$$\lim_{x\to-3^+} \frac{-1}{(x+3)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-3^-} \frac{-1}{(x+3)} = \infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{1}{x^2+6x+9} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{1}{x^2+6x+9}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -3; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]-3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-2}{x^3+9x^2+27x+27}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

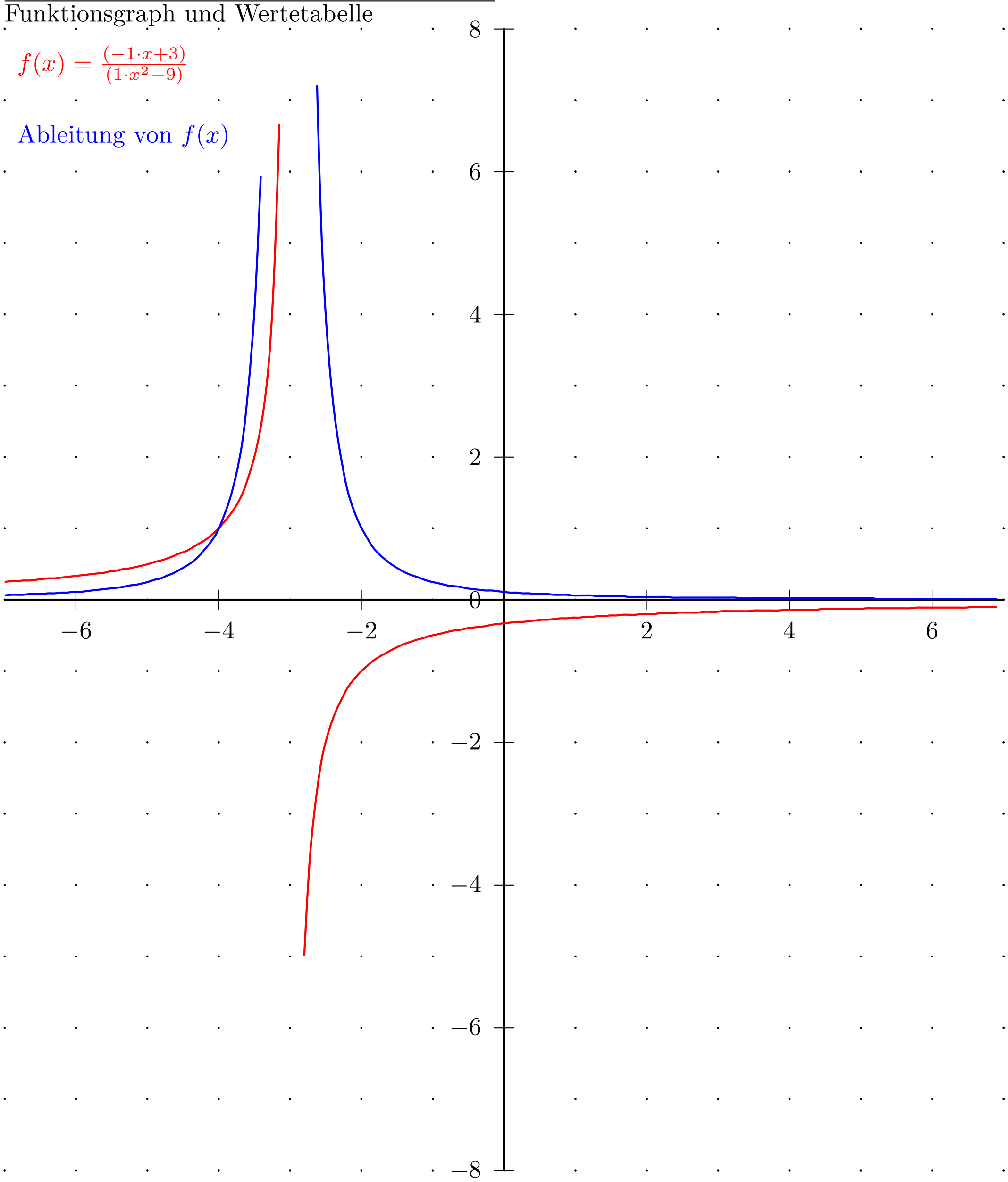
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_5 = -3; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-3	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-3; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{4}$	$0,0625$	$\frac{1}{32}$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$0,0816$	$0,0466$
-6	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,0741$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
-5	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,445$	$0,593$
-4	1	1	2
$-3\frac{1}{2}$	2	4	16
-3	∞	$-3265\frac{15}{49}$	$-\infty$
$-2\frac{1}{2}$	-2	4	-16
-2	-1	1	-2
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,445$	$-0,593$
-1	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
0	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,0741$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,0741$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$0,0816$	$-0,0466$
1	$-\frac{1}{4}$	$0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,0219$
2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{4}{121}$	$-0,012$
3	NaN	$\frac{1}{36}$	NaN
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$0,0237$	$-0,00728$
4	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$-0,00583$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{15}$	$0,0178$	$-0,00474$
5	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$-0,00391$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{17}$	$0,0138$	$-0,00326$
6	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$-0,00274$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{19}$	$0,0111$	$-0,00233$
7	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$-0,002$

Aufgabe (17)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$
Zaehler faktorisieren:
$2x + 1 = 0$

$2x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$2x = -1 \qquad / : 2$
$x = \frac{-1}{2}$
$x = -\frac{1}{2}$
$\underline{x_1 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{2(x+\frac{1}{2})}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{2 \cdot x^2 - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x^2 - (4x^2 + 2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x^2 - 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x^2 - 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2(x+1)x}{x^4}$
$= \frac{-2(x+1)}{x^3}$
$= \frac{-2x-2}{x^3}$
$f''(x) = \frac{(-2) \cdot x^3 - (-2x-2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{(-2x^3) - (-6x^3 - 6x^2)}{(x^3)^2}$
$= \frac{4x^3 + 6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{4x^3 + 6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{4(x+1\frac{1}{2})x^2}{x^6}$
$= \frac{4(x+1\frac{1}{2})}{x^4}$
$= \frac{4x+6}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$2x + 1 = 0$
$x_3 = -\frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$x \in]-\frac{1}{2}; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x(2+x)}{x^2(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2(x+\frac{1}{2})}{x^2} = \infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2(x+\frac{1}{2})}{x^2} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-2x-2}{x^3} = 0$

$-2x - 2 = 0 \qquad / + 2$
$-2x = 2 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{2}{-2}$
$x = -1$
$x_4 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(-1/-1)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-2x-2}{x^3}$
Zaehler = 0
$x_5 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1; 0[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{4x+6}{x^4}$

$Zaehler = 0$

$4x + 6 = 0 \qquad / - 6$
$4x = -6 \qquad / : 4$
$x = \frac{-6}{4}$
$x = -1\frac{1}{2}$
$\underline{x_7 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_8 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-1\frac{1}{2}; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1\frac{1}{2}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{13}{49}$	$-0,035$	$-0,00916$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,284$	$-0,0401$	$-0,0112$
-6	$-\frac{11}{36}$	$-\frac{5}{108}$	$-\frac{1}{72}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{40}{121}$	$-0,0541$	$-0,0175$
-5	$-\frac{9}{25}$	$-\frac{8}{125}$	$-0,0224$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{32}{81}$	$-0,0768$	$-0,0293$
-4	$-\frac{7}{16}$	$-0,0938$	$-0,0391$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{24}{49}$	$-0,117$	$-0,0533$
-3	$-\frac{5}{9}$	$-0,148$	$-\frac{2}{27}$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{25}$	$-0,192$	$-0,102$
-2	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-0,125$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{9}$	$-0,296$	$0,000108$
-1	-1	$0,000613$	2
$-\frac{1}{2}$	0	$8,03$	$64,2$
0	∞	$6530\frac{30}{49}$	$-\infty$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	∞	$6530\frac{30}{49}$	$-\infty$
$\frac{1}{2}$	8	-24	128
1	3	-4	10
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{9}$	$-1,48$	$2,37$
2	$1\frac{1}{4}$	$-0,75$	$0,875$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{24}{25}$	$-0,448$	$0,41$
3	$\frac{7}{9}$	$-0,296$	$0,222$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{32}{49}$	$-0,21$	$0,133$
4	$\frac{9}{16}$	$-0,156$	$0,0859$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{40}{81}$	$-0,121$	$0,0585$
5	$\frac{11}{25}$	$-0,096$	$0,0416$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{48}{121}$	$-0,0781$	$0,0306$
6	$\frac{13}{36}$	$-\frac{7}{108}$	$0,0231$
$6\frac{1}{2}$	$0,331$	$-0,0546$	$0,0179$
7	$\frac{15}{49}$	$-0,0466$	$0,0142$

Aufgabe (18)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$
Zaehler faktorisieren:
$3x - 1 = 0$

$3x - 1 = 0 \quad / + 1$
$3x = 1 \quad / : 3$
$x = \frac{1}{3}$
$x = \frac{1}{3}$
$\underline{x_1 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{3(x-\frac{1}{3})}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{3 \cdot x^2 - (3x-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{3x^2 - (6x^2 - 2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{-3x^2 + 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-3x^2 + 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-3x(x-\frac{2}{3})}{x^4}$
$= \frac{-3(x-\frac{2}{3})}{x^3}$
$= \frac{-3x+2}{x^3}$
$f''(x) = \frac{(-3) \cdot x^3 - (-3x+2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{(-3x^3) - (-9x^3 + 6x^2)}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^3 - 6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^3 - 6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^2(x-1)}{x^6}$
$= \frac{6(x-1)}{x^4}$
$= \frac{6x-6}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$3x - 1 = 0$
$x_3 = \frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in] - \infty; 0[\quad \cup \quad]0; \frac{1}{3}[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(3 - \frac{1}{x})}{x^2(1)} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3(x - \frac{1}{3})}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3(x - \frac{1}{3})}{x^2} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{-3x + 2}{x^3} = 0$

$-3x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-3x = -2 \qquad / : (-3)$
$x = \frac{-2}{-3}$
$x = \frac{2}{3}$
$x_4 = \frac{2}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f''(\frac{2}{3}) = -10\frac{1}{8}$
$f''(\frac{2}{3}) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(\frac{2}{3}/2\frac{1}{4})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-3x + 2}{x^3}$
Zaehler $= 0$
$x_5 = \frac{2}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	$\frac{2}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0; \frac{2}{3}[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]\frac{2}{3}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{6x-6}{x^4}$

$Zaehler = 0$

$6x - 6 = 0 \qquad / + 6$

$6x = 6 \qquad / : 6$

$x = \frac{6}{6}$

$x = 1$

$x_7 = 1; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

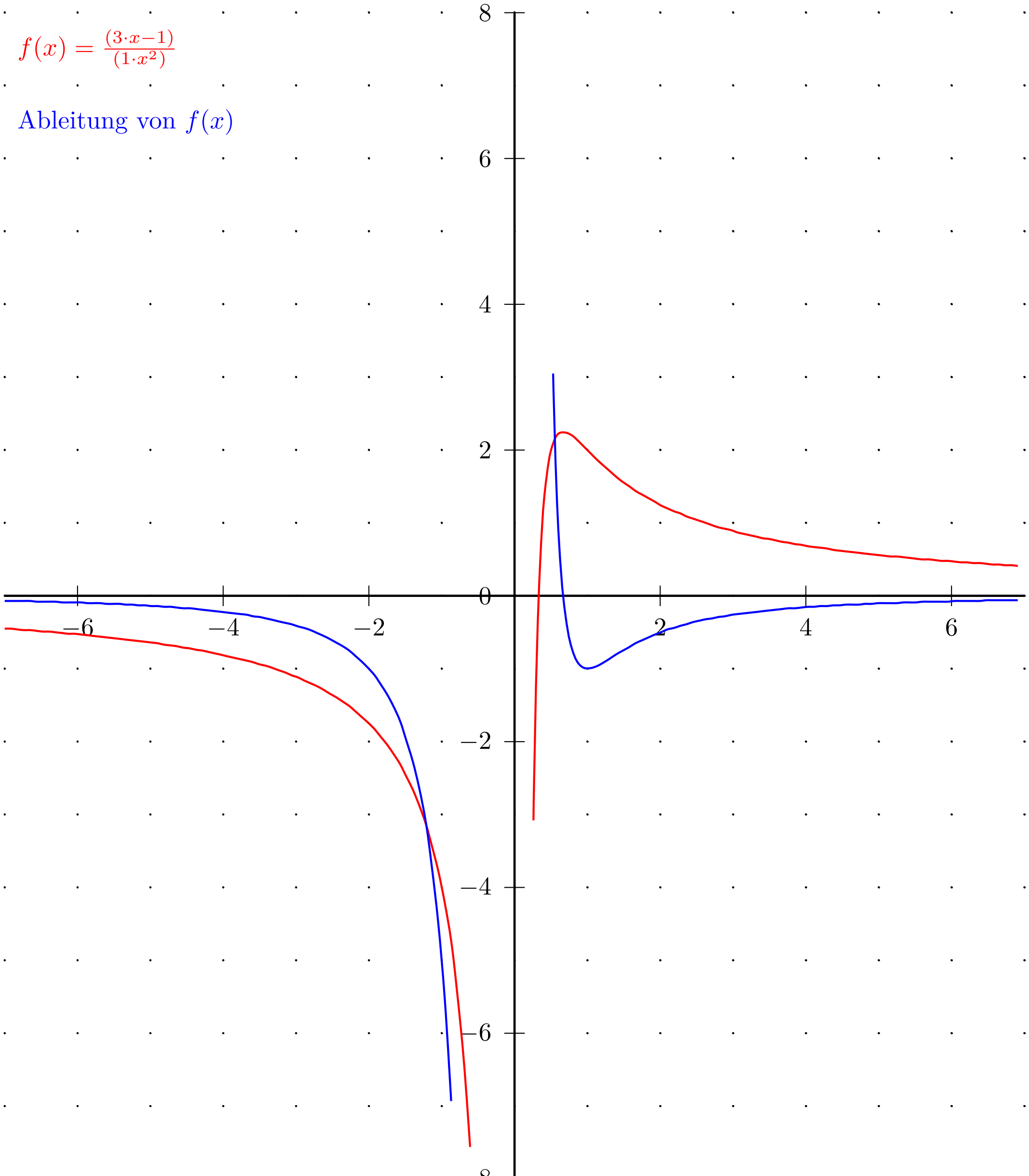
$x_8 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 1[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{22}{49}$	$-0,0671$	$-0,02$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,485$	$-0,0783$	$-\frac{3}{119}$
-6	$-\frac{19}{36}$	$-\frac{5}{54}$	$-0,0324$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{70}{121}$	$-0,111$	$-0,0426$
-5	$-\frac{16}{25}$	$-0,136$	$-0,0576$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{58}{81}$	$-0,17$	$-0,0805$
-4	$-\frac{13}{16}$	$-0,219$	$-0,117$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{46}{49}$	$-0,292$	$-0,18$
-3	$-1\frac{1}{9}$	$-0,407$	$-0,296$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{9}{25}$	$-0,608$	$-0,538$
-2	$-1\frac{3}{4}$	-1	$-1,13$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{9}$	$-1,93$	$-2,96$
-1	-4	-5	-12
$-\frac{1}{2}$	-10	$-28,1$	-144
0	$-\infty$	$9795\frac{45}{49}$	∞

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\infty$	$9795\frac{45}{49}$	∞
$\frac{1}{2}$	2	$4,02$	$-48,1$
1	2	-1	$-0,00123$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{9}$	$-0,741$	$0,593$
2	$1\frac{1}{4}$	$-0,5$	$0,375$
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{25}$	$-0,352$	$0,23$
3	$\frac{8}{9}$	$-0,259$	$0,148$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{38}{49}$	$-0,198$	$0,1$
4	$\frac{11}{16}$	$-0,156$	$0,0703$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{50}{81}$	$-0,126$	$0,0512$
5	$\frac{14}{25}$	$-0,104$	$0,0384$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{62}{121}$	$-0,0872$	$0,0295$
6	$\frac{17}{36}$	$-\frac{2}{27}$	$0,0231$
$6\frac{1}{2}$	$0,438$	$-0,0637$	$0,0185$
7	$\frac{20}{49}$	$-0,0554$	$0,015$

Aufgabe (19)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-4x + \frac{1}{2}}{x^2 + 4}$

Zaehler faktorisieren:

$-4x + \dfrac{1}{2} = 0$

$-4x + \dfrac{1}{2} = 0 \qquad / -\dfrac{1}{2}$

$-4x = -\dfrac{1}{2} \qquad / : (-4)$

$x = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-4}$

$x = \dfrac{1}{8}$

$\underline{x_1 = \dfrac{1}{8}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 4 = 0$

$1x^2 + 4 = 0 \qquad / -4$

$1x^2 = -4 \qquad / : 1$

$x^2 = \dfrac{-4}{1}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-4(x - \frac{1}{8})}{(x^2 + 4)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{-4x + \frac{1}{2}}{x^2 + 4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(-4) \cdot (x^2 + 4) - (-4x + \frac{1}{2}) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2}$

$= \dfrac{(-4x^2 - 16) - (-8x^2 + x)}{(x^2 + 4)^2}$

$= \dfrac{4x^2 - x - 16}{(x^2 + 4)^2}$

$= \dfrac{4x^2 - x - 16}{(x^2 + 4)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(8x - 1) \cdot (x^4 + 8x^2 + 16) - (4x^2 - x - 16) \cdot (4x^3 + 16x)}{(x^4 + 8x^2 + 16)^2}$

$= \dfrac{(8x^5 - x^4 + 64x^3 - 8x^2 + 128x - 16) - (16x^5 - 4x^4 - 16x^2 - 256x)}{(x^4 + 8x^2 + 16)^2}$

$= \dfrac{-8x^5 + 3x^4 + 64x^3 + 8x^2 + 384x - 16}{(x^4 + 8x^2 + 16)^2}$

$= \dfrac{-8x^5 + 3x^4 + 64x^3 + 8x^2 + 384x - 16}{(x^4 + 8x^2 + 16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-4x + \dfrac{1}{2} = 0$

$\underline{x_2 = \dfrac{1}{8}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$\frac{1}{8}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; \frac{1}{8}[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]\frac{1}{8}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(-4 + \frac{\frac{1}{2}}{x})}{x^2(1 + \frac{4}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{4x^2 - x - 16}{x^4 + 8x^2 + 16} = 0$

$4x^2 - x - 16 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-16)}}{2 \cdot 4}$

$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{257}}{8}$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm 16}{8}$

$x_1 = \frac{1 + 16}{8} \qquad x_2 = \frac{1 - 16}{8}$

$x_1 = 2,13 \qquad x_2 = -1,88$

$x_3 = -1,88; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_4 = 2,13; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f''(-1,88) = -0,283$

$f''(-1,88) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-1,88/1,06)$

$f''(2,13) = 0,22 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(2,13/-0,939)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{4x^2 - x - 16}{x^4 + 8x^2 + 16}$

Zaehler $= 0$

$x_5 = -1,88; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_6 = 2,13; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-1,88$	$< x <$	$2,13$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,88[\quad \cup \quad]2,13; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-1,88; 2,13[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-8x^5 + 3x^4 + 64x^3 + 8x^2 + 384x - 16}{x^8 + 16x^6 + 96x^4 + 256x^2 + 256}$

$Zaehler = 0$

$Numerische Suche:$
$x_7 = -3,3;$ 1-fache Nullstelle
$x_8 = 0,0416;$ 1-fache Nullstelle
$x_9 = 3,64;$ 1-fache Nullstelle

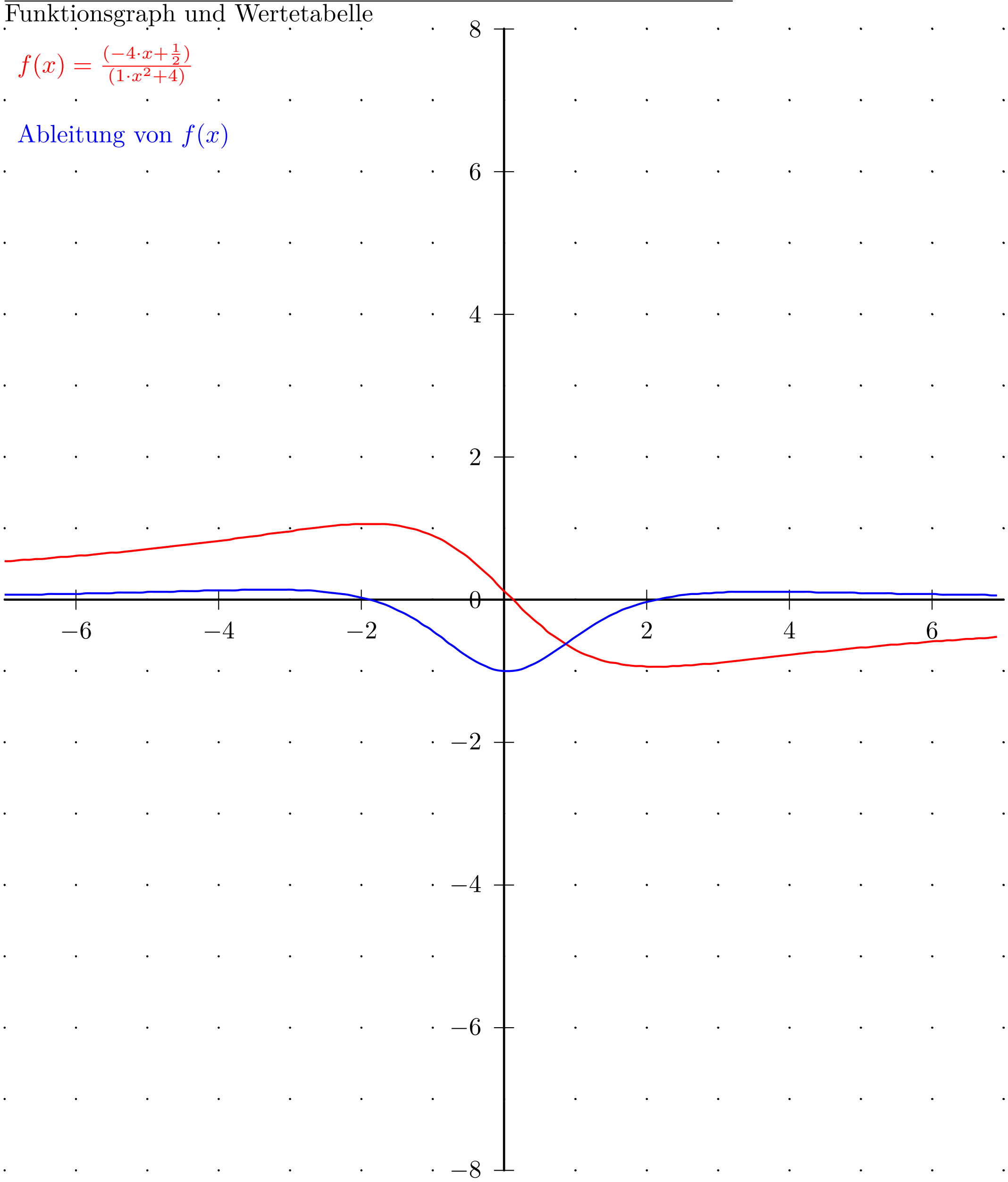
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-3,3$	$< x <$	$0,0416$	$< x <$	$3,64$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3,3[\quad \cup \quad]0,0416; 3,64[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-3,3; 0,0416[\quad \cup \quad]3,64; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{57}{106}$	$0,0666$	$0,0149$
$-6\frac{1}{2}$	$0,573$	$0,0746$	$0,0171$
-6	$\frac{49}{80}$	$0,0838$	$0,0196$
$-5\frac{1}{2}$	$0,657$	$0,0942$	$0,0221$
-5	$\frac{41}{58}$	$0,106$	$0,0242$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{74}{97}$	$0,118$	$0,0248$
-4	$\frac{33}{40}$	$\frac{13}{100}$	$0,0215$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{58}{65}$	$0,138$	$0,00926$
-3	$\frac{25}{26}$	$0,136$	$-0,0223$
$-2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{41}$	$0,109$	$-0,0931$
-2	$1\frac{1}{16}$	$0,0312$	$-0,234$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{25}$	$-0,141$	$-0,468$
-1	$\frac{9}{10}$	$-0,44$	$-0,712$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{10}{17}$	$-0,803$	$-0,655$
0	$\frac{1}{8}$	-1	$-0,0625$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{8}$	-1	$-0,0625$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{17}$	$-0,858$	$0,57$
1	$-\frac{7}{10}$	$-0,52$	$0,696$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{22}{25}$	$-0,218$	$0,49$
2	$-\frac{15}{16}$	$-0,0313$	$0,266$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{38}{41}$	$0,0619$	$0,12$
3	$-\frac{23}{26}$	$0,101$	$0,0432$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{54}{65}$	$0,112$	$0,006$
4	$-\frac{31}{40}$	$0,11$	$-0,0105$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{70}{97}$	$0,103$	$-0,0168$
5	$-\frac{39}{58}$	$0,0939$	$-0,0184$
$5\frac{1}{2}$	$-0,628$	$0,0848$	$-0,0178$
6	$-\frac{47}{80}$	$0,0763$	$-0,0164$
$6\frac{1}{2}$	$-0,551$	$0,0685$	$-0,0147$
7	$-\frac{55}{106}$	$0,0616$	$-0,013$

Aufgabe (20)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{2x - \frac{1}{4}}{x^2 - 4}$

Zaehler faktorisieren:

$2x - \frac{1}{4} = 0$

$2x - \frac{1}{4} = 0 \qquad / + \frac{1}{4}$

$2x = \frac{1}{4} \qquad / : 2$

$x = \frac{\frac{1}{4}}{2}$

$x = \frac{1}{8}$

$\underline{x_1 = \frac{1}{8}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 4 = 0$

$1x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$1x^2 = 4 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x + 2)(x - 2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$f(x) = \frac{2x - \frac{1}{4}}{x^2 - 4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 4) - (2x - \frac{1}{4}) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$

$= \frac{(2x^2 - 8) - (4x^2 - \frac{1}{2}x)}{(x^2 - 4)^2}$

$= \frac{-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8}{(x^2 - 4)^2}$

$= \frac{-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8}{(x^2 - 4)^2}$

$f''(x) = \frac{(-4x + \frac{1}{2}) \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) - (-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8) \cdot (4x^3 - 16x)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{(-4x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 32x^3 - 4x^2 - 64x + 8) - (-8x^5 + 2x^4 - 8x^2 + 128x)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{4x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 192x + 8}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{4x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 192x + 8}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$2x - \frac{1}{4} = 0$
$\underline{x_4 = \frac{1}{8}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	$\frac{1}{8}$	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2; \frac{1}{8}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]\frac{1}{8}; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(2 - \frac{\frac{1}{4}}{x})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = 0$$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$$\lim_{x \to -2^+} \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)} = \infty$$
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)} = \infty$$
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = \frac{-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$$
$$-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$$
$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-63\frac{3}{4}}}{-4}$$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$$f'(x) = \frac{-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$$
Zaehler $= 0$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_5 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{4x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 192x + 8}{x^8 - 16x^6 + 96x^4 - 256x^2 + 256}$

$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$

$x_7 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_8 = 0,0417; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_9 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_10 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

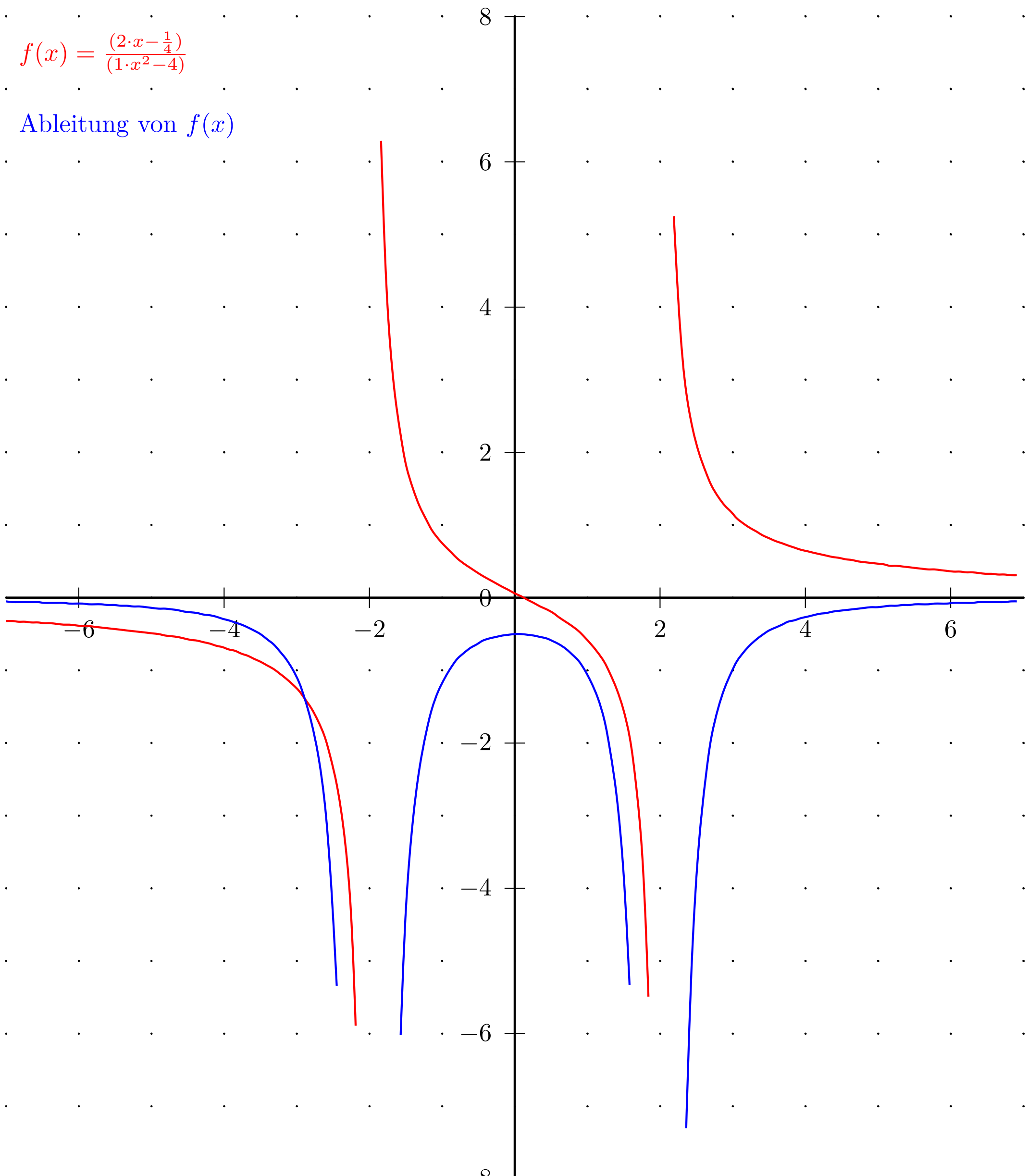
$x_11 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x <$	$0,0417$	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-2; 0,0417[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0,0417; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{19}{60}$	$-0,0541$	$-0,0196$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,346$	$-0,0654$	$-0,0264$
-6	$-0,383$	$-0,0811$	$-0,0369$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{7}$	$-0,103$	$-0,054$
-5	$-\frac{41}{84}$	$-0,137$	$-0,0842$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{37}{65}$	$-0,192$	$-0,143$
-4	$-\frac{11}{16}$	$-0,292$	$-0,274$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{29}{33}$	$-0,503$	$-0,641$
-3	$-1\frac{1}{4}$	$-1,1$	$-2,14$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{3}$	$-4,3$	-17
-2	$-\infty$	$3,47 \cdot 10^3$	∞
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{6}{7}$	$-4,33$	17
-1	$\frac{3}{4}$	$-1,17$	$2,06$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-0,622$	$0,51$
0	$\frac{1}{16}$	$-0,5$	$0,0313$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{16}$	$-0,5$	$0,0313$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-0,587$	$-0,42$
1	$-\frac{7}{12}$	$-1,06$	$-1,8$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{4}{7}$	$-3,84$	-15
2	∞	$3,06 \cdot 10^3$	$-\infty$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{9}$	$-3,81$	15
3	$1\frac{3}{20}$	$-0,98$	$1,89$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{9}{11}$	$-0,452$	$0,568$
4	$\frac{31}{48}$	$-0,264$	$0,244$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{7}{13}$	$-0,175$	$0,128$
5	$\frac{13}{28}$	$-0,126$	$0,0756$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{43}{105}$	$-0,0954$	$0,0488$
6	$0,367$	$-0,0752$	$0,0334$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-0,061$	$0,024$
7	$\frac{11}{36}$	$-0,0506$	$0,0179$

Aufgabe (21)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}x}{x^2+2x+1}$

Zaehler faktorisieren:

$\frac{1}{5}x = 0$

$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \frac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}x}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}x}{x^2+2x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{\frac{1}{5} \cdot (x^2+2x+1) - \frac{1}{5}x \cdot (2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{(\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}) - (\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{-\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{-\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{-\frac{1}{5}(x+1)(x-1)}{(x+1)^4}$

$= \frac{-\frac{1}{5}(x-1)}{(x+1)^3}$

$= \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}}{x^3+3x^2+3x+1}$

$f''(x) = \frac{(-\frac{1}{5}) \cdot (x^3+3x^2+3x+1) - (-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}) \cdot (3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{(-\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}) - (-\frac{3}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{3}{5})}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{\frac{2}{5}x^3 - 1\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{\frac{2}{5}x^3 - 1\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$\frac{1}{5}x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x(\frac{1}{5})}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{\frac{1}{5}x}{(x+1)^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{\frac{1}{5}x}{(x+1)^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$
$-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} = 0 \qquad / -\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{5}x = -\frac{1}{5} \qquad / : \left(-\frac{1}{5}\right)$
$x = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}}$
$x = 1$
$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(1) = -\frac{1}{40}$
$f''(1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1/\frac{1}{20})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}}{x^3+3x^2+3x+1}$
Zaehler = 0
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-1;1[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{\frac{2}{5}x^3 - 1\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$

$Zaehler = 0$

$\frac{2}{5}x^3 - 1\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_7 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

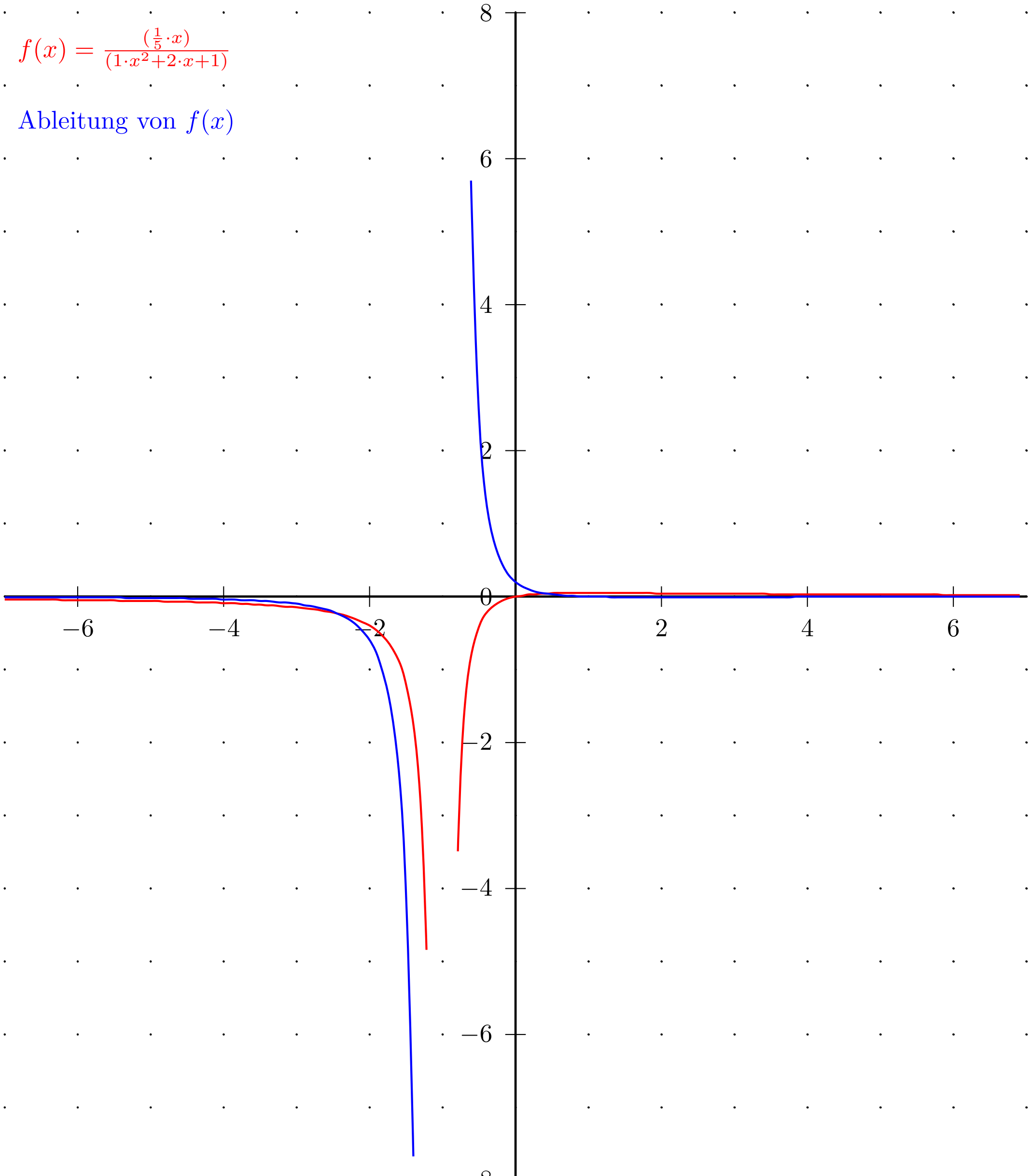
$\underline{x_9 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]2;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;-1[\quad \cup \quad]-1;2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-0,0389$	$-0,00741$	$-0,00278$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,043$	$-0,00902$	$-0,00372$
-6	$-\frac{6}{125}$	$-0,0112$	$-0,00512$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,0543$	$-0,0143$	$-0,00732$
-5	$-\frac{1}{16}$	$-0,0188$	$-0,0109$
$-4\frac{1}{2}$	$-0,0735$	$-0,0257$	$-0,0173$
-4	$-\frac{4}{45}$	$-0,037$	$-0,0296$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{14}{125}$	$-0,0576$	$-0,0563$
-3	$-\frac{3}{20}$	$-0,1$	$-0,125$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-0,207$	$-0,356$
-2	$-\frac{2}{5}$	$-0,6$	$-1,6$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{5}$	$-4,01$	$-22,4$
-1	$-\infty$	$653\frac{3}{49}$	∞
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$2,41$	-16
0	0	$0,2$	$-0,8$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,2$	$-0,8$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{45}$	$0,0296$	$-0,119$
1	$\frac{1}{20}$	$3,83 \cdot 10^{-6}$	$-0,025$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{6}{125}$	$-0,0064$	$-0,00512$
2	$\frac{2}{45}$	$-0,00741$	$-3,36 \cdot 10^{-7}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{49}$	$-0,007$	$0,00133$
3	$\frac{3}{80}$	$-0,00625$	$0,00156$
$3\frac{1}{2}$	$0,0346$	$-0,00549$	$0,00146$
4	$\frac{4}{125}$	$-0,0048$	$0,00128$
$4\frac{1}{2}$	$0,0298$	$-0,00421$	$0,00109$
5	$\frac{1}{36}$	$-0,0037$	$0,000926$
$5\frac{1}{2}$	$0,026$	$-0,00328$	$0,000784$
6	$0,0245$	$-0,00292$	$0,000666$
$6\frac{1}{2}$	$0,0231$	$-0,00261$	$0,000569$
7	$0,0219$	$-0,00234$	$0,000488$

Aufgabe (22)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}x + 2}{x^2 - 6x + 9}$

Zaehler faktorisieren:

$-1\frac{1}{2}x + 2 = 0$

$-1\frac{1}{2}x + 2 = 0 \qquad / - 2$

$-1\frac{1}{2}x = -2 \qquad / : \left(-1\frac{1}{2}\right)$

$x = \frac{-2}{-1\frac{1}{2}}$

$x = 1\frac{1}{3}$

$\underline{x_1 = 1\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$1x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{6 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{6 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{6 - 0}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

$\underline{x_2 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{3})}{(x - 3)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}x + 2}{x^2 - 6x + 9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(-1\frac{1}{2}) \cdot (x^2 - 6x + 9) - (-1\frac{1}{2}x + 2) \cdot (2x - 6)}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

$= \frac{(-1\frac{1}{2}x^2 + 9x - 13\frac{1}{2}) - (-3x^2 + 13x - 12)}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

$= \frac{1\frac{1}{2}x^2 - 4x - 1\frac{1}{2}}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

$= \frac{1\frac{1}{2}x^2 - 4x - 1\frac{1}{2}}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

$= \frac{1\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3})(x - 3)}{(x - 3)^4}$

$= \frac{1\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3})}{(x - 3)^3}$

$= \frac{1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

$f''(x) = \dfrac{1\frac{1}{2} \cdot (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - (1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) \cdot (3x^2 - 18x + 27)}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$
$= \dfrac{(1\frac{1}{2}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 + 40\frac{1}{2}x - 40\frac{1}{2}) - (4\frac{1}{2}x^3 - 25\frac{1}{2}x^2 + 31\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{2})}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$
$= \dfrac{-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$
$= \dfrac{-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1\dfrac{1}{2}x + 2 = 0$
$\underline{x_3 = 1\dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 1\dfrac{1}{3}[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]1\dfrac{1}{3}; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x(-1\frac{1}{2} + \dfrac{2}{x})}{x^2(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{-1\frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{3})}{(x-3)^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{-1\frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{3})}{(x-3)^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} = 0$
$1\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} = 0 \qquad / - \dfrac{1}{2}$
$1\dfrac{1}{2}x = -\dfrac{1}{2} \qquad / : 1\dfrac{1}{2}$
$x = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}$
$x = -\dfrac{1}{3}$
$\underline{x_4 = -\dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-\dfrac{1}{3}) = -0,0405$
$f''(-\dfrac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-\dfrac{1}{3}/\dfrac{9}{40})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

Zaehler $= 0$

$x_5 = -\dfrac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_6 = 3; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -\dfrac{1}{3}[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\dfrac{1}{3}; 3[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54}{x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1,22 \cdot 10^3 x^2 - 1,46 \cdot 10^3 x + 729}$

$Zaehler = 0$

$-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -2

$$\begin{array}{llll}
(-3x^3 & +12x^2 & +9x & -54 \quad) : (x+2) = -3x^2 + 18x - 27 \\
-(-3x^3 & -6x^2) & & \\
\hline
 & 18x^2 & +9x & -54 \\
 & -(18x^2 & +36x) & \\
\hline
 & & -27x & -54 \\
 & & -(-27x & -54) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-3x^2 + 18x - 27 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-27)}}{2 \cdot (-3)}$

$x_{1/2} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{0}}{-6}$

$x_{1/2} = \dfrac{-18 \pm 0}{-6}$

$x_1 = \dfrac{-18 + 0}{-6} \qquad x_2 = \dfrac{-18 - 0}{-6}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

$x_7 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_8 = 3; \quad$ 2-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

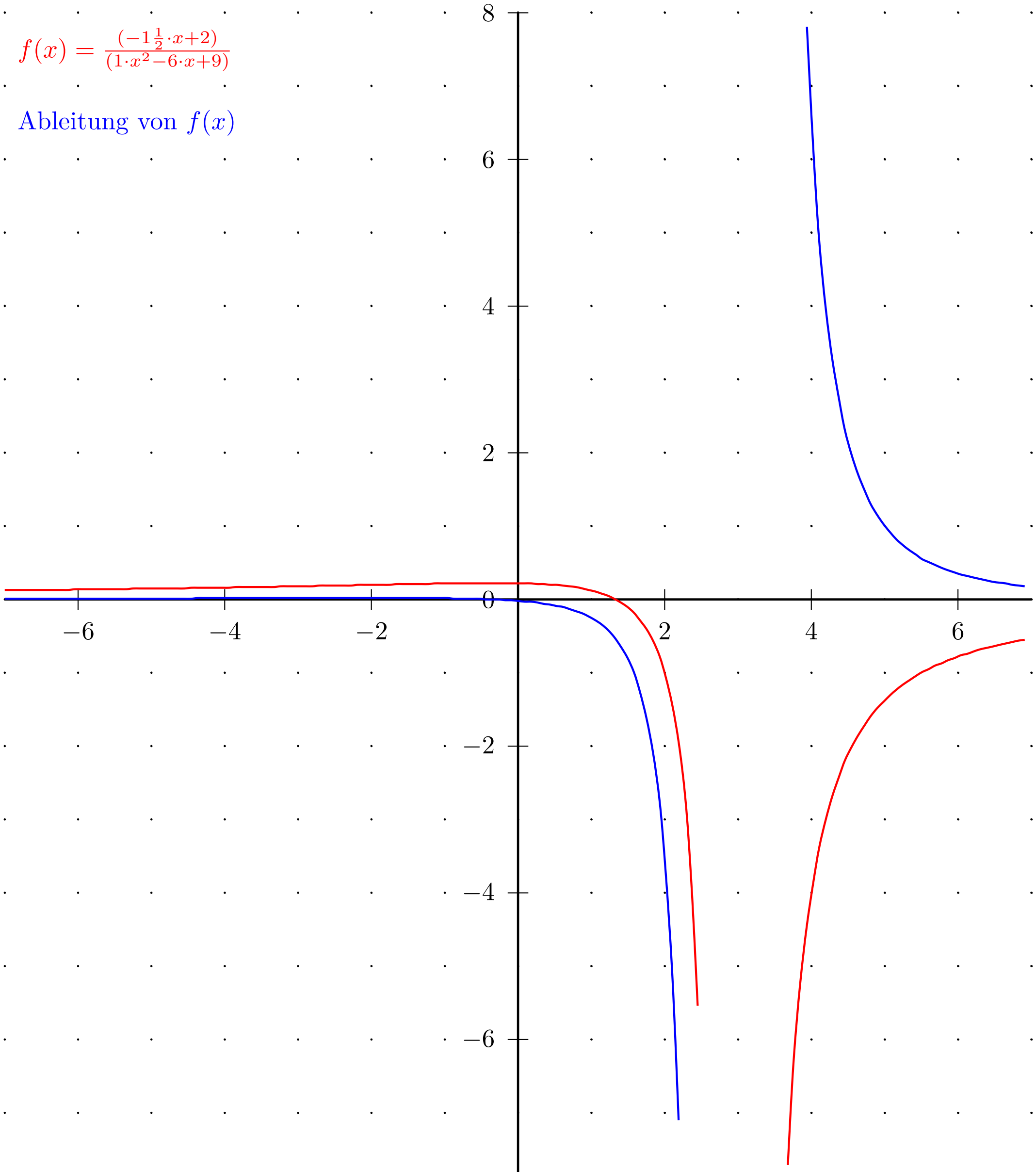
$x_9 = 3; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-2; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{100}$	$0,0015$
$-6\frac{1}{2}$	$0,13$	$0,0108$	$0,00166$
-6	$\frac{11}{81}$	$0,0117$	$0,00183$
$-5\frac{1}{2}$	$0,142$	$0,0126$	$0,00201$
-5	$0,148$	$0,0137$	$0,0022$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{7}{45}$	$0,0148$	$0,00237$
-4	$\frac{8}{49}$	$0,016$	$0,0025$
$-3\frac{1}{2}$	$0,172$	$0,0173$	$0,00252$
-3	$\frac{13}{72}$	$\frac{1}{54}$	$0,00231$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{23}{121}$	$0,0195$	$0,00164$
-2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{50}$	$-1,96 \cdot 10^{-7}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{17}{81}$	$0,0192$	$-0,00366$
-1	$\frac{7}{32}$	$0,0156$	$-0,0117$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{49}$	$0,00583$	$-0,03$
0	$\frac{2}{9}$	$-0,0185$	$-0,0741$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{2}{9}$	$-0,0185$	$-0,0741$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$-0,08$	$-0,192$
1	$\frac{1}{8}$	$-0,25$	$-0,563$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{9}$	$-0,815$	$-2,07$
2	-1	$-3,5$	-12
$2\frac{1}{2}$	-7	$-34,1$	-216
3	$-\infty$	$-4897\frac{47}{49}$	∞
$3\frac{1}{2}$	-13	$46,1$	-265
4	-4	$6,5$	-18
$4\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{9}$	$2,15$	$-3,85$
5	$-1\frac{3}{8}$	1	$-1,31$
$5\frac{1}{2}$	-1	$0,56$	$-0,576$
6	$-\frac{7}{9}$	$0,352$	$-0,296$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{31}{49}$	$0,239$	$-0,17$
7	$-\frac{17}{32}$	$0,172$	$-0,105$

Aufgabe (23)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

Nenner faktorisieren:

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & +3x^2 & +3x & +1 &) : (x+1) = x^2 + 2x + 1 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & +3x & +1 & \\
 & -(2x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & x & +1 & \\
 & & -(x & +1) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{-2 - 0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 \cdot (3x^2 + 6x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{0 - (3x^2 + 6x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{-3x^2 - 6x - 3}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{-3x^2 - 6x - 3}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$f''(x) = \frac{(-6x - 6) \cdot (x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1) - (-3x^2 - 6x - 3) \cdot (6x^5 + 30x^4 + 60x^3 + 60x^2 + 30x + 6)}{(x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1)^2}$

$= \frac{(-6x^7 - 42x^6 - 126x^5 - 210x^4 - 210x^3 - 126x^2 - 42x - 6) - (-18x^7 - 126x^6 - 378x^5 - 630x^4 - 630x^3 - 378x^2 - 126x - 18)}{(x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1)^2}$

$= \frac{12x^7 + 84x^6 + 252x^5 + 420x^4 + 420x^3 + 252x^2 + 84x + 12}{(x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1)^2}$

$= \frac{12x^7 + 84x^6 + 252x^5 + 420x^4 + 420x^3 + 252x^2 + 84x + 12}{(x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-1[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{(x+1)^3} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{(x+1)^3} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{-3x^2-6x-3}{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1} = 0$$

$$-3x^2-6x-3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-3)}}{2\cdot(-3)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{0}}{-6}$$

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm 0}{-6}$$

$$x_1 = \frac{6+0}{-6} \qquad x_2 = \frac{6-0}{-6}$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$$

$x_2 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{-3x^2-6x-3}{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1}$$

Zaehler $= 0$

$x_3 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_4 = -1; \quad$ 3-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;\infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{12x^7 + 84x^6 + 252x^5 + 420x^4 + 420x^3 + 252x^2 + 84x + 12}{x^12 + 12x^11 + 66x^10 + 220x^9 + 495x^8 + 792x^7 + 924x^6 + 792x^5 + 495x^4 + 220x^3 + 66x^2 + 12x + 1}$$

$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$

keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

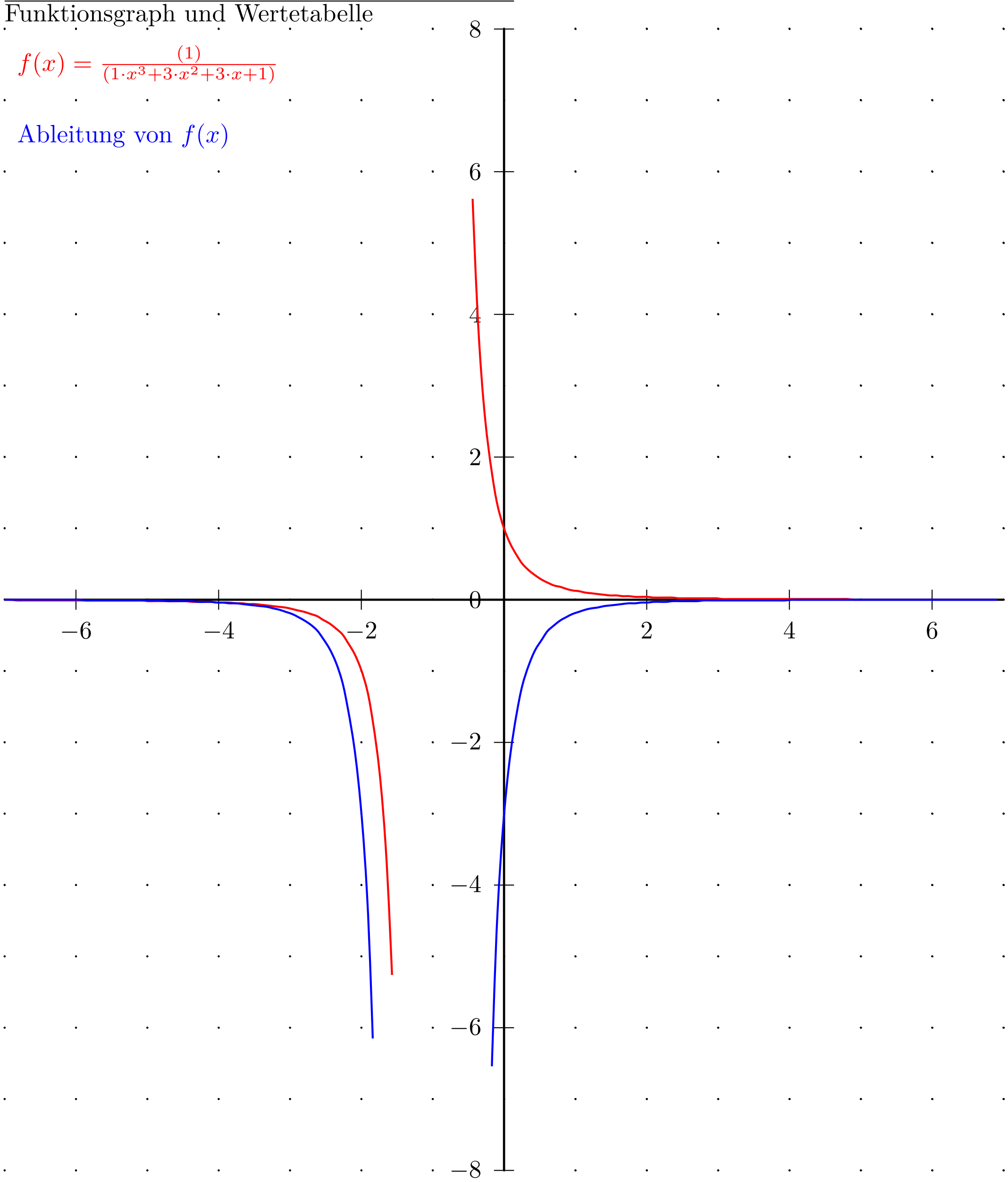
$x_5 = -1;$ 3-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1;\infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-1[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-0,00463$	$-0,00231$	$-0,00154$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,00601$	$-0,00328$	$-0,00238$
-6	$-\frac{1}{125}$	$-0,0048$	$-0,00384$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,011$	$-0,00732$	$-0,0065$
-5	$-\frac{1}{64}$	$-0,0117$	$-0,0117$
$-4\frac{1}{2}$	$-0,0233$	$-0,02$	$-0,0228$
-4	$-\frac{1}{27}$	$-0,037$	$-0,0494$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{125}$	$-0,0768$	$-0,123$
-3	$-\frac{1}{8}$	$-0,188$	$-0,375$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	$-0,593$	$-1,58$
-2	-1	-3	-12
$-1\frac{1}{2}$	-8	$-48,2$	-385
-1	∞	$1,07 \cdot 10^7$	$-\infty$
$-\frac{1}{2}$	8	$-48,2$	385
0	1	-3	12

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	-3	12
$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{27}$	$-0,593$	$1,58$
1	$\frac{1}{8}$	$-0,188$	$0,375$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{8}{125}$	$-0,0768$	$0,123$
2	$\frac{1}{27}$	$-0,037$	$0,0494$
$2\frac{1}{2}$	$0,0233$	$-0,02$	$0,0228$
3	$\frac{1}{64}$	$-0,0117$	$0,0117$
$3\frac{1}{2}$	$0,011$	$-0,00732$	$0,0065$
4	$\frac{1}{125}$	$-0,0048$	$0,00384$
$4\frac{1}{2}$	$0,00601$	$-0,00328$	$0,00238$
5	$0,00463$	$-0,00231$	$0,00154$
$5\frac{1}{2}$	$0,00364$	$-0,00168$	$0,00103$
6	$0,00292$	$-0,00125$	$0,000714$
$6\frac{1}{2}$	$0,00237$	$-0,000948$	$0,000506$
7	$0,00195$	$-0,000732$	$0,000366$

Aufgabe (24)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \frac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^3+3x^2+3x+1=0$

$x^3+3x^2+3x+1=0$

Nullstelle für Polynomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & +3x^2 & +3x & +1 &) : (x+1) = x^2+2x+1 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & +3x & +1 & \\
 & -(2x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & x & +1 & \\
 & & -(x & +1) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \frac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{1}{(x+1)}$

$f(x) = \frac{1}{x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0\cdot(x+1)-1\cdot1}{(x+1)^2}$

$= \frac{0-1}{(x+1)^2}$
$= \frac{-1}{(x+1)^2}$
$= \frac{-1}{(x+1)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+2x+1) - (-1) \cdot (2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{0-(-2x-2)}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$
$= \frac{2}{(x+1)^3}$
$= \frac{2}{x^3+3x^2+3x+1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-1[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = 0$$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{(x+1)} = \infty$
$\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{(x+1)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-1}{x^2+2x+1} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-1}{x^2+2x+1}$
Zaehler $= 0$

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$Zaehler = 0$
keine Loesung

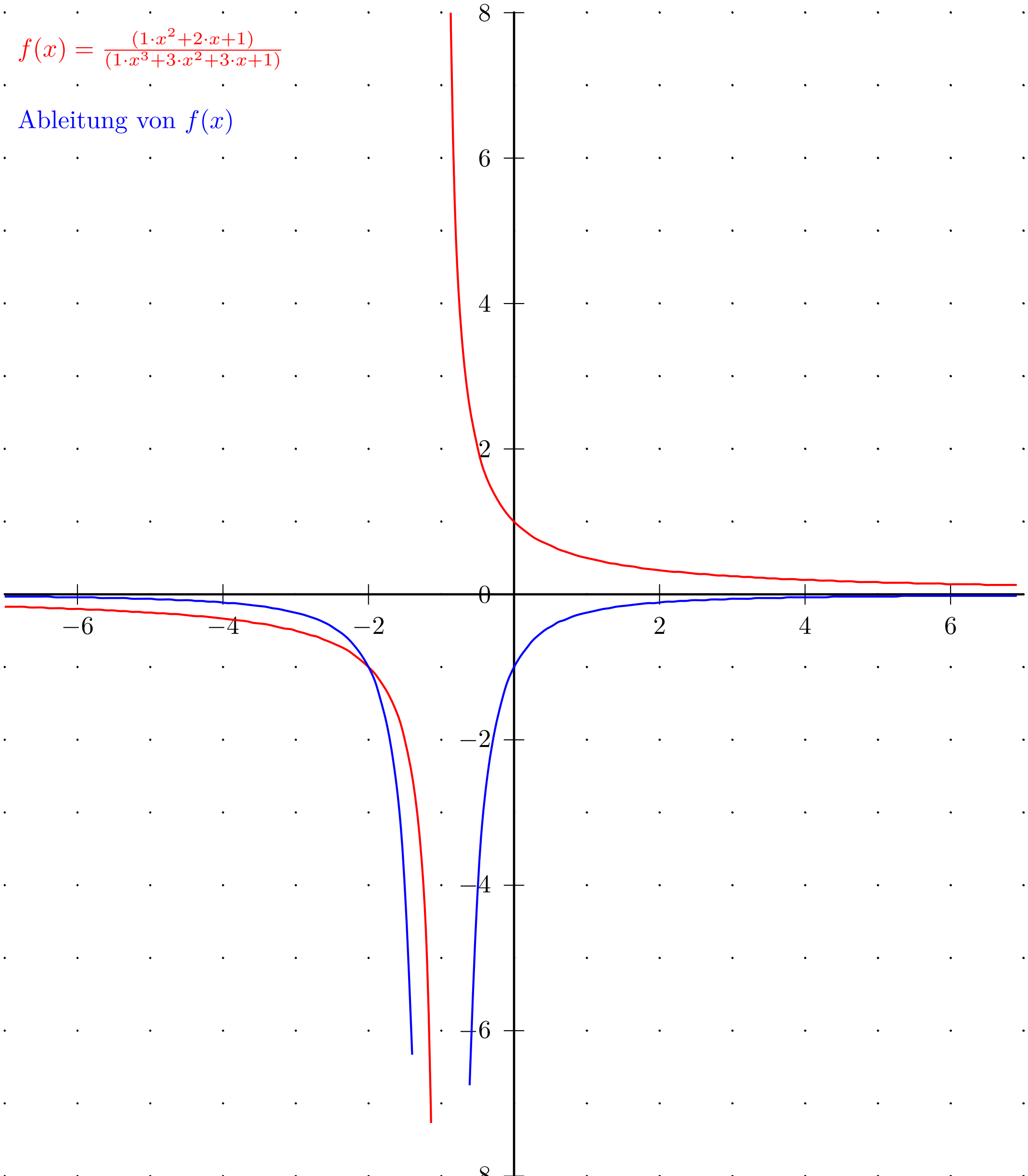
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{108}$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$-0,012$
-6	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-5	$-\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-4	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-3	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-2	-1	-1	-2
$-1\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
-1	NaN	$3265\frac{15}{49}$	NaN
$-\frac{1}{2}$	2	-4	16
0	1	-1	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	-1	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,445$	$0,593$
1	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
2	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
3	$\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
4	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$0,012$
5	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
6	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$-0,0178$	$0,00474$
7	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{64}$	$0,00391$

Aufgabe (25)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2+3x+1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2-1=0$

$1x^2-1=0 \qquad /+1$

$1x^2=1 \qquad /:1$

$x^2=\dfrac{1}{1}$

$x=\pm\sqrt{1}$

$x_1=1 \qquad x_2=-1$

$\underline{x_1=-1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^3+3x^2+3x+1=0$

$x^3+3x^2+3x+1=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & +3x^2 & +3x & +1 &):(x+1)=x^2+2x+1 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & +3x & +1 & \\
 & -(2x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & x & +1 & \\
 & & -(x & +1) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm0}{2}$

$x_1=\dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2=\dfrac{-2-0}{2}$

$x_1=-1 \qquad x_2=-1$

$\underline{x_3=-1; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^3}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• Term gekürzen

$f(x)=\dfrac{(x-1)}{(x+1)^2}$

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+2x+1)-(x-1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{(x^2+2x+1)-(2x^2-2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \dfrac{-(x+1)(x-3)}{(x+1)^4}$
$= \dfrac{-(x-3)}{(x+1)^3}$
$= \dfrac{-x+3}{x^3+3x^2+3x+1}$
$f''(x) = \dfrac{(-1)\cdot(x^3+3x^2+3x+1)-(-x+3)\cdot(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{(-x^3-3x^2-3x-1)-(-3x^3+3x^2+15x+9)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{2x^3-6x^2-18x-10}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{2x^3-6x^2-18x-10}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x-1=0$
$\underline{x_4 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]1;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{(x-1)}{(x+1)^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{(x-1)}{(x+1)^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{-x+3}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$

$-1x+3=0 \qquad /-3$
$-1x=-3 \qquad /:(-1)$
$x = \dfrac{-3}{-1}$
$x = 3$
$\underline{x_5 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(3) = -\dfrac{1}{64}$

$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/\frac{1}{8})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{-x+3}{x^3+3x^2+3x+1}$

Zaehler $= 0$

$\underline{x_6 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_7 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1;3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{2x^3-6x^2-18x-10}{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1}$

$Zaehler = 0$

$2x^3 - 6x^2 - 18x - 10 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llll}
(2x^3 & -6x^2 & -18x & -10 \quad) : (x+1) = 2x^2 - 8x - 10 \\
-(2x^3 & +2x^2) & & \\
\hline
 & -8x^2 & -18x & -10 \\
 & -(-8x^2 & -8x) & \\
\hline
 & & -10x & -10 \\
 & & -(-10x & -10) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$2x^2 - 8x - 10 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2}$

$x_{1/2} = \frac{+8 \pm \sqrt{144}}{4}$

$x_{1/2} = \frac{8 \pm 12}{4}$

$x_1 = \frac{8+12}{4} \qquad x_2 = \frac{8-12}{4}$

$x_1 = 5 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_8 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_9 = 5; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

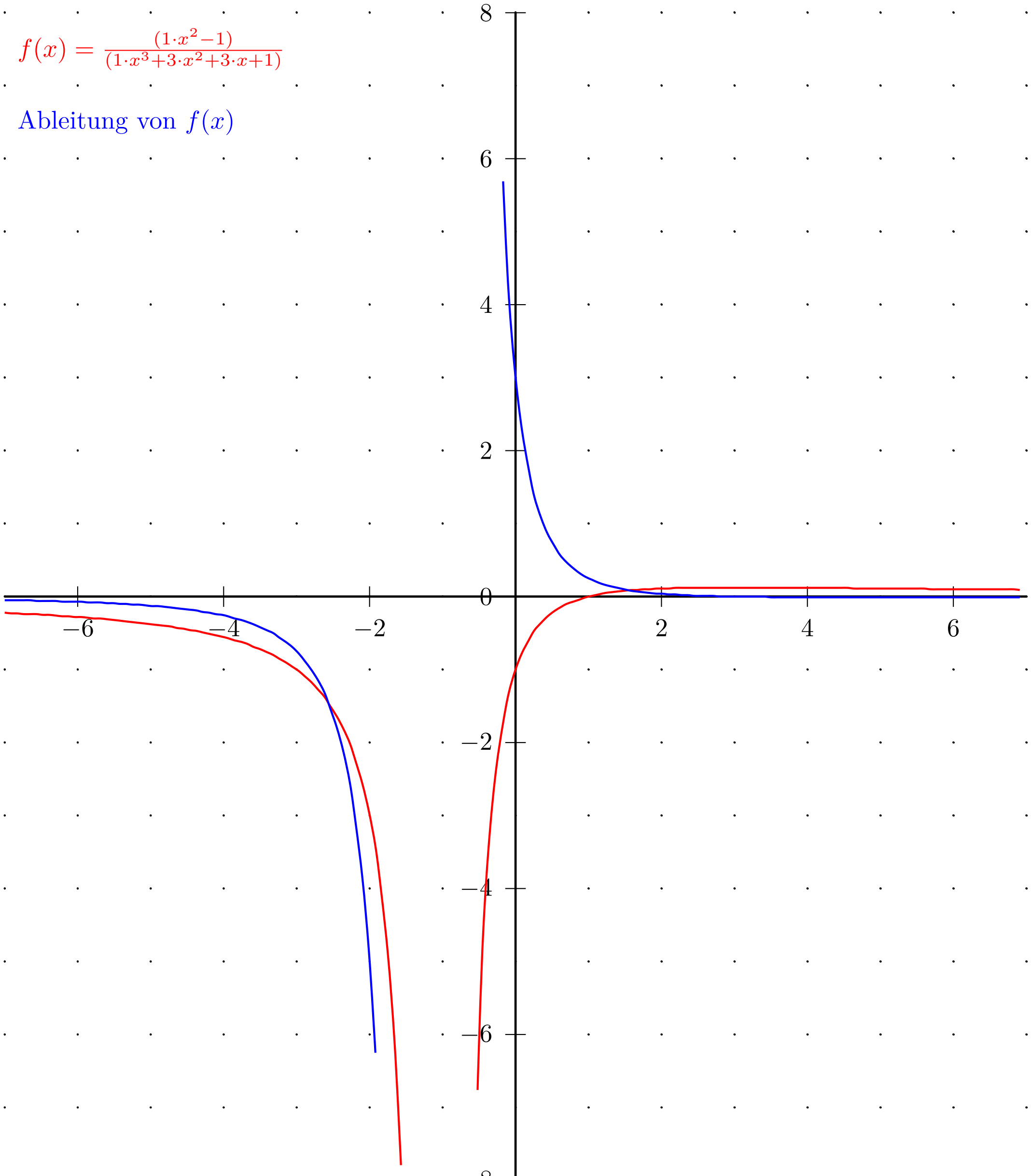
$\underline{x_10 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	5	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]5;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;5[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{108}$	$-\frac{1}{54}$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{30}{121}$	$-0,0571$	$-0,0251$
-6	$-\frac{7}{25}$	$-0,072$	$-0,0352$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{26}{81}$	$-0,0933$	$-0,0512$
-5	$-\frac{3}{8}$	$-0,125$	$-0,0781$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{22}{49}$	$-0,175$	$-0,127$
-4	$-\frac{5}{9}$	$-0,259$	$-0,222$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{18}{25}$	$-0,416$	$-0,435$
-3	-1	$-0,75$	-1
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{9}$	$-1,63$	$-2,96$
-2	-3	-5	-14
$-1\frac{1}{2}$	-10	$-36,1$	-208
-1	NaN	$3,27 \cdot 10^3$	NaN
$-\frac{1}{2}$	-6	$28,1$	-176
0	-1	3	-10

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	3	-10
$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$0,741$	$-1,78$
1	0	$0,25$	$-0,5$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{25}$	$0,096$	$-0,179$
2	$\frac{1}{9}$	$0,037$	$-0,0741$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{6}{49}$	$0,0117$	$-0,0333$
3	$\frac{1}{8}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$-\frac{1}{64}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{10}{81}$	$-0,00549$	$-0,00732$
4	$\frac{3}{25}$	$-\frac{1}{125}$	$-0,0032$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{14}{121}$	$-0,00902$	$-0,00109$
5	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{108}$	$-5,25 \cdot 10^{-8}$
$5\frac{1}{2}$	$0,107$	$-0,0091$	$0,00056$
6	$\frac{5}{49}$	$-0,00875$	$0,000833$
$6\frac{1}{2}$	$0,0978$	$-0,0083$	$0,000948$
7	$\frac{3}{32}$	$-0,00781$	$0,000977$

3 Gebrochen rationale Funktion Zählergrad = Nennergrad

3.1 Aufgaben

(1) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$

(2) $f(x) = \frac{-x+2}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$

(3) $f(x) = \frac{-3x+1}{4x+2}$

(4) $f(x) = \frac{5x+6}{-x}$

(5) $f(x) = \frac{-3x+1}{x+2}$

(6) $f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}x-2}$

(7) $f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2-1}$

(8) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x^2+2x}$

(9) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

(10) $f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}}{-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}}$

(11) $f(x) = \frac{x^2-5x-27}{x^2+3x}$

(12) $f(x) = \frac{4x^2+12x+5}{-2x^2+1}$

(13) $f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$

(14) $f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$

(15) $f(x) = \frac{x^3+3x^2-4}{x^2}$

(16) $f(x) = \frac{-x^3+3x^2-4}{-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}$

3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x}{2x+1}$
Zaehler faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$2x + 1 = 0$

$2x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$2x = -1 \qquad / : 2$
$x = \frac{-1}{2}$
$x = -\frac{1}{2}$
$\underline{x_2 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{x}{2(x+\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x}{x+\frac{1}{2}}$
Polynomdivision :

$$\begin{array}{l} (\frac{1}{2}x \qquad\qquad) : (x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ \underline{-(\frac{1}{2}x \quad +\frac{1}{4})} \\ \qquad\quad -\frac{1}{4} \end{array}$$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot (x+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}x \cdot 1}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \frac{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}) - \frac{1}{2}x}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \frac{\frac{1}{4}}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \frac{\frac{1}{4}}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+x+\frac{1}{4}) - \frac{1}{4} \cdot (2x+1)}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{0 - (\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$
$\frac{1}{2}x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\frac{1}{2}; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x(1)}{x(2+x)} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$
Horizontale Asymptote: $y = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{\frac{1}{2}x}{(x+\frac{1}{2})} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-} \frac{\frac{1}{2}x}{(x+\frac{1}{2})} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -\frac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{\frac{1}{4}}{x^2+x+\frac{1}{4}} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{\frac{1}{4}}{x^2+x+\frac{1}{4}}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_4 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}{x^4 + 2x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}}$
$Zaehler = 0$

$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \qquad / + \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}x = \frac{1}{4} \qquad / : \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}$

$x = -\frac{1}{2}$

$x_5 = -\frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

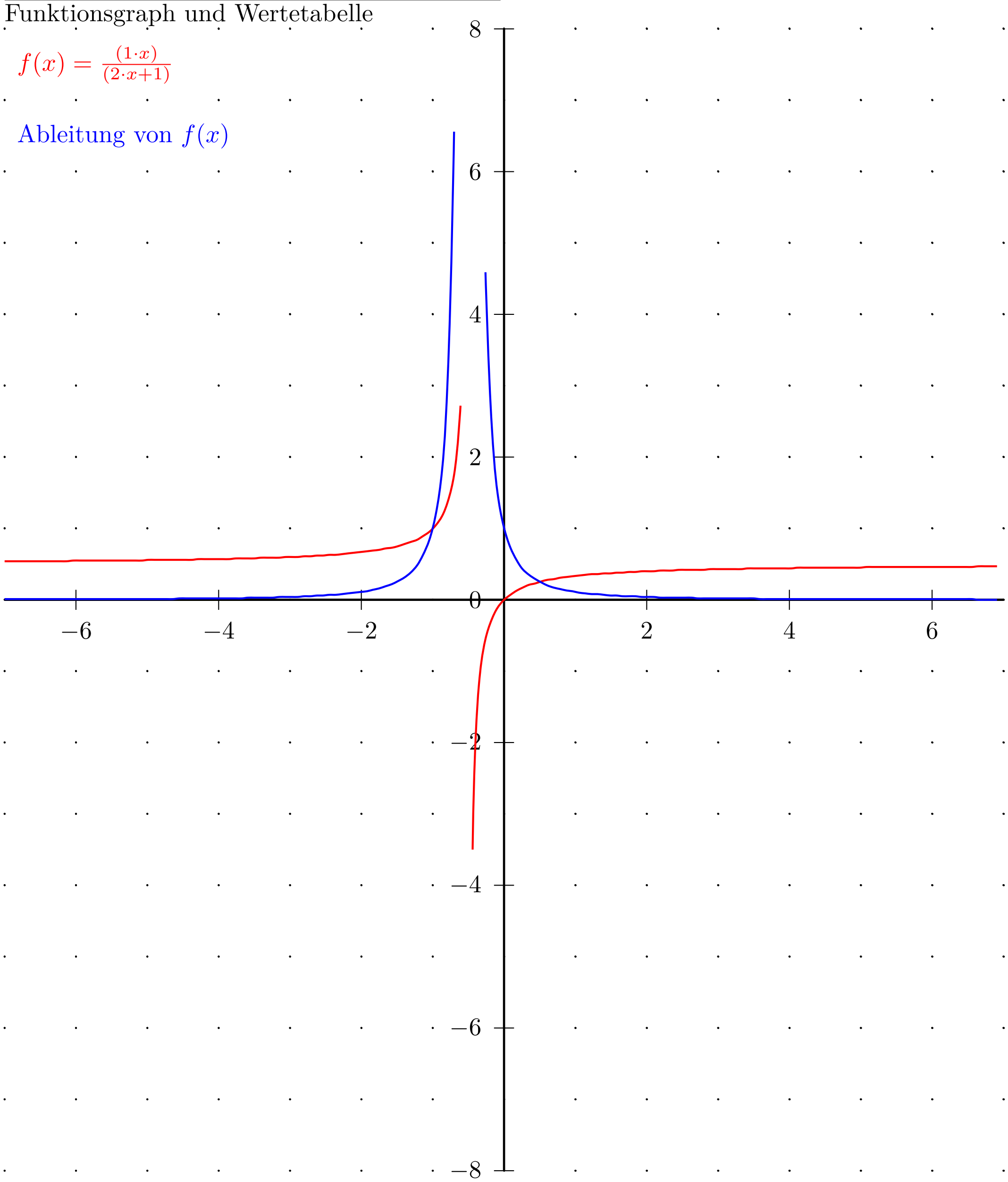
$x_6 = -\frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{7}{13}$	$0,00592$	$0,00182$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{13}{24}$	$0,00694$	$0,00231$
-6	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{121}$	$0,00301$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{100}$	$0,004$
-5	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{81}$	$0,00549$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{64}$	$0,00781$
-4	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{49}$	$0,0117$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{54}$
-3	$\frac{3}{5}$	$0,04$	$0,032$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$0,0625$	$0,0625$
-2	$\frac{2}{3}$	$0,111$	$0,148$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$0,25$	$0,5$
-1	1	1	4
$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$-816\frac{16}{49}$	∞
0	0	1	-4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	1	-4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$0,25$	$-0,5$
1	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,148$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$0,0625$	$-0,0625$
2	$\frac{2}{5}$	$0,04$	$-0,032$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{54}$
3	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{49}$	$-0,0117$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{64}$	$-0,00781$
4	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{81}$	$-0,00549$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{100}$	$-0,004$
5	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{121}$	$-0,00301$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$0,00694$	$-0,00231$
6	$\frac{6}{13}$	$0,00592$	$-0,00182$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{13}{28}$	$0,0051$	$-0,00146$
7	$\frac{7}{15}$	$0,00444$	$-0,00119$

Aufgabe (2)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-x+2}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$

Zaehler faktorisieren:

$-x+2=0$

$-1x+2=0 \qquad /-2$

$-1x=-2 \qquad /:(-1)$

$x=\frac{-2}{-1}$

$x=2$

$\underline{x_1=2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0 \qquad /+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}x=\frac{1}{4} \qquad /:\frac{1}{2}$

$x=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$

$x=\frac{1}{2}$

$\underline{x_2=\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-(x-2)}{\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$f(x) = \frac{-2x+4}{x-\frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll} (-2x & +4 &):(x-\frac{1}{2})=-2 \\ -(-2x & +1) & \\ \hline & 3 & \end{array}$$

$f(x)=-2+\frac{3}{x-\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(-2)\cdot(x-\frac{1}{2})-(-2x+4)\cdot 1}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$= \frac{(-2x+1)-(-2x+4)}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-3}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-3}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \frac{0\cdot(x^2-x+\frac{1}{4})-(-3)\cdot(2x-1)}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{0-(-6x+3)}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$

$= \dfrac{6x-3}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$
$= \dfrac{6x-3}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-2x+4=0$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]\frac{1}{2}; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$
$\underline{\quad x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(-1+\frac{2}{x})}{x(\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{x})} = \frac{-2}{1} = -2$$

Horizontale Asymptote: $y = -2$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \dfrac{-2(x-2)}{(x-\frac{1}{2})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \dfrac{-2(x-2)}{(x-\frac{1}{2})} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = \dfrac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{-3}{x^2-x+\frac{1}{4}} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{-3}{x^2-x+\frac{1}{4}}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_4 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \cup \quad]\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{6x-3}{x^4-2x^3+1\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$
$Zaehler = 0$

$6x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$6x = 3 \qquad / : 6$
$x = \frac{3}{6}$
$x = \frac{1}{2}$
$x_5 = \frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

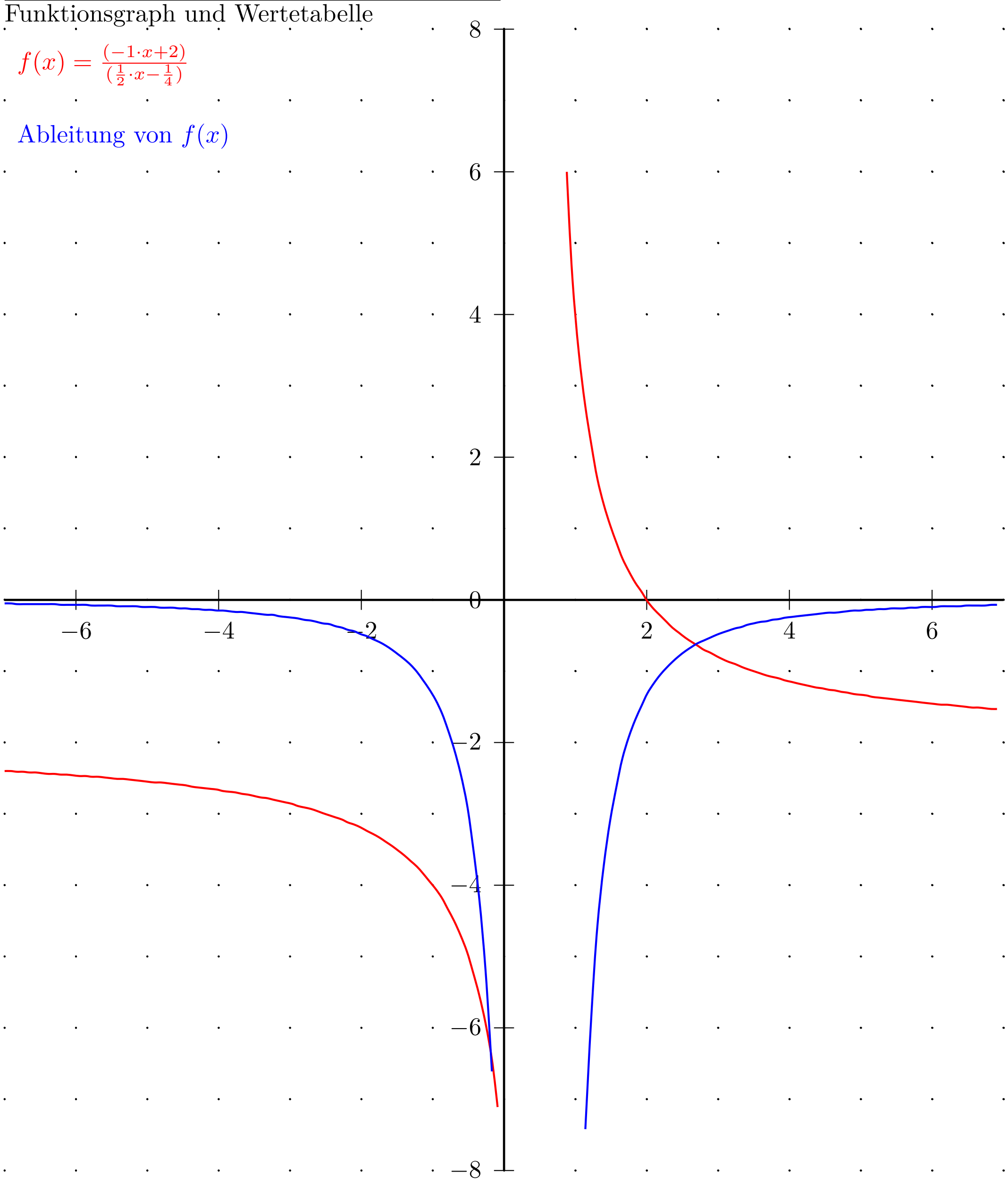
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = \frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{75}$	$-0,0142$
$-6\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{49}$	$-0,0175$
-6	$-2\frac{6}{13}$	$-0,071$	$-0,0218$
$-5\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{36}$
-5	$-2\frac{6}{11}$	$-0,0992$	$-0,0361$
$-4\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{5}$	$-0,12$	$-\frac{6}{125}$
-4	$-2\frac{2}{3}$	$-0,148$	$-0,0658$
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	$-0,188$	$-0,0938$
-3	$-2\frac{6}{7}$	$-0,245$	$-0,14$
$-2\frac{1}{2}$	-3	$-0,333$	$-0,222$
-2	$-3\frac{1}{5}$	$-0,48$	$-0,384$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	$-0,75$	$-0,75$
-1	-4	$-1,33$	$-1,78$
$-\frac{1}{2}$	-5	-3	-6
0	-8	-12	$-48,1$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-8	-12	$-48,1$
$\frac{1}{2}$	∞	$9795\frac{45}{49}$	$-\infty$
1	4	-12	$48,1$
$1\frac{1}{2}$	1	-3	6
2	0	$-1,33$	$1,78$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-0,75$	$0,75$
3	$-\frac{4}{5}$	$-0,48$	$0,384$
$3\frac{1}{2}$	-1	$-0,333$	$0,222$
4	$-1\frac{1}{7}$	$-0,245$	$0,14$
$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$-0,188$	$0,0938$
5	$-1\frac{1}{3}$	$-0,148$	$0,0658$
$5\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{5}$	$-0,12$	$\frac{6}{125}$
6	$-1\frac{5}{11}$	$-0,0992$	$0,0361$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
7	$-1\frac{7}{13}$	$-0,071$	$0,0218$

Aufgabe (3)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-3x+1}{4x+2}$

Zaehler faktorisieren:

$-3x+1=0$

$-3x+1=0 \qquad /-1$

$-3x=-1 \qquad /:(-3)$

$x=\dfrac{-1}{-3}$

$x=\dfrac{1}{3}$

$\underline{x_1=\dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$4x+2=0$

$4x+2=0 \qquad /-2$

$4x=-2 \qquad /:4$

$x=\dfrac{-2}{4}$

$x=-\dfrac{1}{2}$

$\underline{x_2=-\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-3(x-\frac{1}{3})}{4(x+\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x) = \dfrac{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} (-\frac{3}{4}x \quad +\frac{1}{4} \quad):(x+\frac{1}{2})=-\frac{3}{4} \\ \underline{-(-\frac{3}{4}x \quad -\frac{3}{8})} \\ \qquad\quad \frac{5}{8} \end{array}$$

$f(x)=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{\frac{5}{8}}{x+\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(-\frac{3}{4})\cdot(x+\frac{1}{2})-(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})\cdot 1}{(x+\frac{1}{2})^2}$

$=\dfrac{(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{8})-(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})}{(x+\frac{1}{2})^2}$

$=\dfrac{-\frac{5}{8}}{(x+\frac{1}{2})^2}$

$=\dfrac{-\frac{5}{8}}{(x+\frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \dfrac{0\cdot(x^2+x+\frac{1}{4})-(-\frac{5}{8})\cdot(2x+1)}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$

$=\dfrac{0-(-1\frac{1}{4}x-\frac{5}{8})}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{1\frac{1}{4}x + \frac{5}{8}}{(x^2 + x + \frac{1}{4})^2}$
$= \frac{1\frac{1}{4}x + \frac{5}{8}}{(x^2 + x + \frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$
$x_3 = \frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(-3 + x)}{x(4 + \frac{2}{x})} = \frac{-0,75}{1} = -\frac{3}{4}$

Horizontale Asymptote: $y = -\frac{3}{4}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{-\frac{3}{4}(x - \frac{1}{3})}{(x + \frac{1}{2})} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{-\frac{3}{4}(x - \frac{1}{3})}{(x + \frac{1}{2})} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -\frac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-\frac{5}{8}}{x^2 + x + \frac{1}{4}} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-\frac{5}{8}}{x^2 + x + \frac{1}{4}}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -\frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{1\frac{1}{4}x + \frac{5}{8}}{x^4 + 2x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}}$
$Zaehler = 0$

$1\frac{1}{4}x + \frac{5}{8} = 0 \qquad / - \frac{5}{8}$
$1\frac{1}{4}x = -\frac{5}{8} \qquad / : 1\frac{1}{4}$
$x = \frac{-\frac{5}{8}}{1\frac{1}{4}}$
$x = -\frac{1}{2}$
$\underline{x_5 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

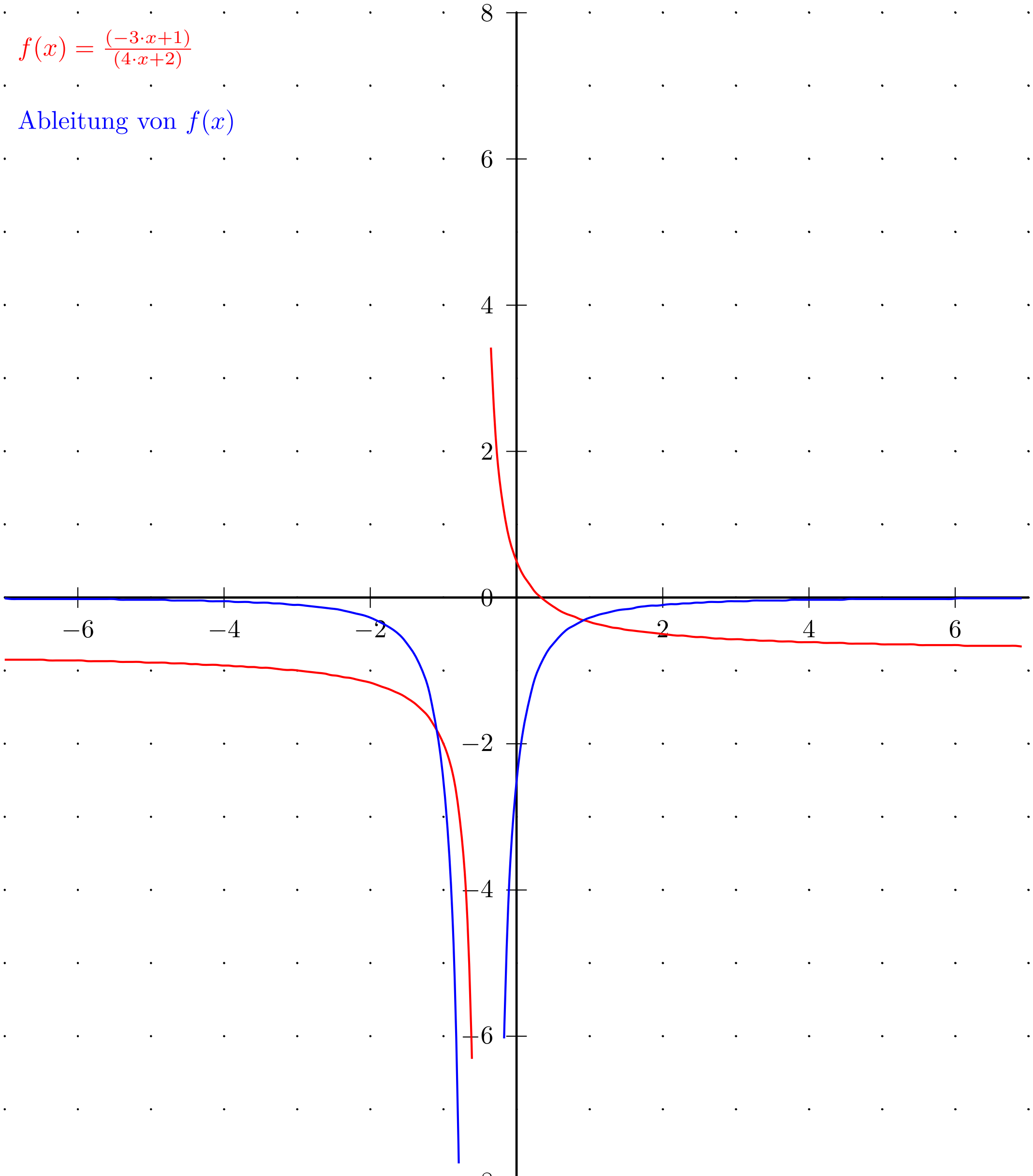
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{11}{13}$	$-0,0148$	$-0,00455$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{41}{48}$	$-0,0174$	$-0,00579$
-6	$-\frac{19}{22}$	$-0,0207$	$-0,00751$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{40}$	$-\frac{1}{100}$
-5	$-\frac{8}{9}$	$-0,0309$	$-0,0137$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{29}{32}$	$-0,0391$	$-0,0195$
-4	$-\frac{13}{14}$	$-0,051$	$-0,0292$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{23}{24}$	$-0,0694$	$-0,0463$
-3	-1	$-0,1$	$-0,08$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{16}$	$-0,156$	$-0,156$
-2	$-1\frac{1}{6}$	$-0,278$	$-0,37$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{8}$	$-0,625$	$-1,25$
-1	-2	$-2,5$	-10
$-\frac{1}{2}$	∞	$2040\frac{40}{49}$	$-\infty$
0	$\frac{1}{2}$	$-2,5$	10

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$-2,5$	10
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-0,625$	$1,25$
1	$-\frac{1}{3}$	$-0,278$	$0,37$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{16}$	$-0,156$	$0,156$
2	$-\frac{1}{2}$	$-0,1$	$0,08$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{24}$	$-0,0694$	$0,0463$
3	$-\frac{4}{7}$	$-0,051$	$0,0292$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{19}{32}$	$-0,0391$	$0,0195$
4	$-\frac{11}{18}$	$-0,0309$	$0,0137$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{100}$
5	$-\frac{7}{11}$	$-0,0207$	$0,00751$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{31}{48}$	$-0,0174$	$0,00579$
6	$-\frac{17}{26}$	$-0,0148$	$0,00455$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{37}{56}$	$-0,0128$	$0,00364$
7	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{90}$	$0,00296$

Aufgabe (4)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{5x+6}{-x}$
Zaehler faktorisieren:
$5x + 6 = 0$

$5x + 6 = 0 \qquad / - 6$
$5x = -6 \qquad / : 5$
$x = \frac{-6}{5}$
$x = -1\frac{1}{5}$
$\underline{x_1 = -1\frac{1}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$-x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{5(x+1\frac{1}{5})}{-x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{-5x-6}{x}$
Polynomdivision :

$$\begin{array}{l} (-5x \quad -6 \quad) : (x) = -5 \\ \underline{-(-5x) \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\quad -6 \end{array}$$

$f(x) = -5 + \frac{-6}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{(-5) \cdot x - (-5x-6) \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{(-5x) - (-5x-6)}{(x)^2}$
$= \frac{6}{(x)^2}$
$= \frac{6}{(x)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 6 \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - 12x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-12x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-12x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-12x}{x^4}$
$= \frac{-12}{x^3}$
$= \frac{-12}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-5x - 6 = 0$
$x_3 = -1\frac{1}{5}$;   1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1\frac{1}{5}$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1\frac{1}{5}; 0[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -1\frac{1}{5}[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(5 + \frac{6}{x})}{x(-1)} = \frac{-5}{1} = -5$$
Horizontale Asymptote: $y = -5$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-5(x + 1\frac{1}{5})}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-5(x + 1\frac{1}{5})}{x} = \infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{6}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{6}{x^2}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = 0$;   1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-12}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

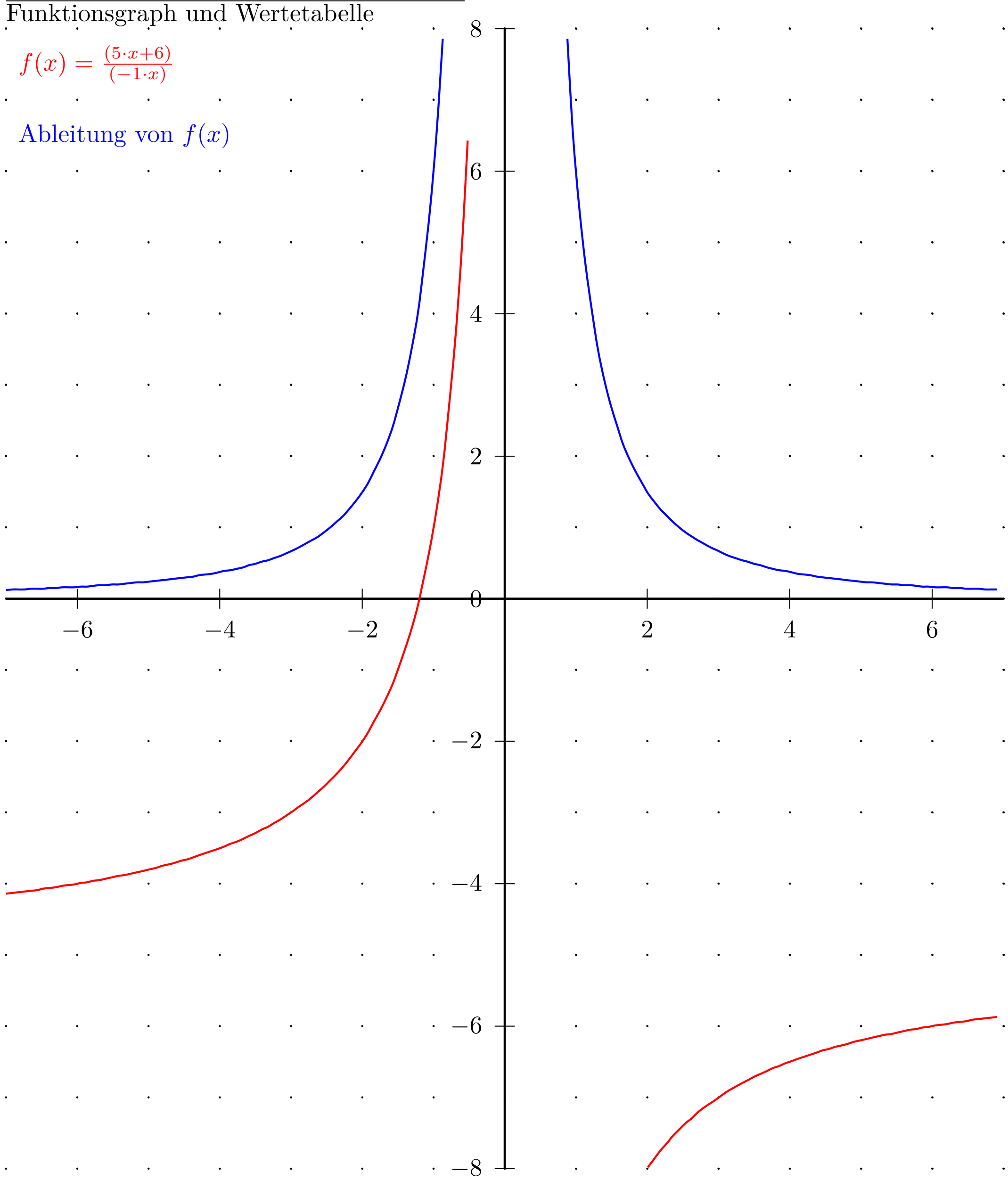
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_5 = 0$;   1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;0[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]0;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{1}{7}$	$\frac{6}{49}$	$0,035$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{13}$	$0,142$	$0,0437$
-6	-4	$0,167$	$\frac{1}{18}$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{10}{11}$	$0,198$	$0,0721$
-5	$-3\frac{4}{5}$	$0,24$	$0,096$
$-4\frac{1}{2}$	$-3\frac{2}{3}$	$0,296$	$0,132$
-4	$-3\frac{1}{2}$	$0,375$	$0,188$
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{2}{7}$	$0,49$	$0,28$
-3	-3	$0,667$	$0,444$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{5}$	$0,96$	$0,768$
-2	-2	$1,5$	$1,5$
$-1\frac{1}{2}$	-1	$2,67$	$3,56$
-1	1	6	12
$-\frac{1}{2}$	7	24	$96,1$
0	$-\infty$	$-19591\frac{41}{49}$	∞

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\infty$	$-19591\frac{41}{49}$	∞
$\frac{1}{2}$	-17	24	$-96,1$
1	-11	6	-12
$1\frac{1}{2}$	-9	$2,67$	$-3,56$
2	-8	$1,5$	$-1,5$
$2\frac{1}{2}$	$-7\frac{2}{5}$	$0,96$	$-0,768$
3	-7	$0,667$	$-0,444$
$3\frac{1}{2}$	$-6\frac{5}{7}$	$0,49$	$-0,28$
4	$-6\frac{1}{2}$	$0,375$	$-0,188$
$4\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{3}$	$0,296$	$-0,132$
5	$-6\frac{1}{5}$	$0,24$	$-0,096$
$5\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{11}$	$0,198$	$-0,0721$
6	-6	$0,167$	$-\frac{1}{18}$
$6\frac{1}{2}$	$-5\frac{12}{13}$	$0,142$	$-0,0437$
7	$-5\frac{6}{7}$	$\frac{6}{49}$	$-0,035$

Aufgabe (5)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+2}$
Zaehler faktorisieren:
$-3x+1=0$

$-3x+1=0 \qquad /-1$
$-3x=-1 \qquad /:(-3)$
$x=\dfrac{-1}{-3}$
$x=\dfrac{1}{3}$
$\underline{x_1=\dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x+2=0$

$x+2=0 \qquad /-2$
$x=-2$
$\underline{x_2=-2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{-3(x-\frac{1}{3})}{(x+2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$
$f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+2}$
Polynomdivision :

$$\begin{array}{lll} (-3x & +1 &):(x+2)=-3 \\ -(-3x & -6) & \\ \hline & 7 & \end{array}$$

$f(x) = -3 + \dfrac{7}{x+2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \dfrac{(-3)\cdot(x+2)-(-3x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{(-3x-6)-(-3x+1)}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{-7}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{-7}{(x+2)^2}$
$f''(x) = \dfrac{0\cdot(x^2+4x+4)-(-7)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{0-(-14x-28)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{14x+28}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{14x+28}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{14(x+2)}{(x+2)^4}$
$= \dfrac{14}{(x+2)^3}$

$= \dfrac{14}{x^3+6x^2+12x+8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-3x+1=0$
$x_3 = \dfrac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2;\dfrac{1}{3}[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]\dfrac{1}{3};\infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(-3+x)}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{-3}{1} = -3$$

Horizontale Asymptote: $y = -3$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{-3(x-\frac{1}{3})}{(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{-3(x-\frac{1}{3})}{(x+2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{-7}{x^2+4x+4} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{-7}{x^2+4x+4}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{14}{x^3+6x^2+12x+8}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

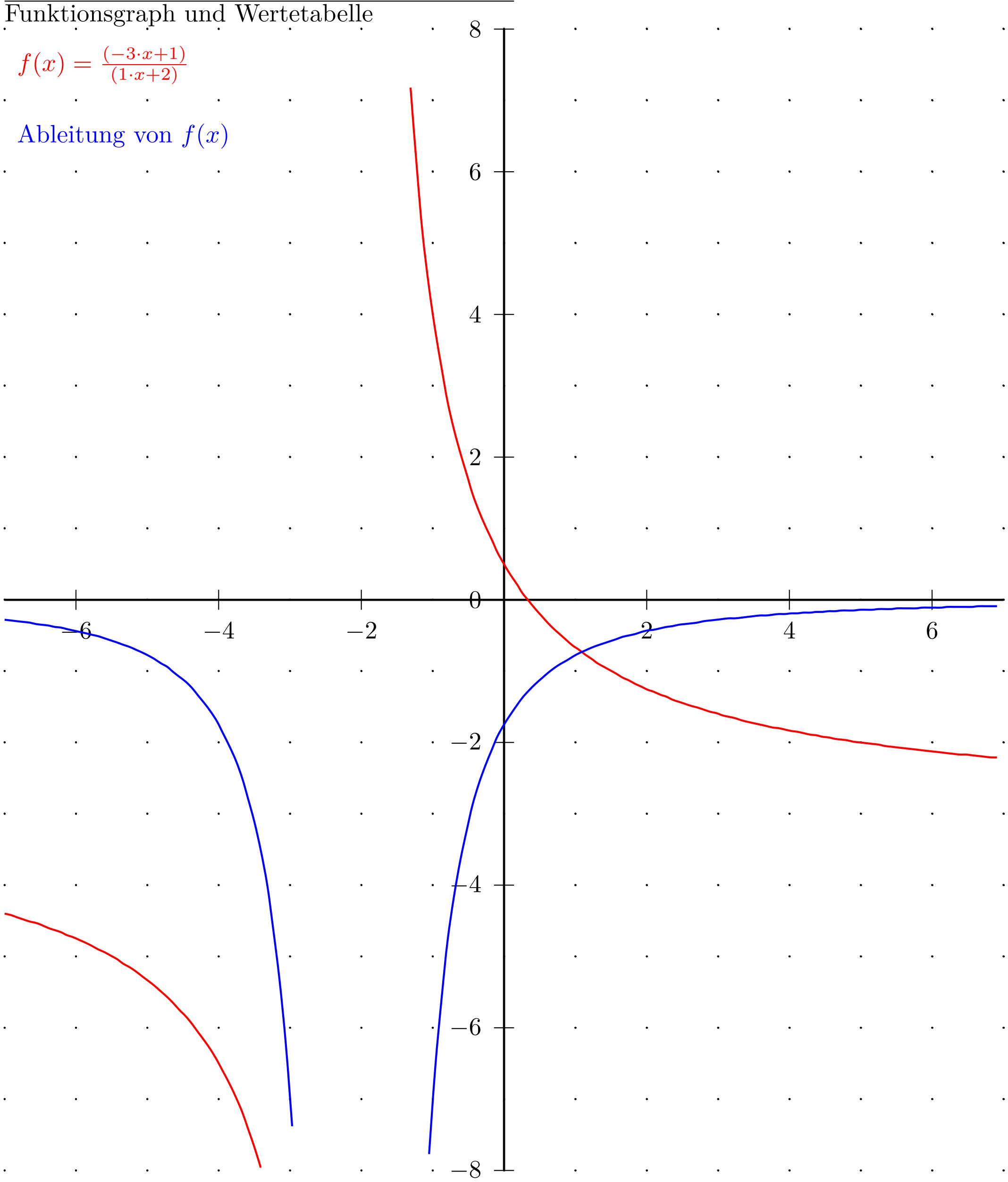
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_5 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{2}{5}$	$-0,28$	$-0,112$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{5}{9}$	$-0,346$	$-0,154$
-6	$-4\frac{3}{4}$	$-0,438$	$-0,219$
$-5\frac{1}{2}$	-5	$-0,571$	$-0,327$
-5	$-5\frac{1}{3}$	$-0,778$	$-0,519$
$-4\frac{1}{2}$	$-5\frac{4}{5}$	$-1,12$	$-0,896$
-4	$-6\frac{1}{2}$	$-1,75$	$-1,75$
$-3\frac{1}{2}$	$-7\frac{2}{3}$	$-3,11$	$-4,15$
-3	-10	-7	-14
$-2\frac{1}{2}$	-17	-28	-112
-2	∞	$22857\frac{1}{7}$	$-\infty$
$-1\frac{1}{2}$	11	-28	112
-1	4	-7	14
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$-3,11$	$4,15$
0	$\frac{1}{2}$	$-1,75$	$1,75$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$-1,75$	$1,75$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-1,12$	$0,896$
1	$-\frac{2}{3}$	$-0,778$	$0,519$
$1\frac{1}{2}$	-1	$-0,571$	$0,327$
2	$-1\frac{1}{4}$	$-0,438$	$0,219$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{4}{9}$	$-0,346$	$0,154$
3	$-1\frac{3}{5}$	$-0,28$	$0,112$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{8}{11}$	$-0,231$	$0,0841$
4	$-1\frac{5}{6}$	$-0,194$	$\frac{7}{108}$
$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{12}{13}$	$-0,166$	$0,051$
5	-2	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{49}$
$5\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{15}$	$-0,124$	$0,0332$
6	$-2\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{64}$	$0,0273$
$6\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{17}$	$-0,0969$	$0,0228$
7	$-2\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{81}$	$0,0192$

Aufgabe (6)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}x - 2}$

Zaehler faktorisieren:

$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 0$

$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 0 \qquad / - \frac{1}{5}$

$-\frac{1}{3}x = -\frac{1}{5} \qquad / : \left(-\frac{1}{3}\right)$

$x = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{3}}$

$x = \frac{3}{5}$

$\underline{x_1 = \frac{3}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-\frac{1}{4}x - 2 = 0$

$-\frac{1}{4}x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$-\frac{1}{4}x = 2 \qquad / : \left(-\frac{1}{4}\right)$

$x = \frac{2}{-\frac{1}{4}}$

$x = -8$

$\underline{x_2 = -8; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}(x - \frac{3}{5})}{-\frac{1}{4}(x + 8)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$

$f(x) = \frac{1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}}{x + 8}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll} (1\frac{1}{3}x & -\frac{4}{5} &) : (x+8) = 1\frac{1}{3} \\ -(1\frac{1}{3}x & +10\frac{2}{3}) & & \\ \hline & -11\frac{7}{15} & & \end{array}$$

$f(x) = 1\frac{1}{3} + \frac{-11\frac{7}{15}}{x + 8}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{1\frac{1}{3} \cdot (x + 8) - (1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}) \cdot 1}{(x + 8)^2}$

$= \frac{(1\frac{1}{3}x + 10\frac{2}{3}) - (1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5})}{(x + 8)^2}$

$= \frac{11\frac{7}{15}}{(x + 8)^2}$

$= \frac{11\frac{7}{15}}{(x + 8)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2 + 16x + 64) - 11\frac{7}{15} \cdot (2x + 16)}{(x^2 + 16x + 64)^2}$

$= \frac{0-(22\frac{14}{15}x+183\frac{7}{15})}{(x^2+16x+64)^2}$
$= \frac{-22\frac{14}{15}x-183\frac{7}{15}}{(x^2+16x+64)^2}$
$= \frac{-22\frac{14}{15}x-183\frac{7}{15}}{(x^2+16x+64)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5} = 0$
$\underline{x_3 = \frac{3}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-8	$< x <$	$\frac{3}{5}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;-8[\quad \cup \quad]\frac{3}{5};\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-8;\frac{3}{5}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x(-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{5}}{x})}{x(-\frac{1}{4}-\frac{2}{x})} = \frac{1,33333333333333}{1} = 1\frac{1}{3}$

Horizontale Asymptote: $y = 1\frac{1}{3}$
$\lim\limits_{x\to-8^+} \frac{1\frac{1}{3}(x-\frac{3}{5})}{(x+8)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-8^-} \frac{1\frac{1}{3}(x-\frac{3}{5})}{(x+8)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -8$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{11\frac{7}{15}}{x^2+16x+64} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{11\frac{7}{15}}{x^2+16x+64}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_4 = -8; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-8	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty;-8[\quad \cup \quad]-8;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{-22\frac{14}{15}x - 183\frac{7}{15}}{x^4 + 32x^3 + 384x^2 + 2,05 \cdot 10^3 x + 4,1 \cdot 10^3}$
$Zaehler = 0$

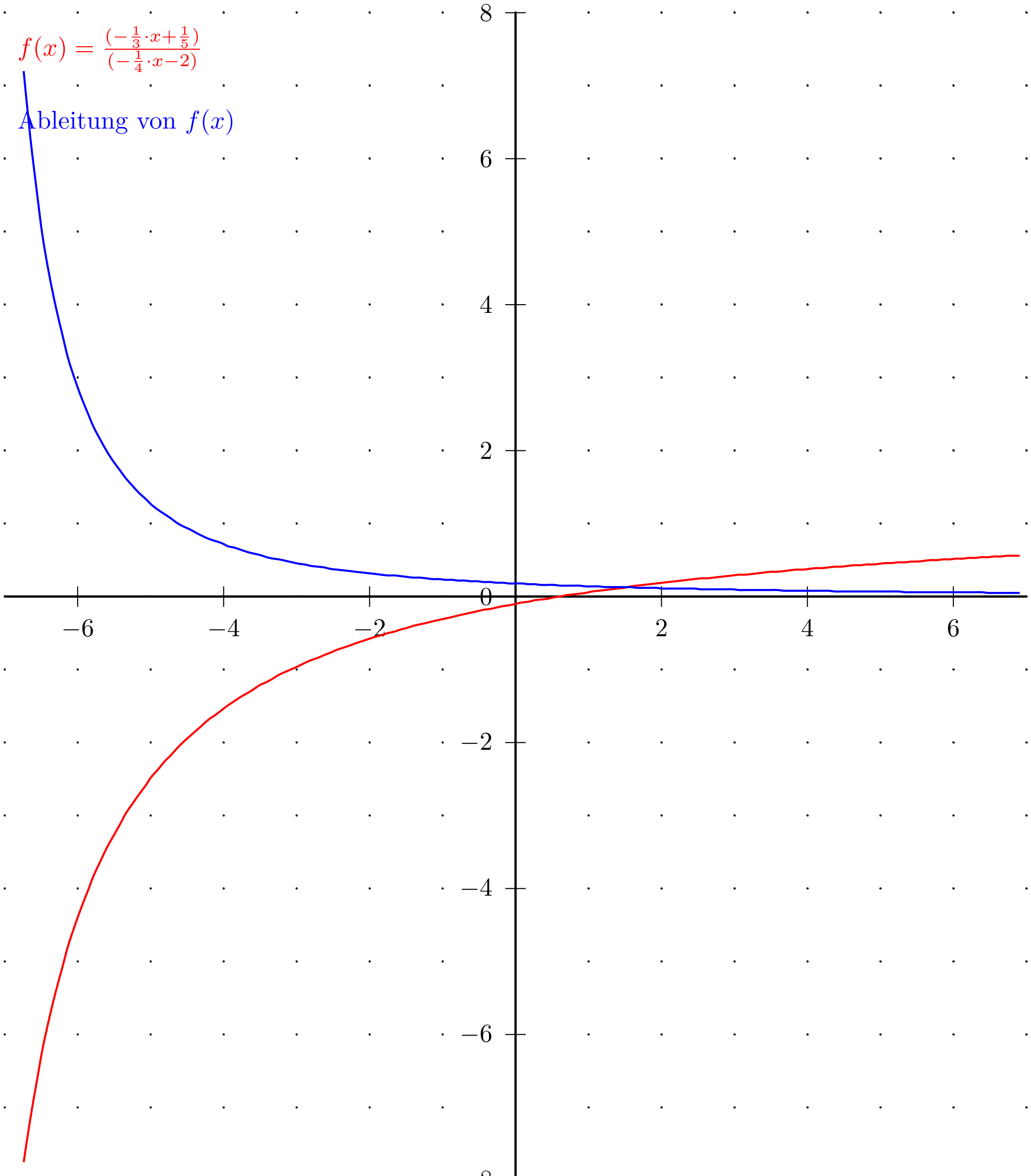
$-22\dfrac{14}{15}x - 183\dfrac{7}{15} = 0 \qquad / + 183\dfrac{7}{15}$
$-22\dfrac{14}{15}x = 183\dfrac{7}{15} \qquad / : \left(-22\dfrac{14}{15}\right)$
$x = \dfrac{183\frac{7}{15}}{-22\frac{14}{15}}$
$x = -8$
$\underline{x_5 = -8; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = -8; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-8	$< x <$	-8	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -8[\quad \cup \quad]-8; -8[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-8; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-10\frac{2}{15}$	$11,5$	$-22,9$
$-6\frac{1}{2}$	$-6\frac{14}{45}$	$5,1$	$-6,8$
-6	$-4\frac{2}{5}$	$2,87$	$-2,87$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{19}{75}$	$1,83$	$-1,47$
-5	$-2\frac{22}{45}$	$1,27$	$-0,849$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{33}{35}$	$0,936$	$-0,535$
-4	$-1\frac{8}{15}$	$0,717$	$-0,358$
$-3\frac{1}{2}$	$-1,21$	$0,566$	$-0,252$
-3	$-\frac{24}{25}$	$0,459$	$-0,183$
$-2\frac{1}{2}$	$-0,752$	$0,379$	$-0,138$
-2	$-\frac{26}{45}$	$0,319$	$-0,106$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{28}{65}$	$0,271$	$-0,0835$
-1	$-\frac{32}{105}$	$0,234$	$-0,0669$
$-\frac{1}{2}$	$-0,196$	$0,204$	$-0,0544$
0	$-\frac{1}{10}$	$0,179$	$-0,0448$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{10}$	$0,179$	$-0,0448$
$\frac{1}{2}$	$-0,0157$	$0,159$	$-0,0373$
1	$0,0593$	$0,142$	$-0,0315$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{95}$	$0,127$	$-0,0267$
2	$\frac{14}{75}$	$0,115$	$-0,0229$
$2\frac{1}{2}$	$0,241$	$0,104$	$-0,0198$
3	$\frac{16}{55}$	$0,0948$	$-0,0172$
$3\frac{1}{2}$	$0,336$	$0,0867$	$-0,0151$
4	$\frac{17}{45}$	$0,0796$	$-0,0133$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{52}{125}$	$0,0734$	$-0,0117$
5	$0,451$	$0,0679$	$-0,0104$
$5\frac{1}{2}$	$0,484$	$0,0629$	$-0,00932$
6	$\frac{18}{35}$	$0,0585$	$-0,00836$
$6\frac{1}{2}$	$0,543$	$0,0545$	$-0,00752$
7	$0,569$	$0,051$	$-0,0068$

Aufgabe (7)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-x^2 + x}{x^2 - 1}$

Zaehler faktorisieren:

$-x^2 + x = 0$

$x(-x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad -x+1 = 0$

$-1x + 1 = 0 \qquad / -1$

$-1x = -1 \qquad / : (-1)$

$x = \frac{-1}{-1}$

$x = 1$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 1 = 0$

$1x^2 - 1 = 0 \qquad / +1$

$1x^2 = 1 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{1}{1}$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_3 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{-x}{(x+1)}$

$f(x) = \frac{-x}{x+1}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{l} \quad (-x \qquad\qquad) : (x+1) = -1 \\ \underline{-(-x \quad -1) \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad 1 \end{array}$$

$f(x) = -1 + \frac{1}{x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(-1)\cdot(x+1) - (-x)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$= \frac{(-x-1) - (-x)}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \frac{0\cdot(x^2+2x+1) - (-1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{0 - (-2x-2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4}$
$= \dfrac{2}{(x+1)^3}$
$= \dfrac{2}{x^3+3x^2+3x+1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-x = 0$
$\underline{x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2(-1+x)}{x^2(1-\dfrac{1}{x^2})} = \dfrac{-1}{1} = -1$
Horizontale Asymptote: $y = -1$
$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-x}{(x+1)} = \infty$
$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-x}{(x+1)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+2x+1} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+2x+1}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

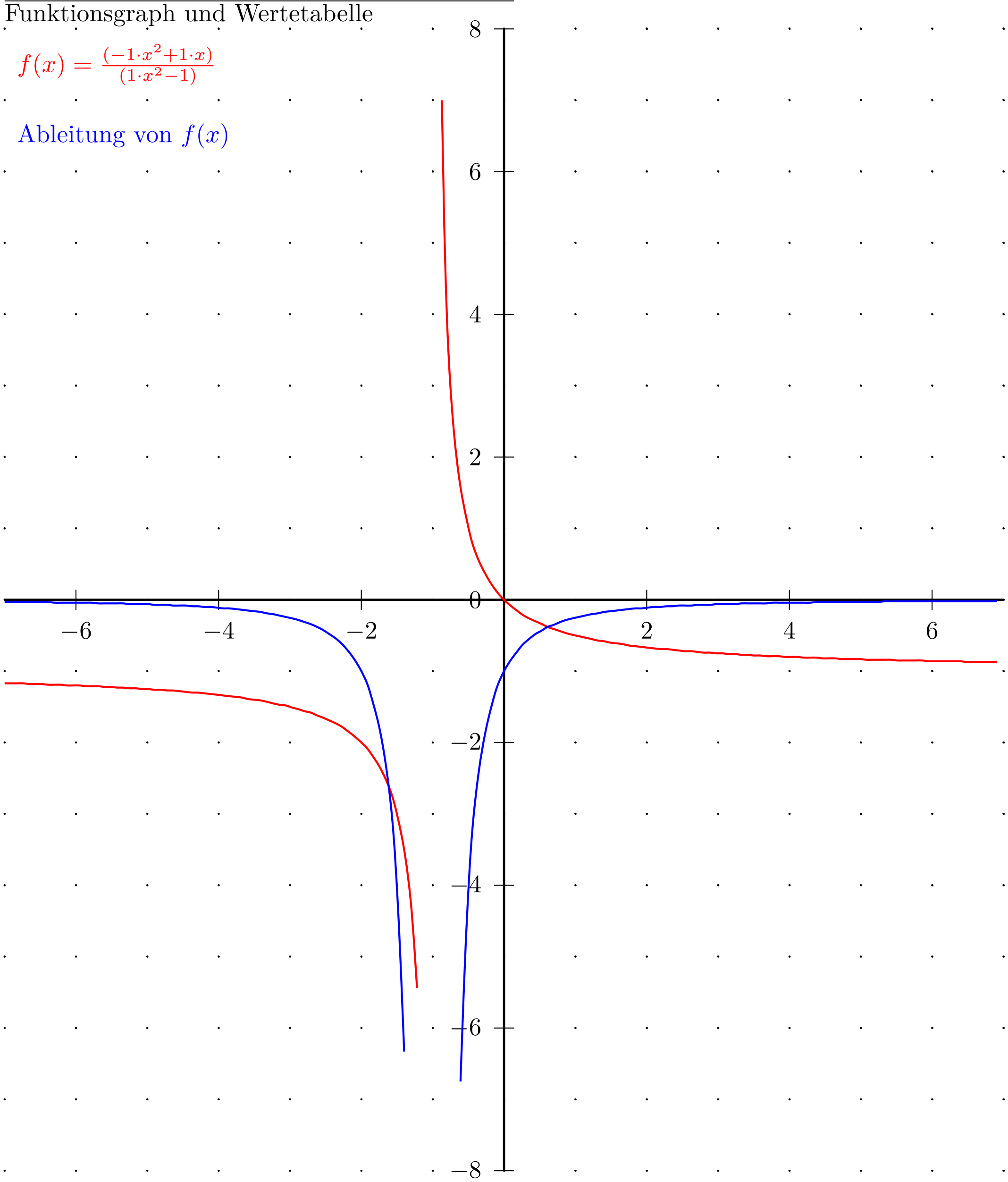
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_7 = -1;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{108}$
$-6\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$-0,012$
-6	$-1\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-5	$-1\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-4	$-1\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-3\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-3	$-1\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-2	-2	-1	-2
$-1\frac{1}{2}$	-3	-4	-16
-1	$-\infty$	$3265\frac{15}{49}$	∞
$-\frac{1}{2}$	1	-4	16
0	0	-1	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-1	2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-0,445$	$0,593$
1	NaN	$-0,25$	NaN
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-0,16$	$0,128$
2	$-\frac{2}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
3	$-\frac{3}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
4	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{4}{121}$	$0,012$
5	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
6	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{15}$	$-0,0178$	$0,00474$
7	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{64}$	$0,00391$

Aufgabe (8)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+2x}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x^2+2x=0$

$x(2x+2)=0 \Rightarrow x=0 \quad \vee \quad 2x+2=0$

$2x+2=0 \qquad /-2$

$2x=-2 \qquad /:2$

$x = \dfrac{-2}{2}$

$x=-1$

$\underline{x_2 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2(x+1)x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}(x+1)}{x}$

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{l}
(\frac{1}{2}x \quad +\frac{1}{2} \quad) : (x) = \frac{1}{2} \\
-(\frac{1}{2}x) \\
\hline
\qquad\quad \frac{1}{2}
\end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot x - (\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\cdot 1}{(x)^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}x - (\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})}{(x)^2}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}}{(x)^2}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}}{(x)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{x}{(x^2)^2}$
$= \frac{x}{(x^2)^2}$
$= \frac{x}{x^4}$
$= \frac{1}{x^3}$
$= \frac{1}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$
$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(2 + \frac{2}{x})} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$
Horizontale Asymptote: $y = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{1}{x^3}$

$Zaehler = 0$

keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

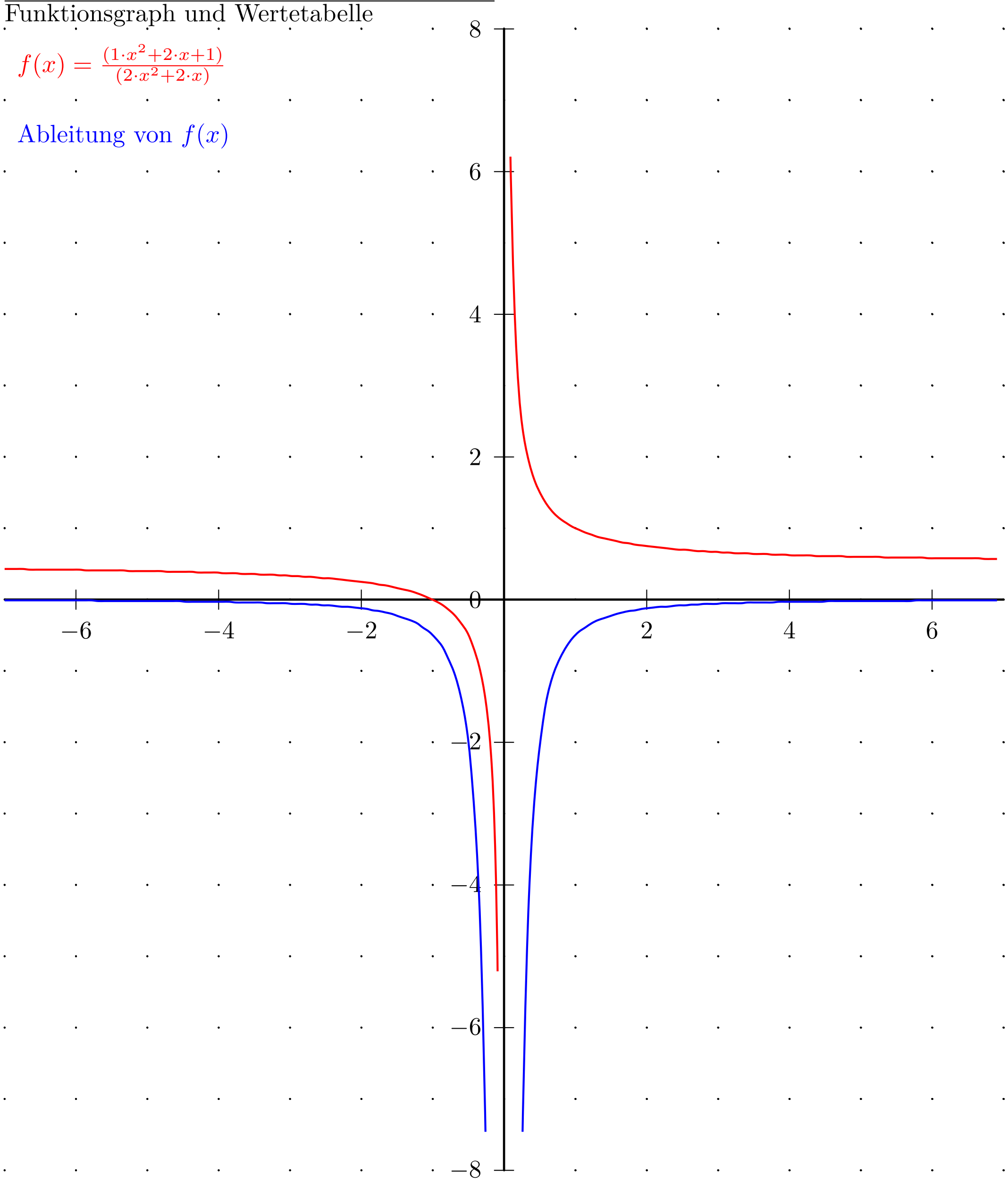
$x_6 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;0[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{98}$	$-0,00292$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{11}{26}$	$-0,0118$	$-0,00364$
-6	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{72}$	$-0,00463$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{9}{22}$	$-\frac{2}{121}$	$-0,00601$
-5	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{125}$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{2}{81}$	$-0,011$
-4	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{5}{14}$	$-0,0408$	$-0,0233$
-3	$\frac{1}{3}$	$-0,0556$	$-0,037$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$-0,08$	$-0,064$
-2	$\frac{1}{4}$	$-0,125$	$-0,125$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-0,222$	$-0,296$
-1	NaN	$-0,5$	NaN
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$-8,01$
0	∞	$1632\frac{32}{49}$	$-\infty$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	∞	$1632\frac{32}{49}$	$-\infty$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	-2	$8,01$
1	1	$-0,5$	1
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$-0,222$	$0,296$
2	$\frac{3}{4}$	$-0,125$	$0,125$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$-0,08$	$0,064$
3	$\frac{2}{3}$	$-0,0556$	$0,037$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$-0,0408$	$0,0233$
4	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{11}{18}$	$-\frac{2}{81}$	$0,011$
5	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{50}$	$\frac{1}{125}$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{13}{22}$	$-\frac{2}{121}$	$0,00601$
6	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{72}$	$0,00463$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{15}{26}$	$-0,0118$	$0,00364$
7	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{98}$	$0,00292$

Aufgabe (9)

•Funktion/Faktorisieren
$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$
Zaehler faktorisieren:
$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm0}{2}$
$x_1=\dfrac{-2+0}{2}\qquad x_2=\dfrac{-2-0}{2}$
$x_1=-1\qquad x_2=-1$
$\underline{x_1=-1;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2-4=0$

$1x^2-4=0\qquad /+4$
$1x^2=4\qquad /:1$
$x^2=\dfrac{4}{1}$
$x=\pm\sqrt{4}$
$x_1=2\qquad x_2=-2$
$\underline{x_2=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f\left(x\right)=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$
$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$
$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll} (x^2 & +2x & +1 &):(x^2-4)=1 \\ -(x^2 & & -4) & \\ \hline & 2x & +5 & \end{array}$$

$f(x)=1+\dfrac{2x+5}{x^2-4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'\left(x\right)=\dfrac{(2x+2)\cdot(x^2-4)-(x^2+2x+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$
$=\dfrac{(2x^3+2x^2-8x-8)-(2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$
$=\dfrac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$
$=\dfrac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$
$f''\left(x\right)=\dfrac{(-4x-10)\cdot(x^4-8x^2+16)-(-2x^2-10x-8)\cdot(4x^3-16x)}{(x^4-8x^2+16)^2}$

$= \frac{(-4x^5 - 10x^4 + 32x^3 + 80x^2 - 64x - 160) - (-8x^5 - 40x^4 + 160x^2 + 128x)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$
$= \frac{4x^5 + 30x^4 + 32x^3 - 80x^2 - 192x - 160}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$
$= \frac{4x^5 + 30x^4 + 32x^3 - 80x^2 - 192x - 160}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$\underline{x_4 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-2; -1[\quad \cup \quad]-1; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \frac{1}{1} = 1$
Horizontale Asymptote: $y = 1$
$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$
$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$

$-2x^2 - 10x - 8 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$
$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$
$x_{1/2} = \frac{10 \pm 6}{-4}$
$x_1 = \frac{10 + 6}{-4} \qquad x_2 = \frac{10 - 6}{-4}$
$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_5 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-4) = \frac{1}{24} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-4/\frac{3}{4})}$
$f''(-1) = -\frac{2}{3}$
$f''(-1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-1/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$
Zaehler = 0
$\underline{x_7 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-4	$< x <$	-2	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-4; -2[\quad \cup \quad]-2; -1[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]-1; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{4x^5 + 30x^4 + 32x^3 - 80x^2 - 192x - 160}{x^8 - 16x^6 + 96x^4 - 256x^2 + 256}$
$Zaehler = 0$

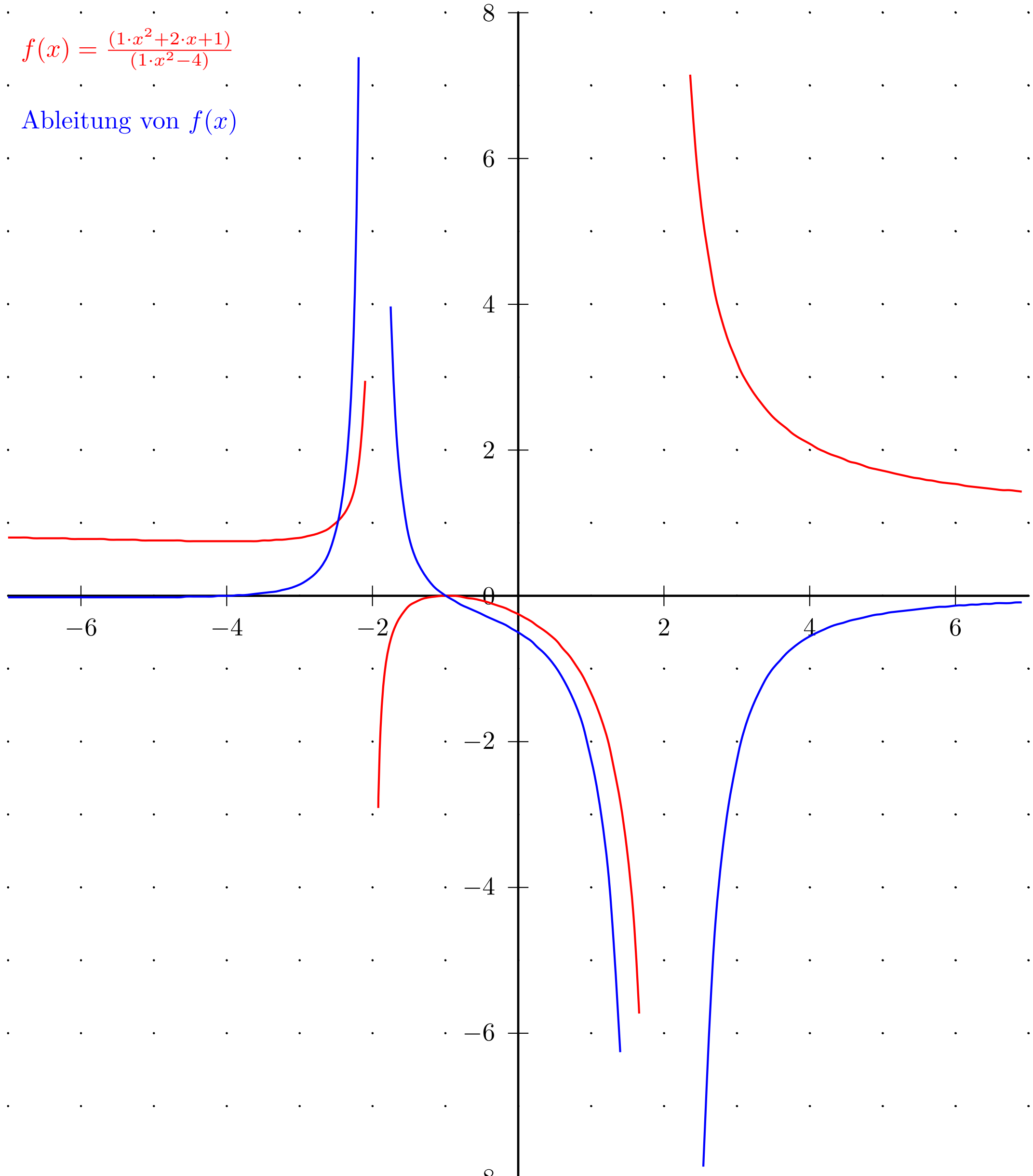
$NumerischeSuche:$
$\underline{x_11 = -5,7; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_12 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_13 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_14 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_15 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-5,7$	$< x <$	-2	$< x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-5,7; -2[\quad \cup \quad]-2; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -5,7[\quad \cup \quad]-2; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{4}{5}$	$-0,0178$	$-0,00217$
$-6\frac{1}{2}$	$0,791$	$-0,0188$	$-0,00184$
-6	$\frac{25}{32}$	$-0,0195$	$-0,000976$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{27}{35}$	$-0,0196$	$0,000995$
-5	$\frac{16}{21}$	$-0,0181$	$0,0054$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{49}{65}$	$-0,0133$	$0,0156$
-4	$\frac{3}{4}$	$4,25 \cdot 10^{-6}$	$0,0417$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{25}{33}$	$0,0367$	$0,121$
-3	$\frac{4}{5}$	$0,16$	$0,464$
$-2\frac{1}{2}$	1	$0,89$	$3,96$
-2	∞	-816	$-\infty$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$0,818$	$-4,11$
-1	0	$6,81 \cdot 10^{-5}$	$-0,667$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$-0,249$	$-0,436$
0	$-\frac{1}{4}$	$-0,5$	$-0,625$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{4}$	$-0,5$	$-0,625$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-0,96$	$-1,37$
1	$-1\frac{1}{3}$	$-2,22$	$-4,52$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{4}{7}$	$-8,99$	$-36,1$
2	∞	$7,35 \cdot 10^{3}$	$-\infty$
$2\frac{1}{2}$	$5\frac{4}{9}$	-9	36
3	$3\frac{1}{5}$	$-2,24$	$4,5$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{11}$	$-0,992$	$1,33$
4	$2\frac{1}{12}$	$-0,556$	$0,56$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{56}{65}$	$-0,354$	$0,286$
5	$1\frac{5}{7}$	$-0,245$	$0,165$
$5\frac{1}{2}$	$1\frac{64}{105}$	$-0,179$	$\frac{11}{106}$
6	$1\frac{17}{32}$	$-0,137$	$0,0693$
$6\frac{1}{2}$	$1\frac{8}{17}$	$-0,108$	$0,0486$
7	$1\frac{19}{45}$	$-0,0869$	$0,0353$

Aufgabe (10)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{8}}{-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}}$

Zaehler faktorisieren:

$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{8} = 0$

$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{8} = 0$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{8}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{0,327}}{-\frac{2}{3}}$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{5} \pm 0,572}{-\frac{2}{3}}$

$x_1 = \frac{-\frac{2}{5} + 0,572}{-\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \frac{-\frac{2}{5} - 0,572}{-\frac{2}{3}}$

$x_1 = -0,257 \qquad x_2 = 1,46$

$\underline{x_1 = -0,257; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1,46; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$

$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$

$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{0}}{-1}$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm 0}{-1}$

$x_1 = \frac{1+0}{-1} \qquad x_2 = \frac{1-0}{-1}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_3 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}(x + 0,257)(x - 1,46)}{-\frac{1}{2}(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{4}}{x^2 + 2x + 1}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll}
(\frac{2}{3}x^2 & -\frac{4}{5}x & -\frac{1}{4} &) : (x^2 + 2x + 1) = \frac{2}{3} \\
-(\frac{2}{3}x^2 & +1\frac{1}{3}x & +\frac{2}{3}) & \\
\hline
 & -2\frac{2}{15}x & -\frac{11}{12} &
\end{array}$$

$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{-2\frac{2}{15}x - \frac{11}{12}}{x^2 + 2x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}) \cdot (x^2 + 2x + 1) - (\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{4}) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \frac{(1\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{13}{15}x^2 - \frac{4}{15}x - \frac{4}{5}) - (1\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{15}x^2 - 2\frac{1}{10}x - \frac{1}{2})}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \frac{2\frac{2}{15}x^2 + 1\frac{5}{6}x - \frac{3}{10}}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \frac{2\frac{2}{15}x^2 + 1\frac{5}{6}x - \frac{3}{10}}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \frac{2\frac{2}{15}(x + 1)(x - \frac{9}{64})}{(x + 1)^4}$

$= \frac{2\frac{2}{15}(x - \frac{9}{64})}{(x + 1)^3}$

$= \frac{2\frac{2}{15}x - \frac{3}{10}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

$f''(x) = \frac{2\frac{2}{15} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (2\frac{2}{15}x - \frac{3}{10}) \cdot (3x^2 + 6x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{(2\frac{2}{15}x^3 + 6\frac{2}{5}x^2 + 6\frac{2}{5}x + 2\frac{2}{15}) - (6\frac{2}{5}x^3 + 11\frac{9}{10}x^2 + 4\frac{3}{5}x - \frac{9}{10})}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{-4\frac{4}{15}x^3 - 5\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{4}{5}x + 3\frac{1}{30}}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{-4\frac{4}{15}x^3 - 5\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{4}{5}x + 3\frac{1}{30}}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{4} = 0$

$\underline{x_4 = -0,257; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 1,46; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	$-0,257$	$< x <$	$1,46$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; -0,257[\quad \cup \quad]1,46; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-0,257; 1,46[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(-\frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{5}}{x} + \frac{\frac{1}{8}}{x^2})}{x^2(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2})} = \frac{0,666666666666667}{1} = \frac{2}{3}$$

Horizontale Asymptote: $y = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{\frac{2}{3}(x + 0,257)(x - 1,46)}{(x + 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{\frac{2}{3}(x + 0,257)(x - 1,46)}{(x + 1)^2} = \infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{2\frac{2}{15}x - \frac{3}{10}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = 0$

$2\dfrac{2}{15}x - \dfrac{3}{10} = 0 \qquad / + \dfrac{3}{10}$

$2\dfrac{2}{15}x = \dfrac{3}{10} \qquad / : 2\dfrac{2}{15}$

$x = \dfrac{\frac{3}{10}}{2\frac{2}{15}}$

$x = \dfrac{9}{64}$

$\underline{x_6 = \dfrac{9}{64}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(\dfrac{9}{64}) = 1,44 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\dfrac{9}{64}/ - 0,268)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'\,(x) = \dfrac{2\frac{2}{15}x - \frac{3}{10}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

Zaehler = 0

$\underline{x_7 = \dfrac{9}{64}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_8 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{9}{64}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]\dfrac{9}{64}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-1; \dfrac{9}{64}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''\,(x) = \dfrac{-4\frac{4}{15}x^3 - 5\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{4}{5}x + 3\frac{1}{30}}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$

$Zaehler = 0$

$-4\dfrac{4}{15}x^3 - 5\dfrac{1}{2}x^2 + 1\dfrac{4}{5}x + 3\dfrac{1}{30} = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_9 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_10 = 0,711; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

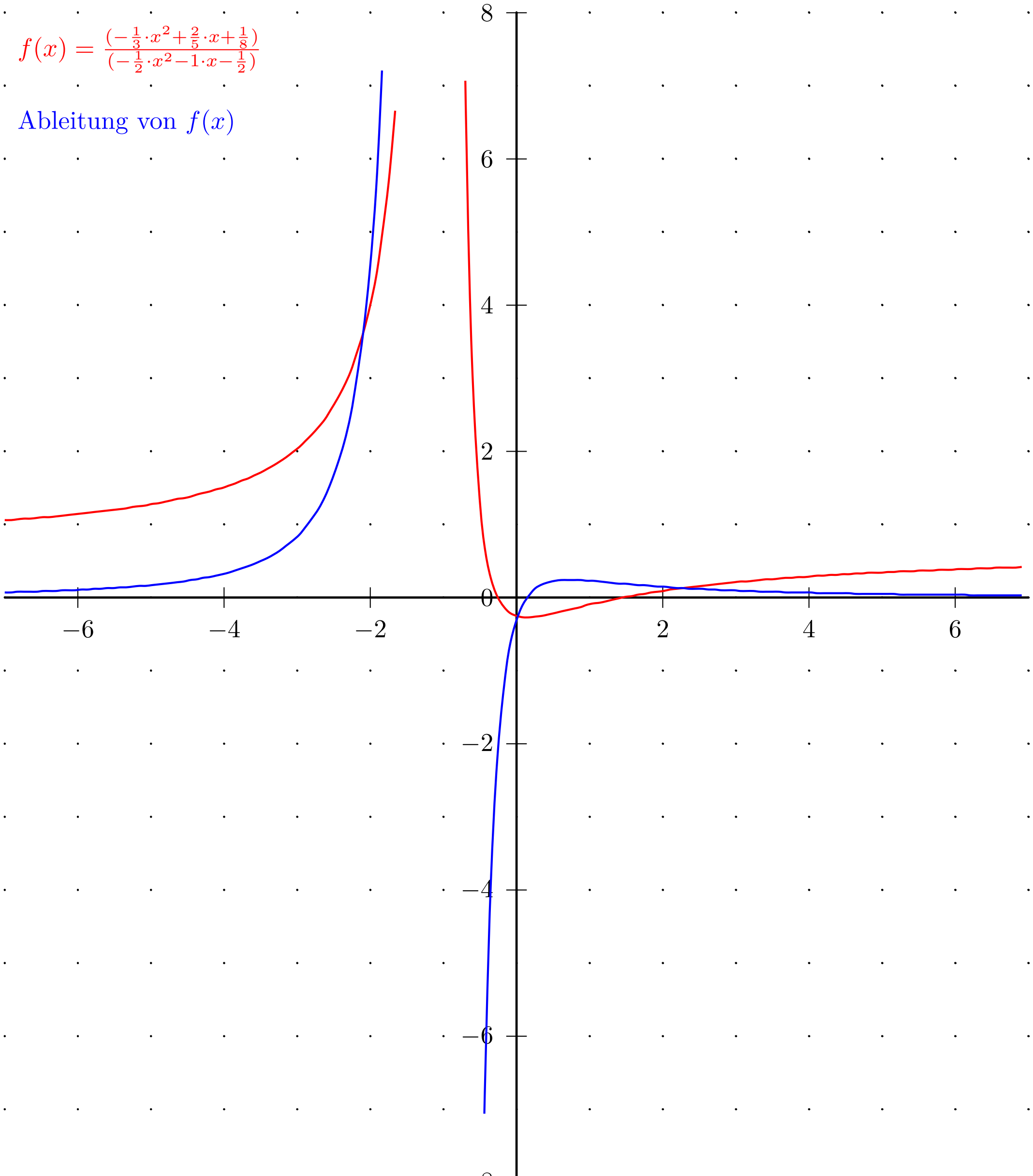
$\underline{x_11 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	-1	$< x <$	$0,711$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; -1[\quad \cup \quad]-1; 0,711[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]0,711; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1,06$	$0,0705$	$0,0254$
$-6\frac{1}{2}$	$1,09$	$0,0852$	$0,0336$
-6	$1,14$	$0,105$	$0,0458$
$-5\frac{1}{2}$	$1,2$	$0,132$	$0,0646$
-5	$1,28$	$0,171$	$0,0952$
$-4\frac{1}{2}$	$1,38$	$0,231$	$0,148$
-4	$1,51$	$0,327$	$0,248$
$-3\frac{1}{2}$	$1,71$	$0,497$	$0,46$
-3	$2\frac{3}{80}$	$0,838$	$0,99$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{17}{27}$	$1,67$	$2,71$
-2	$4\frac{1}{60}$	$4,57$	$11,6$
$-1\frac{1}{2}$	$9\frac{4}{5}$	$28,1$	151
-1	$-\infty$	$-6,97\cdot 10^3$	∞
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{15}$	-11	$82,9$
0	$-\frac{1}{4}$	$-0,301$	$3,04$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{4}$	$-0,301$	$3,04$
$\frac{1}{2}$	$-0,215$	$0,227$	$0,178$
1	$-0,0958$	$0,229$	$-0,0771$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{125}$	$0,186$	$-0,0862$
2	$0,0907$	$0,147$	$-0,0679$
$2\frac{1}{2}$	$0,156$	$0,117$	$-0,0509$
3	$0,209$	$0,0953$	$-0,0382$
$3\frac{1}{2}$	$0,253$	$0,0786$	$-0,029$
4	$0,289$	$0,0659$	$-0,0225$
$4\frac{1}{2}$	$0,319$	$0,0559$	$-0,0177$
5	$0,345$	$0,048$	$-0,0141$
$5\frac{1}{2}$	$0,367$	$0,0416$	$-0,0114$
6	$0,387$	$0,0364$	$-0,0094$
$6\frac{1}{2}$	$0,404$	$0,0322$	$-0,00781$
7	$0,419$	$0,0286$	$-0,00655$

Aufgabe (11)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2 - 5x - 27}{x^2 + 3x}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 - 5x - 27 = 0$

$1x^2 - 5x - 27 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{133}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{5 \pm 11,5}{2}$

$x_1 = \frac{5 + 11,5}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - 11,5}{2}$

$x_1 = 8,27 \qquad x_2 = -3,27$

$\underline{x_1 = -3,27; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 8,27; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 3x = 0$

$x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$

$x + 3 = 0 \qquad / - 3$

$x = -3$

$\underline{x_3 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$

$f(x) = \frac{x^2 - 5x - 27}{x^2 + 3x}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll} (x^2 & -5x & -27 &) : (x^2 + 3x) = 1 \\ -(x^2 & +3x) & & \\ \hline & -8x & -27 & \end{array}$$

$f(x) = 1 + \frac{-8x - 27}{x^2 + 3x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(2x - 5) \cdot (x^2 + 3x) - (x^2 - 5x - 27) \cdot (2x + 3)}{(x^2 + 3x)^2}$

$= \frac{(2x^3 + x^2 - 15x) - (2x^3 - 7x^2 - 69x - 81)}{(x^2 + 3x)^2}$

$= \frac{8x^2 + 54x + 81}{(x^2 + 3x)^2}$

$= \frac{8x^2 + 54x + 81}{(x^2 + 3x)^2}$

$f''(x) = \frac{(16x + 54) \cdot (x^4 + 6x^3 + 9x^2) - (8x^2 + 54x + 81) \cdot (4x^3 + 18x^2 + 18x)}{(x^4 + 6x^3 + 9x^2)^2}$

$= \frac{(16x^5 + 150x^4 + 468x^3 + 486x^2) - (32x^5 + 360x^4 + 1,44 \cdot 10^3 x^3 + 2,43 \cdot 10^3 x^2 + 1,46 \cdot 10^3 x)}{(x^4 + 6x^3 + 9x^2)^2}$

$= \dfrac{-16x^5 - 210x^4 - 972x^3 - 1,94 \cdot 10^3x^2 - 1,46 \cdot 10^3x}{(x^4 + 6x^3 + 9x^2)^2}$
$= \dfrac{-16x^5 - 210x^4 - 972x^3 - 1,94 \cdot 10^3x^2 - 1,46 \cdot 10^3x}{(x^4 + 6x^3 + 9x^2)^2}$
$= \dfrac{-16(x^2 + 4,35x + 5,26)(x + 5,78)(x + 3)x}{(x + 3)^4x^4}$
$= \dfrac{-16(x^2 + 4,35x + 5,26)(x + 5,78)}{(x + 3)^3x^3}$
$= \dfrac{-16x^3 - 162x^2 - 486x - 486}{x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^2 - 5x - 27 = 0$
$\underline{x_5 = -3,27; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 8,27; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,27$	$< x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	$8,27$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -3,27[\quad \cup \quad]-3; 0[\quad \cup \quad]8,27; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-3,27; -3[\quad \cup \quad]0; 8,27[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2(1 - \frac{5}{x} - \frac{27}{x^2})}{x^2(1 + \frac{3}{x})} = \dfrac{1}{1} = 1$
Horizontale Asymptote: $y = 1$
$\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$
$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{8x^2 + 54x + 81}{x^4 + 6x^3 + 9x^2} = 0$

$8x^2 + 54x + 81 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 81}}{2 \cdot 8}$
$x_{1/2} = \dfrac{-54 \pm \sqrt{324}}{16}$
$x_{1/2} = \dfrac{-54 \pm 18}{16}$

$x_1 = \frac{-54+18}{16} \qquad x_2 = \frac{-54-18}{16}$

$x_1 = -2\frac{1}{4} \qquad x_2 = -4\frac{1}{2}$

$\underline{x_7 = -4\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = -2\frac{1}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-4\frac{1}{2}) = -\frac{32}{81}$

$f''(-4\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-4\frac{1}{2}/2\frac{1}{3})}$

$f''(-2\frac{1}{4}) = 6\frac{26}{81} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2\frac{1}{4}/6\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{8x^2+54x+81}{x^4+6x^3+9x^2}$

Zaehler = 0

$\underline{x_9 = -4\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_10 = -2\frac{1}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_11 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_12 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-4\frac{1}{2}$	$< x <$	-3	$< x <$	$-2\frac{1}{4}$	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-2\frac{1}{4};0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty;-4\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]-4\frac{1}{2};-3[\quad \cup \quad]-3;-2\frac{1}{4}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-16x^3-162x^2-486x-486}{x^6+9x^5+27x^4+27x^3}$

$Zaehler = 0$

$-16x^3 - 162x^2 - 486x - 486 = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_13 = -5,78; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_14 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

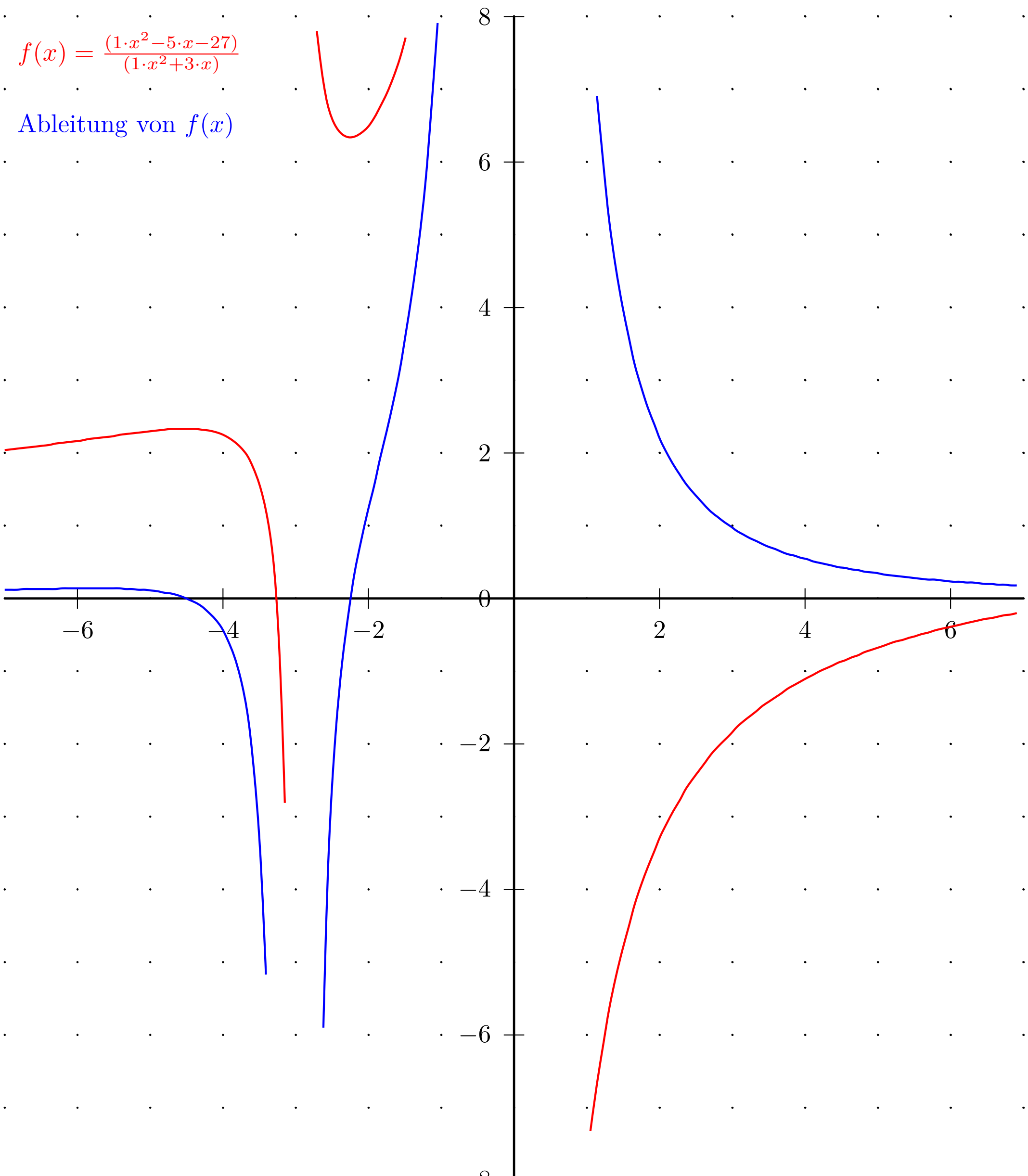
$\underline{x_15 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-5,78$	$< x <$	-3	$< x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty;-5,78[\quad \cup \quad]-3;0[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-5,78;-3[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2\frac{1}{28}$	$0,121$	$0,0212$
$-6\frac{1}{2}$	$2\frac{9}{91}$	$0,131$	$0,0189$
-6	$2\frac{1}{6}$	$0,139$	$0,00926$
$-5\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{55}$	$0,138$	$-0,0198$
-5	$2\frac{3}{10}$	$0,11$	$-0,106$
$-4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$-5,38\cdot 10^{-5}$	$-0,395$
-4	$2\frac{1}{4}$	$-0,438$	$-1,72$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{7}$	$-3,27$	$-15,6$
-3	$-\infty$	$3,27\cdot 10^{3}$	∞
$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{5}$	$-2,56$	$17,2$
-2	$6\frac{1}{2}$	$1,25$	$4,25$
$-1\frac{1}{2}$	$7\frac{2}{3}$	$3,56$	$5,93$
-1	$10\frac{1}{2}$	$8,75$	$18,3$
$-\frac{1}{2}$	$19\frac{2}{5}$	$35,9$	144
0	$-\infty$	$-2,94\cdot 10^{4}$	∞

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\infty$	$-2,94\cdot 10^{4}$	∞
$\frac{1}{2}$	$-16\frac{5}{7}$	36	-144
1	$-7\frac{3}{4}$	$8,94$	-18
$1\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{9}$	$3,95$	$-5,31$
2	$-3\frac{3}{10}$	$2,21$	$-2,23$
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{23}{55}$	$1,41$	$-1,14$
3	$-1\frac{5}{6}$	$0,972$	$-0,657$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{38}{91}$	$0,711$	$-0,413$
4	$-1\frac{3}{28}$	$0,542$	$-0,275$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{15}$	$0,427$	$-0,193$
5	$-\frac{27}{40}$	$0,344$	$-0,14$
$5\frac{1}{2}$	$-0,519$	$0,284$	$-0,105$
6	$-\frac{7}{18}$	$0,238$	$-0,0806$
$6\frac{1}{2}$	$-0,279$	$0,202$	$-0,0632$
7	$-\frac{13}{70}$	$0,174$	$-0,0505$

Aufgabe (12)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{4x^2 + 12x + 5}{-2x^2 + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$4x^2 + 12x + 5 = 0$

$4x^2 + 12x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4}$

$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{64}}{8}$

$x_{1/2} = \dfrac{-12 \pm 8}{8}$

$x_1 = \dfrac{-12 + 8}{8} \qquad x_2 = \dfrac{-12 - 8}{8}$

$x_1 = -\dfrac{1}{2} \qquad x_2 = -2\dfrac{1}{2}$

$\underline{x_1 = -2\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-2x^2 + 1 = 0$

$-2x^2 + 1 = 0 \qquad / -1$

$-2x^2 = -1 \qquad / : (-2)$

$x^2 = \dfrac{-1}{-2}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$x_1 = 0,707 \qquad x_2 = -0,707$

$\underline{x_3 = -0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{4(x + 2\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})}{-2(x + 0,707)(x - 0,707)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-0,707; 0,707\}$

$f(x) = \dfrac{-2x^2 - 6x - 2\frac{1}{2}}{x^2 - \frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(-2x^2 & -6x & -2\frac{1}{2} &) : (x^2 - \frac{1}{2}) = -2 \\
-(-2x^2 & & +1) & \\
\hline
 & -6x & -3\frac{1}{2} &
\end{array}$$

$f(x) = -2 + \dfrac{-6x - 3\frac{1}{2}}{x^2 - \frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(-4x - 6) \cdot (x^2 - \frac{1}{2}) - (-2x^2 - 6x - 2\frac{1}{2}) \cdot 2x}{(x^2 - \frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{(-4x^3 - 6x^2 + 2x + 3) - (-4x^3 - 12x^2 - 5x)}{(x^2 - \frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{6x^2+7x+3}{(x^2-\frac{1}{2})^2}$
$= \dfrac{6x^2+7x+3}{(x^2-\frac{1}{2})^2}$
$f''(x) = \dfrac{(12x+7)\cdot(x^4-x^2+\frac{1}{4})-(6x^2+7x+3)\cdot(4x^3-2x)}{(x^4-x^2+\frac{1}{4})^2}$
$= \dfrac{(12x^5+7x^4-12x^3-7x^2+3x+1\frac{3}{4})-(24x^5+28x^4-14x^2-6x)}{(x^4-x^2+\frac{1}{4})^2}$
$= \dfrac{-12x^5-21x^4-12x^3+7x^2+9x+1\frac{3}{4}}{(x^4-x^2+\frac{1}{4})^2}$
$= \dfrac{-12x^5-21x^4-12x^3+7x^2+9x+1\frac{3}{4}}{(x^4-x^2+\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-2x^2-6x-2\dfrac{1}{2}=0$
$x_5 = -2\dfrac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle
$x_6 = -\dfrac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2\frac{1}{2}$	$< x <$	$-0,707$	$< x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x <$	$0,707$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2\frac{1}{2}; -0,707[\quad \cup \quad]-\frac{1}{2}; 0,707[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]-0,707; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]0,707; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2(4+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2(-2+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{-2}{1} = -2$
Horizontale Asymptote: $y=-2$
$\lim\limits_{x\to-0,707^+} \dfrac{-2(x+2\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+0,707)(x-0,707)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-0,707^-} \dfrac{-2(x+2\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+0,707)(x-0,707)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x=-0,707$
$\lim\limits_{x\to0,707^+} \dfrac{-2(x+2\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+0,707)(x-0,707)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to0,707^-} \dfrac{-2(x+2\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+0,707)(x-0,707)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x=0,707$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{6x^2+7x+3}{x^4-x^2+\frac{1}{4}} = 0$
$6x^2+7x+3=0$
$x_{1/2} = \dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot6\cdot3}}{2\cdot6}$

$x_{1/2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{-23}}{12}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{6x^2 + 7x + 3}{x^4 - x^2 + \frac{1}{4}}$
Zaehler = 0

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_7 = -0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-0,707$	$< x <$	$0,707$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-0,707; 0,707[\quad \cup \quad]0,707; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -0,707[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-12x^5 - 21x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 9x + 1\frac{3}{4}}{x^8 - 2x^6 + 1\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}}$
$Zaehler = 0$

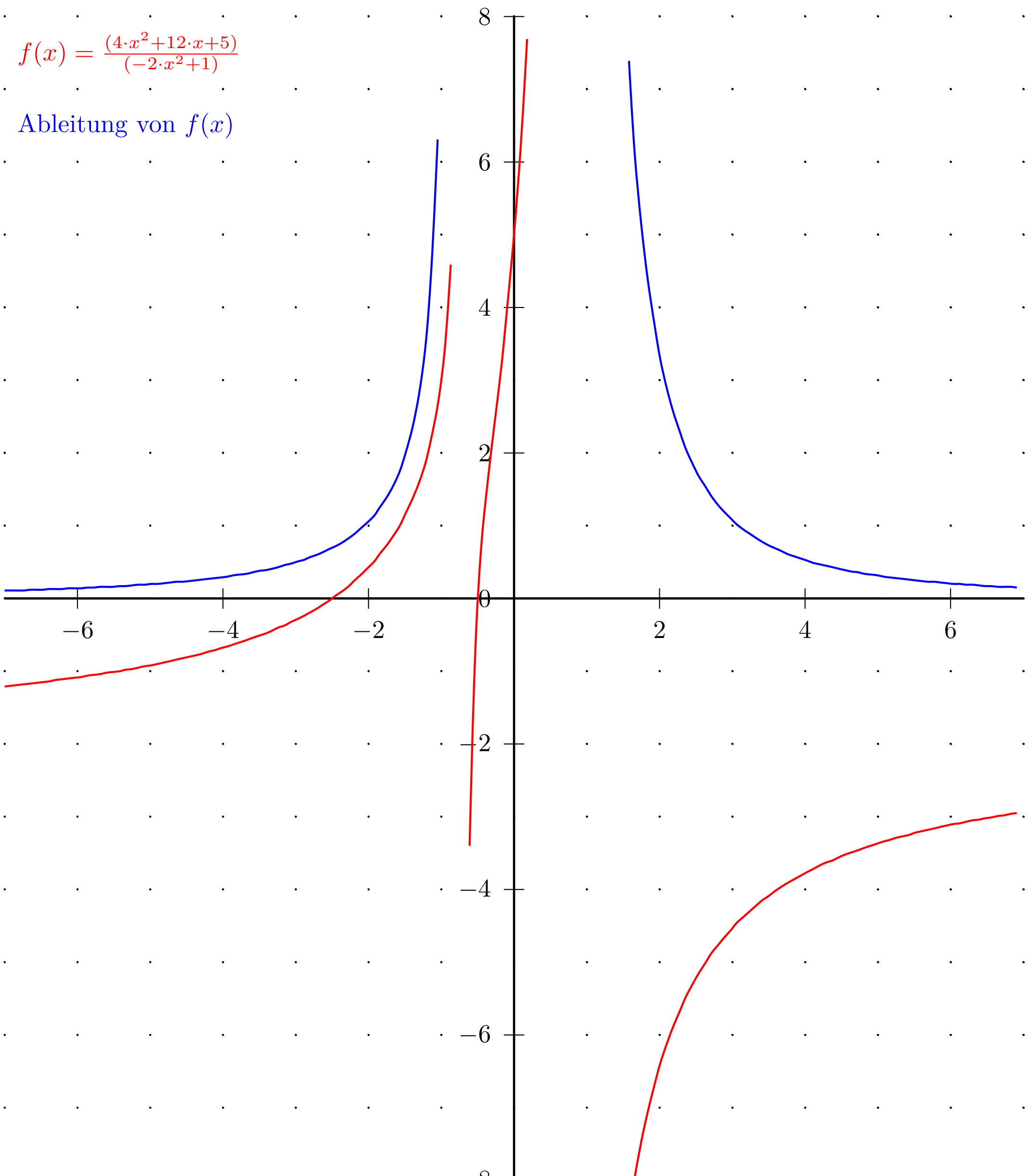
$NumerischeSuche:$
$\underline{x_9 = -0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10 = -0,263; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_11 = 0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_12 = -0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_13 = 0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-0,707$	$< x <$	$-0,707$	$< x <$	$-0,263$	$< x <$	$0,707$	$< x <$	$0,707$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -0,707[\quad \cup \quad]-0,707; -0,707[\quad \cup \quad]-0,263; 0,707[\quad \cup \quad]0,707; 0,707[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-0,707; -0,263[\quad \cup \quad]0,707; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{20}{97}$	$0,105$	$0,0281$
$-6\frac{1}{2}$	$-1,15$	$0,121$	$0,0347$
-6	$-1\frac{6}{71}$	$0,14$	$0,0434$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{119}$	$0,165$	$0,0553$
-5	$-\frac{45}{49}$	$0,197$	$0,0722$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{64}{79}$	$0,238$	$0,0968$
-4	$-\frac{21}{31}$	$0,296$	$0,134$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{24}{47}$	$0,377$	$0,195$
-3	$-\frac{5}{17}$	$0,498$	$0,302$
$-2\frac{1}{2}$	0	$0,696$	$0,514$
-2	$\frac{3}{7}$	$1,06$	$1,04$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{7}$	$1,96$	$3,13$
-1	3	$8,02$	$44,1$
$-\frac{1}{2}$	0	$16,1$	-113
0	5	12	28

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	12	28
$\frac{1}{2}$	24	129	$1,24 \cdot 10^3$
1	-21	$64,2$	-438
$1\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{7}$	$8,82$	$-22,1$
2	$-6\frac{3}{7}$	$3,35$	$-5,12$
$2\frac{1}{2}$	$-5\frac{5}{23}$	$1,75$	$-1,93$
3	$-4\frac{9}{17}$	$1\frac{9}{113}$	$-0,929$
$3\frac{1}{2}$	$-4\frac{4}{47}$	$0,732$	$-0,517$
4	$-3\frac{24}{31}$	$0,529$	$-0,317$
$4\frac{1}{2}$	$-3\frac{43}{79}$	$0,4$	$-0,208$
5	$-3\frac{18}{49}$	$0,313$	$-0,144$
$5\frac{1}{2}$	$-3\frac{27}{119}$	$0,252$	$-0,104$
6	$-3\frac{8}{71}$	$0,207$	$-0,0773$
$6\frac{1}{2}$	$-3,02$	$0,173$	$-0,0591$
7	$-2\frac{91}{97}$	$0,147$	$-0,0462$

Aufgabe (13)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{-16}}{10}$

Diskriminante negativ keine Lösung

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2 - 0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{5(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5})}{(x + 1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll} (5x^2 & -2x & +1 &) : (x^2 + 2x + 1) = 5 \\ -(5x^2 & +10x & +5) & \\ \hline & -12x & -4 & \end{array}$$

$f(x) = 5 + \dfrac{-12x - 4}{x^2 + 2x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(10x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) - (5x^2 - 2x + 1) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{(10x^3 + 18x^2 + 6x - 2) - (10x^3 + 6x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12(x + 1)(x - \frac{1}{3})}{(x + 1)^4}$

$= \dfrac{12(x - \frac{1}{3})}{(x + 1)^3}$

$= \dfrac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1}$
$f''(x) = \dfrac{12\cdot(x^3+3x^2+3x+1)-(12x-4)\cdot(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{(12x^3+36x^2+36x+12)-(36x^3+60x^2+12x-12)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{-24x^3-24x^2+24x+24}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{-24x^3-24x^2+24x+24}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$5x^2-2x+1=0$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;\infty[\quad f(x)>0$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{5}{1} = 5$$
Horizontale Asymptote: $y=5$
$$\lim_{x\to-1^+} \frac{5(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5})}{(x+1)^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} \frac{5(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5})}{(x+1)^2} = \infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x=-1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$

$12x-4=0 \qquad /+4$
$12x=4 \qquad /:12$
$x=\dfrac{4}{12}$
$x=\dfrac{1}{3}$
$x_2=\dfrac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f''(\frac{1}{3}) = 5\frac{1}{16} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{3}/\frac{1}{2})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1}$
Zaehler $=0$
$x_3=\dfrac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1; \frac{1}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$

$Zaehler = 0$

$-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llllll}
(-24x^3 & -24x^2 & +24x & +24 &) : (x-1) = -24x^2 - 48x - 24 \\
-(-24x^3 & +24x^2) & & & \\ \hline
 & -48x^2 & +24x & +24 & \\
 & -(-48x^2 & +48x) & & \\ \hline
 & & -24x & +24 & \\
 & & -(-24x & +24) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$-24x^2 - 48x - 24 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \cdot (-24) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-24)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+48 \pm \sqrt{0}}{-48}$

$x_{1/2} = \dfrac{48 \pm 0}{-48}$

$x_1 = \dfrac{48 + 0}{-48} \qquad x_2 = \dfrac{48 - 0}{-48}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_5 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

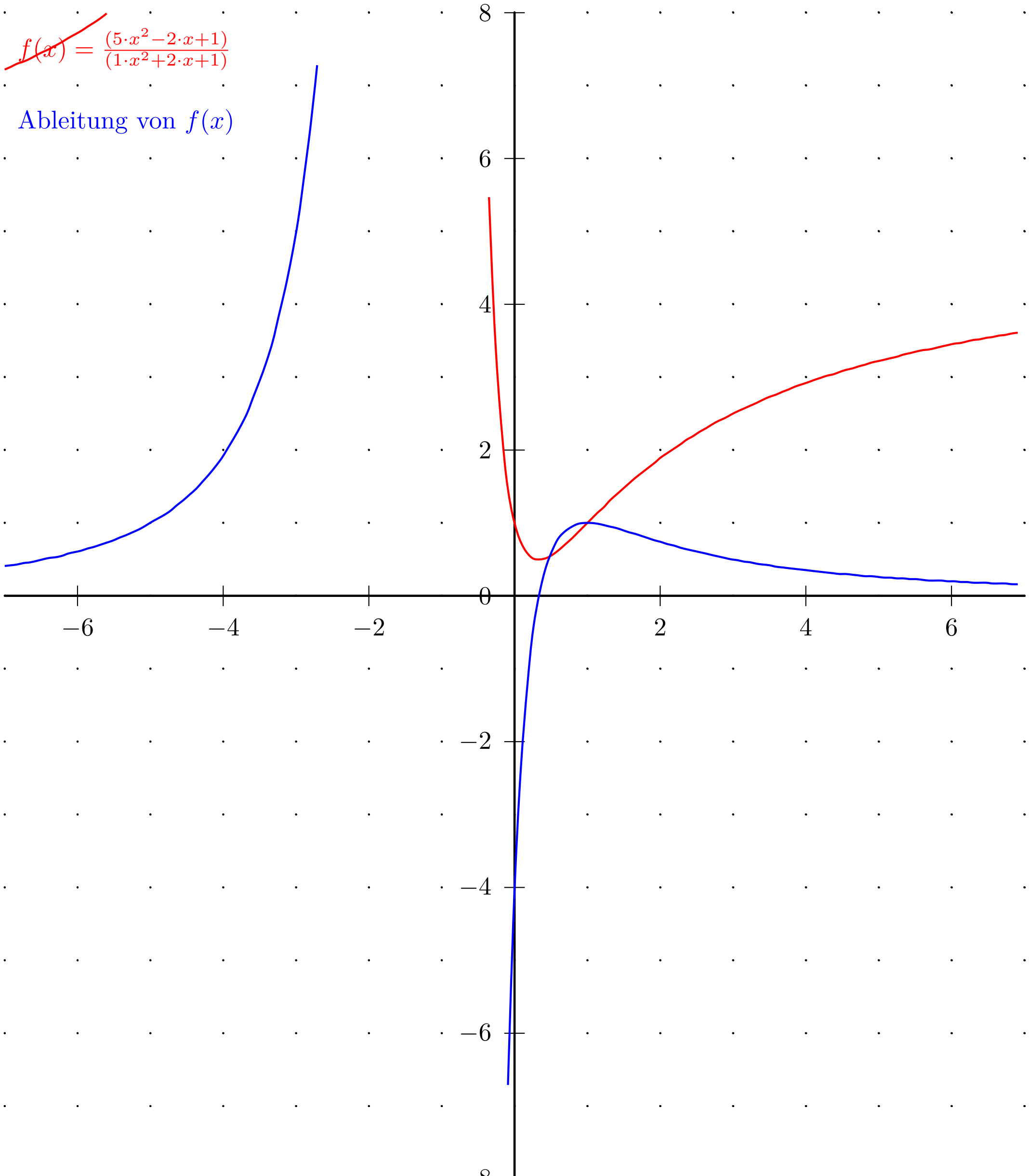
$\underline{x_7 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 1[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]1; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$7\frac{2}{9}$	$0,407$	$0,148$
$-6\frac{1}{2}$	$7\frac{54}{121}$	$0,493$	$0,197$
-6	$7\frac{18}{25}$	$0,608$	$0,269$
$-5\frac{1}{2}$	$8\frac{5}{81}$	$0,768$	$0,38$
-5	$8\frac{1}{2}$	1	$0,563$
$-4\frac{1}{2}$	$9\frac{4}{49}$	$1,35$	$0,88$
-4	$9\frac{8}{9}$	$1,93$	$1,48$
$-3\frac{1}{2}$	$11\frac{2}{25}$	$2,94$	$2,76$
-3	13	5	6
$-2\frac{1}{2}$	$16\frac{5}{9}$	$10,1$	$16,6$
-2	25	28	72
$-1\frac{1}{2}$	61	176	962
-1	∞	$-39183\frac{33}{49}$	$-\infty$
$-\frac{1}{2}$	13	$-80,3$	577
0	1	$-4,01$	24

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-4,01$	24
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$0,592$	$2,37$
1	1	1	$0,000153$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{12}{25}$	$0,896$	$-0,307$
2	$1\frac{8}{9}$	$0,741$	$-0,296$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{49}$	$0,606$	$-0,24$
3	$2\frac{1}{2}$	$0,5$	$-0,188$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{59}{81}$	$0,417$	$-0,146$
4	$2\frac{23}{25}$	$0,352$	$-0,115$
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{10}{121}$	$0,301$	$-0,0918$
5	$3\frac{2}{9}$	$0,259$	$-\frac{2}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$3,34$	$0,226$	$-0,0605$
6	$3\frac{22}{49}$	$0,198$	$-0,05$
$6\frac{1}{2}$	$3,54$	$0,175$	$-0,0417$
7	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{32}$	$-0,0352$

Aufgabe (14)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{-16}}{10}$

Diskriminante negativ keine Lösung

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2 - 0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{5(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5})}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(5x^2 & -2x & +1 &) : (x^2 + 2x + 1) = 5 \\
-(5x^2 & +10x & +5) & \\
\hline
 & -12x & -4 &
\end{array}$$

$f(x) = 5 + \dfrac{-12x - 4}{x^2 + 2x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(10x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) - (5x^2 - 2x + 1) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{(10x^3 + 18x^2 + 6x - 2) - (10x^3 + 6x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12(x+1)(x - \frac{1}{3})}{(x+1)^4}$

$= \dfrac{12(x - \frac{1}{3})}{(x+1)^3}$

$= \frac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1}$

$f''(x) = \frac{12 \cdot (x^3+3x^2+3x+1) - (12x-4) \cdot (3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{(12x^3+36x^2+36x+12) - (36x^3+60x^2+12x-12)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{-24x^3-24x^2+24x+24}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{-24x^3-24x^2+24x+24}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{5}{1} = 5$

Horizontale Asymptote: $y = 5$

$\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{5(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5})}{(x+1)^2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{5(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5})}{(x+1)^2} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$

$12x - 4 = 0 \qquad / + 4$

$12x = 4 \qquad / : 12$

$x = \frac{4}{12}$

$x = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

$f''(\frac{1}{3}) = 5\frac{1}{16} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{3}/\frac{1}{2})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1}$

Zaehler = 0

$x_3 = \frac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_4 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-1; \frac{1}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$$

$Zaehler = 0$

$$-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24 = 0$$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llllll}
(-24x^3 & -24x^2 & +24x & +24 &) : (x-1) = -24x^2 - 48x - 24 \\
-(-24x^3 & +24x^2) & & & \\
\hline
 & -48x^2 & +24x & +24 & \\
 & -(-48x^2 & +48x) & & \\
\hline
 & & -24x & +24 & \\
 & & -(-24x & +24) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$-24x^2 - 48x - 24 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \cdot (-24) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-24)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+48 \pm \sqrt{0}}{-48}$$

$$x_{1/2} = \frac{48 \pm 0}{-48}$$

$$x_1 = \frac{48 + 0}{-48} \qquad x_2 = \frac{48 - 0}{-48}$$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$x_5 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

$x_6 = 1; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

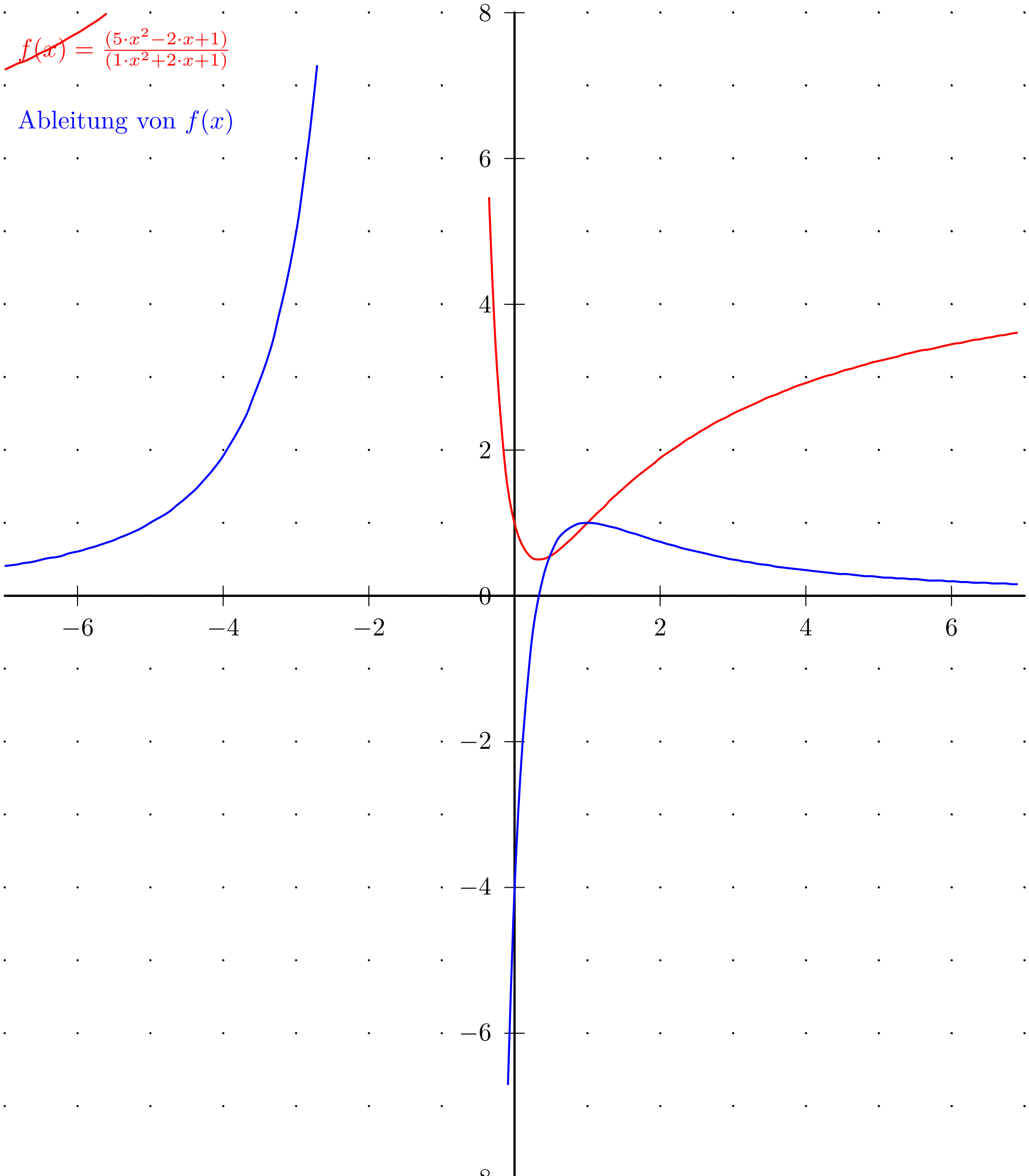
$x_7 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 1[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]1; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$7\frac{2}{9}$	$0,407$	$0,148$
$-6\frac{1}{2}$	$7\frac{54}{121}$	$0,493$	$0,197$
-6	$7\frac{18}{25}$	$0,608$	$0,269$
$-5\frac{1}{2}$	$8\frac{5}{81}$	$0,768$	$0,38$
-5	$8\frac{1}{2}$	1	$0,563$
$-4\frac{1}{2}$	$9\frac{4}{49}$	$1,35$	$0,88$
-4	$9\frac{8}{9}$	$1,93$	$1,48$
$-3\frac{1}{2}$	$11\frac{2}{25}$	$2,94$	$2,76$
-3	13	5	6
$-2\frac{1}{2}$	$16\frac{5}{9}$	$10,1$	$16,6$
-2	25	28	72
$-1\frac{1}{2}$	61	176	962
-1	∞	$-39183\frac{33}{49}$	$-\infty$
$-\frac{1}{2}$	13	$-80,3$	577
0	1	$-4,01$	24

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-4,01$	24
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$0,592$	$2,37$
1	1	1	$0,000153$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{12}{25}$	$0,896$	$-0,307$
2	$1\frac{8}{9}$	$0,741$	$-0,296$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{49}$	$0,606$	$-0,24$
3	$2\frac{1}{2}$	$0,5$	$-0,188$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{59}{81}$	$0,417$	$-0,146$
4	$2\frac{23}{25}$	$0,352$	$-0,115$
$4\frac{1}{2}$	$3\frac{10}{121}$	$0,301$	$-0,0918$
5	$3\frac{2}{9}$	$0,259$	$-\frac{2}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$3,34$	$0,226$	$-0,0605$
6	$3\frac{22}{49}$	$0,198$	$-0,05$
$6\frac{1}{2}$	$3,54$	$0,175$	$-0,0417$
7	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{32}$	$-0,0352$

Aufgabe (15)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 &) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\ \hline
 & 4x^2 & & -4 & \\
 & -(4x^2 & -4x) & & \\ \hline
 & & 4x & -4 & \\
 & & -(4x & -4) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-4 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 0}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x-1)}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & -4 &) : (x^2) = x + 3 \\
-(x^3) & & & \\ \hline
 & 3x^2 & -4 & \\
 & -(3x^2) & & \\ \hline
 & & -4 &
\end{array}$$

$f(x) = x + 3 + \dfrac{-4}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 6x) \cdot x^2 - (x^3 + 3x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{(3x^4 + 6x^3) - (2x^4 + 6x^3 - 8x)}{(x^2)^2}$

$= \frac{x^4+8x}{(x^2)^2}$
$= \frac{x^4+8x}{(x^2)^2}$
$= \frac{(x^2-2x+4)(x+2)x}{x^4}$
$= \frac{(x^2-2x+4)(x+2)}{x^3}$
$= \frac{x^3+8}{x^3}$
$f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3+8) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{3x^5 - (3x^5 + 24x^2)}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{x^6}$
$= \frac{-24}{x^4}$
$= \frac{-24}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$\underline{x_4 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 0[\quad \cup \quad]0; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3})}{x^2(1)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3})}{x^2(1)} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = x + 3$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(x+2)^2(x-1)}{x^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(x+2)^2(x-1)}{x^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3} = 0$

$x^3 + 8 = 0$
$1x^3 + 8 = 0 \qquad / - 8$
$1x^3 = -8 \qquad / : 1$
$x^3 = \dfrac{-8}{1}$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$
Polynomdivision:(-2)

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & & & +8 &) : (x+2) = x^2 - 2x + 4 \\
-(x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^2 & & +8 & \\
 & -(-2x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & 4x & +8 & \\
 & & -(4x & +8) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 - 2x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{-12}}{2}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_6 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = -1\dfrac{1}{2}$
$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3}$
Zaehler = 0
$\underline{x_7 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_8 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

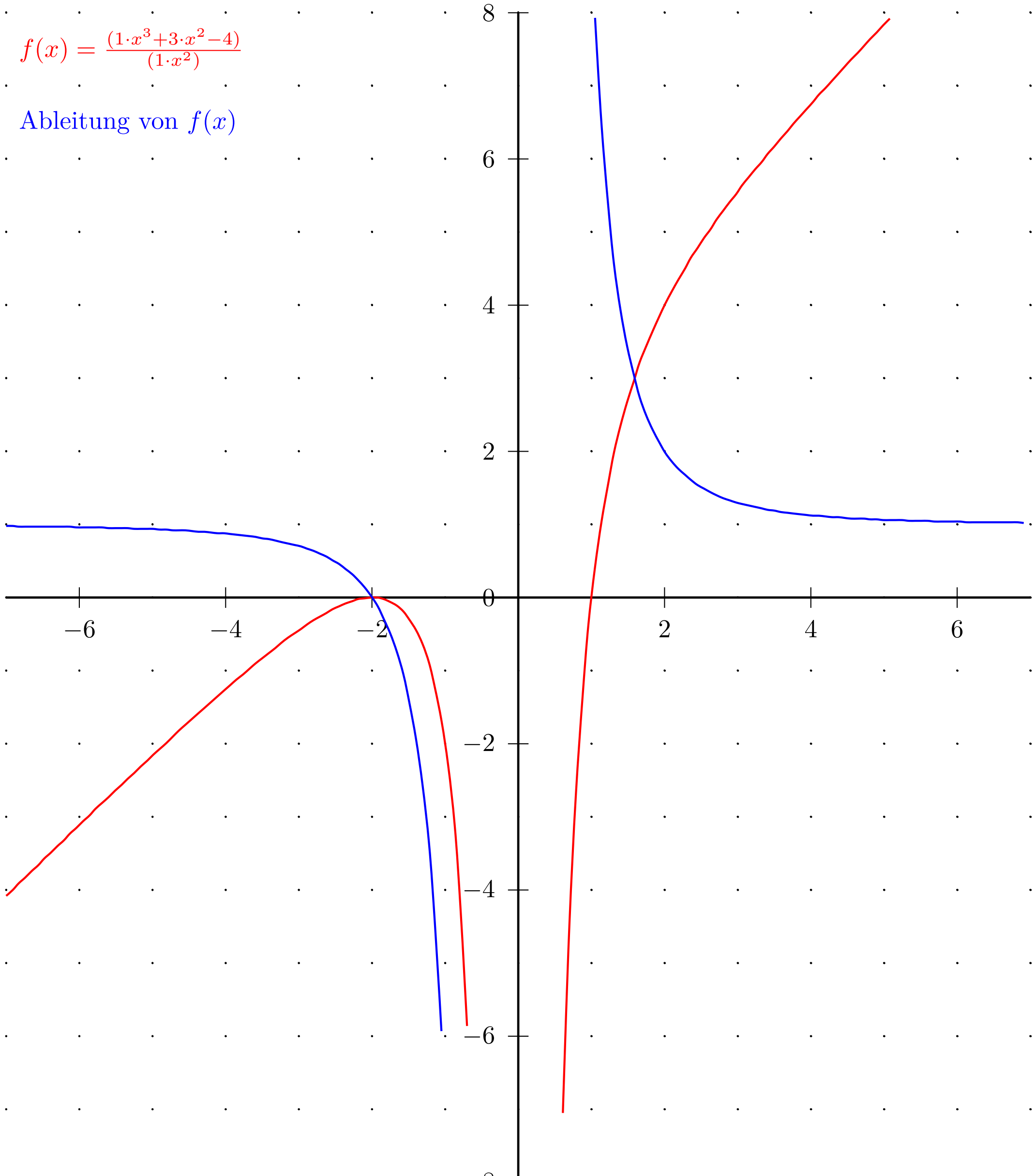
$\underline{x \in]-2; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-24}{x^4}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{4}{49}$	$0,977$	$-0,01$
$-6\frac{1}{2}$	$-3,59$	$0,971$	$-0,0134$
-6	$-3\frac{1}{9}$	$\frac{26}{27}$	$-\frac{1}{54}$
$-5\frac{1}{2}$	$-2,63$	$0,952$	$-0,0262$
-5	$-2\frac{4}{25}$	$0,936$	$-0,0384$
$-4\frac{1}{2}$	$-1,7$	$0,912$	$-0,0585$
-4	$-1\frac{1}{4}$	$0,875$	$-0,0938$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{81}{98}$	$0,813$	$-0,16$
-3	$-\frac{4}{9}$	$0,704$	$-0,296$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{50}$	$0,488$	$-0,614$
-2	0	$-0,000153$	$-1,5$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{18}$	$-1,37$	$-4,74$
-1	-2	-7	-24
$-\frac{1}{2}$	$-13\frac{1}{2}$	$-63,2$	-385
0	$-\infty$	1	∞

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\infty$	1	∞
$\frac{1}{2}$	$-12\frac{1}{2}$	$65,2$	-385
1	0	9	-24
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{18}$	$3,37$	$-4,74$
2	4	2	$-1,5$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{43}{50}$	$1,51$	$-0,614$
3	$5\frac{5}{9}$	$1,3$	$-0,296$
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{17}{98}$	$1,19$	$-0,16$
4	$6\frac{3}{4}$	$1,13$	$-0,0938$
$4\frac{1}{2}$	$7,3$	$1,09$	$-0,0585$
5	$7\frac{21}{25}$	$1,06$	$-0,0384$
$5\frac{1}{2}$	$8,37$	$1,05$	$-0,0262$
6	$8\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{54}$
$6\frac{1}{2}$	$9,41$	$1,03$	$-0,0134$
7	$9\frac{45}{49}$	$1,02$	$-0,01$

Aufgabe (16)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-x^3+3x^2-4}{-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}$

Zaehler faktorisieren:

$-x^3+3x^2-4=0$

$-x^3+3x^2-4=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llll}
(-x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x+1) = -x^2+4x-4 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & +4x) & \\
\hline
 & & -4x & -4 \\
 & & -(-4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-x^2+4x-4=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{-2}$

$x_1 = \dfrac{-4+0}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-4-0}{-2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-\dfrac{1}{2}x^2-3x-4\dfrac{1}{2}=0$

$-\dfrac{1}{2}x^2-3x-4\dfrac{1}{2}=0$

$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{2}\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{0}}{-1}$

$x_{1/2} = \dfrac{3 \pm 0}{-1}$

$x_1 = \dfrac{3+0}{-1} \qquad x_2 = \dfrac{3-0}{-1}$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -3$

$\underline{x_3 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-(x+1)(x-2)^2}{-\frac{1}{2}(x+3)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$f(x) = \dfrac{2x^3-6x^2+8}{x^2+6x+9}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llllll}
(2x^3 & -6x^2 & & +8 &) : (x^2+6x+9) = 2x-18 \\
-(2x^3 & +12x^2 & +18x) & & \\
\hline
 & -18x^2 & -18x & +8 & \\
 & -(-18x^2 & -108x & -162) & \\
\hline
 & & 90x & +170 &
\end{array}$$

$f(x) = 2x - 18 + \dfrac{90x+170}{x^2+6x+9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(6x^2-12x)\cdot(x^2+6x+9)-(2x^3-6x^2+8)\cdot(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{(6x^4+24x^3-18x^2-108x)-(4x^4-36x^2+16x+48)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x^4+24x^3+18x^2-124x-48}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x^4+24x^3+18x^2-124x-48}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2(x+10,6)(x+3)(x+0,377)(x-2)}{(x+3)^4}$

$= \dfrac{2(x+10,6)(x+0,377)(x-2)}{(x+3)^3}$

$= \dfrac{2x^3+18x^2-36x-16}{x^3+9x^2+27x+27}$

$f''(x) = \dfrac{(6x^2+36x-36)\cdot(x^3+9x^2+27x+27)-(2x^3+18x^2-36x-16)\cdot(3x^2+18x+27)}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{(6x^5+90x^4+450x^3+810x^2-972)-(6x^5+90x^4+270x^3-210x^2-1,26\cdot10^3x-432)}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{180x^3+1,02\cdot10^3x^2+1,26\cdot10^3x-540}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{180x^3+1,02\cdot10^3x^2+1,26\cdot10^3x-540}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$2x^3 - 6x^2 + 8 = 0$

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-1;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-3;-1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}-\frac{4\frac{1}{2}}{x^2})} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}-\frac{4\frac{1}{2}}{x^2})} = \infty$$

Schiefe Asymptote:$y = 2x - 18$
$\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{2(x+1)(x-2)^2}{(x+3)^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{2(x+1)(x-2)^2}{(x+3)^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{2x^3 + 18x^2 - 36x - 16}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27} = 0$

$2x^3 + 18x^2 - 36x - 16 = 0$

Nullstelle für Polynomdivision erraten:2

$$\begin{array}{llll} (2x^3 & +18x^2 & -36x & -16 \quad) : (x-2) = 2x^2 + 22x + 8 \\ -(2x^3 & -4x^2) & & \\ \hline & 22x^2 & -36x & -16 \\ & -(22x^2 & -44x) & \\ \hline & & 8x & -16 \\ & & -(8x & -16) \\ \hline & & & -7,11 \cdot 10^{-15} \end{array}$$

$2x^2 + 22x + 8 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$
$x_{1/2} = \frac{-22 \pm \sqrt{420}}{4}$
$x_{1/2} = \frac{-22 \pm 20,5}{4}$
$x_1 = \frac{-22 + 20,5}{4} \qquad x_2 = \frac{-22 - 20,5}{4}$
$x_1 = -0,377 \qquad x_2 = -10,6$
$\underline{x_6 = -10,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = -0,377; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-10,6) = 0,515 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-10,6/-52,8)}$
$f''(-0,377) = -2,67$
$f''(-0,377) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,377/1,02)}$
$f''(2) = 0,388 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{2x^3 + 18x^2 - 36x - 16}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$
Zaehler = 0
$\underline{x_9 = -10,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10 = -0,377; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_11 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_12 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-10,6$	$< x <$	-3	$< x <$	$-0,377$	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -10,6[\quad \cup \quad]-3; -0,377[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$x \in]-10,6;-3[\quad \cup \quad]-0,377;2[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{180x^3 + 1,02 \cdot 10^3 x^2 + 1,26 \cdot 10^3 x - 540}{x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1,22 \cdot 10^3 x^2 + 1,46 \cdot 10^3 x + 729}$$

$Zaehler = 0$

$180x^3 + 1,02 \cdot 10^3 x^2 + 1,26 \cdot 10^3 x - 540 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -3

$$\begin{array}{llllll}
(180x^3 & +1,02 \cdot 10^3 x^2 & +1,26 \cdot 10^3 x & -540 &) : (x+3) = 180x^2 + 480x - 180 \\
-(180x^3 & +540x^2) & & & \\
\hline
 & 480x^2 & +1,26 \cdot 10^3 x & -540 & \\
 & -(480x^2 & +1,44 \cdot 10^3 x) & & \\
\hline
 & & -180x & -540 & \\
 & & -(-180x & -540) & \\
\hline
 & & & 2,27 \cdot 10^{-13} &
\end{array}$$

$180x^2 + 480x - 180 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-480 \pm \sqrt{480^2 - 4 \cdot 180 \cdot (-180)}}{2 \cdot 180}$$

$$x_{1/2} = \frac{-480 \pm \sqrt{3,6 \cdot 10^5}}{360}$$

$$x_{1/2} = \frac{-480 \pm 600}{360}$$

$$x_1 = \frac{-480 + 600}{360} \qquad x_2 = \frac{-480 - 600}{360}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -3$$

$x_1 3 = -3; \quad$ 2-fache Nullstelle

$x_1 4 = \frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

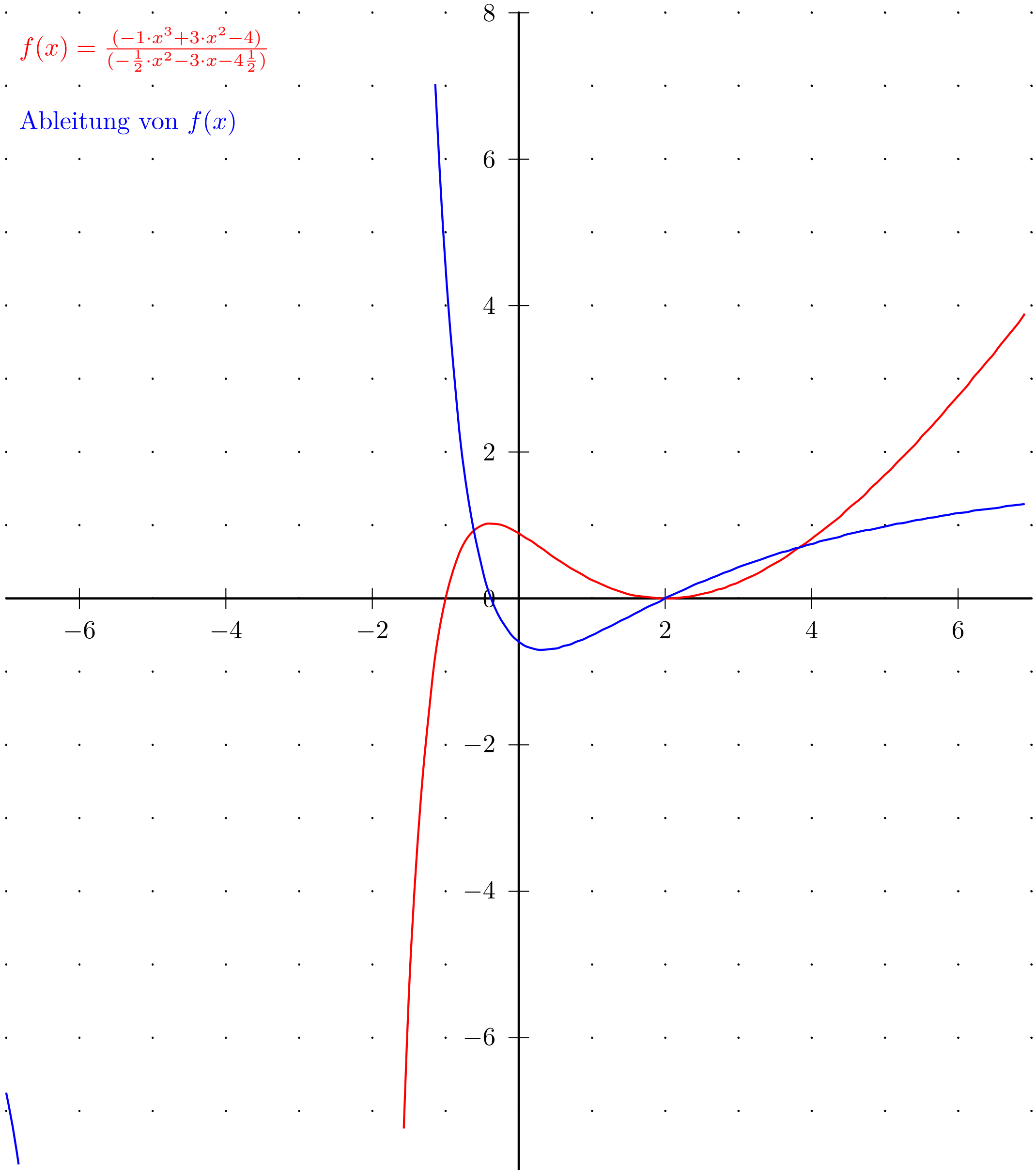
$x_1 5 = -3; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-3	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]\frac{1}{3};\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-3;\frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-60\frac{3}{4}$	$-6,75$	$-5,16$
$-6\frac{1}{2}$	$-64\frac{43}{49}$	-10	$-8,2$
-6	$-71\frac{1}{9}$	$-15,4$	$-14,1$
$-5\frac{1}{2}$	-81	$-25,2$	$-26\frac{97}{110}$
-5	-98	$-45,5$	-60
$-4\frac{1}{2}$	$-131\frac{4}{9}$	$-97,3$	-172
-4	-216	-288	-780
$-3\frac{1}{2}$	-605	$-1,96 \cdot 10^3$	$-1,11 \cdot 10^4$
-3	∞	$293879\frac{27}{49}$	$-\infty$
$-2\frac{1}{2}$	-243	$1,25 \cdot 10^3$	$-8,18 \cdot 10^3$
-2	-32	112	-420
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{4}{9}$	$21,3$	$-65,2$
-1	0	$4,5$	-15
$-\frac{1}{2}$	1	$0,401$	$-3,84$
0	$\frac{8}{9}$	$-0,592$	$-0,741$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{8}{9}$	$-0,592$	$-0,741$
$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{49}$	$-0,682$	$0,2$
1	$\frac{1}{4}$	$-0,5$	$0,469$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{81}$	$-0,25$	$0,512$
2	0	$-4,9 \cdot 10^{-6}$	$0,48$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{7}{121}$	$\frac{27}{119}$	$0,426$
3	$\frac{2}{9}$	$0,426$	$\frac{10}{27}$
$3\frac{1}{2}$	$0,479$	$0,598$	$0,319$
4	$\frac{40}{49}$	$0,746$	$0,275$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{9}$	$0,874$	$0,237$
5	$1\frac{11}{16}$	$0,984$	$0,205$
$5\frac{1}{2}$	$2,2$	$1,08$	$0,178$
6	$2\frac{62}{81}$	$1,16$	$0,155$
$6\frac{1}{2}$	$3,37$	$1,24$	$0,136$
7	4	$1,3$	$\frac{3}{25}$

4 Gebrochen rationale Funktion Zählergrad > Nennergrad

4.1 Aufgaben

(1) $f(x) = \frac{x^2+3x}{2x-1}$

(2) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{5x-2}$

(3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

(4) $f(x) = \frac{2x^2-8}{2x-3}$

(5) $f(x) = \frac{x^2+6x+8}{-9x-3}$

(6) $f(x) = \frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$

(7) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3-1\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2}{x-2}$

(8) $f(x) = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x-2}$

(9) $f(x) = \frac{x^3+5x^2-x-5}{x+1}$

(10) $f(x) = \frac{3x^3-x^2-3x+1}{x-1}$

(11) $f(x) = \frac{x^3-8x+2}{x+2}$

(12) $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+1}$

(13) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-x-12}$

(14) $f(x) = \frac{x^4-3x^2-4}{x^2-4}$

(15) $f(x) = \frac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}$

(16) $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{-x+2}$

(17) $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{3x+6}$

(18) $f(x) = \frac{x^3+3x^2-4}{x^2}$

(19) $f(x) = \frac{-x^3+3x^2-4}{-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}$

(20) $f(x) = \frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$

(21) $f(x) = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2}$

(22) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-1}$

4.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x-1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0 \Rightarrow x=0 \quad \vee \quad x+3=0$

$x+3=0 \qquad /-3$

$x=-3$

$\underline{x_1=-3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x-1=0$

$2x-1=0 \qquad /+1$

$2x=1 \qquad /:2$

$x=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{1}{2}$

$\underline{x_3=\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+3)x}{2(x-\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^2+1\frac{1}{2}x}{x-\frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(\frac{1}{2}x^2 & +1\frac{1}{2}x & &):(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}x+1\frac{3}{4} \\
-(\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{4}x) & & \\
\hline
 & 1\frac{3}{4}x & & \\
 & -(1\frac{3}{4}x & -\frac{7}{8}) & \\
\hline
 & & \frac{7}{8} &
\end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x+1\dfrac{3}{4}+\dfrac{\frac{7}{8}}{x-\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(x+1\frac{1}{2})\cdot(x-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}x^2+1\frac{1}{2}x)\cdot 1}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{(x^2+x-\frac{3}{4})-(\frac{1}{2}x^2+1\frac{1}{2}x)}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \dfrac{(x-\frac{1}{2})\cdot(x^2-x+\frac{1}{4})-(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4})\cdot(2x-1)}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$

$= \dfrac{(x^3-1\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8})-(x^3-1\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4})}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$

$= \dfrac{1\frac{3}{4}x - \frac{7}{8}}{(x^2 - x + \frac{1}{4})^2}$

$= \dfrac{1\frac{3}{4}x - \frac{7}{8}}{(x^2 - x + \frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x = 0$

$\underline{x_4 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-3;0[\quad \cup \quad]\frac{1}{2};\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]0;\frac{1}{2}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+\dfrac{3}{x})}{x(2-\dfrac{1}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(1+\dfrac{3}{x})}{x(2-\dfrac{1}{x})} = \infty$

Schiefe Asymptote:$y = \dfrac{1}{2}x + 1\dfrac{3}{4}$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \dfrac{\frac{1}{2}(x+3)x}{(x-\frac{1}{2})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \dfrac{\frac{1}{2}(x+3)x}{(x-\frac{1}{2})} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = \dfrac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}{x^2 - x + \frac{1}{4}} = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}}{2\cdot\frac{1}{2}}$

$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{1\frac{3}{4}}}{1}$

$x_{1/2} = \dfrac{\frac{1}{2} \pm 1,32}{1}$

$x_1 = \dfrac{\frac{1}{2} + 1,32}{1} \qquad x_2 = \dfrac{\frac{1}{2} - 1,32}{1}$

$x_1 = 1,82 \qquad x_2 = -0,823$

$\underline{x_6 = -0,823; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_7 = 1,82; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-0,823) = -\frac{2}{7}$

$f''(-0,823) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,823/0,677)}$

$f''(1,82) = -\frac{2}{7}$

$f''(1,82) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,82/3,32)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}{x^2 - x + \frac{1}{4}}$

Zaehler $= 0$

$\underline{x_8 = -0,823; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_9 = 1,82; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_10 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-0,823$	$< x <$	$\frac{1}{2}$	$< x <$	$1,82$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -0,823[\quad \cup \quad]1,82; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-0,823; \frac{1}{2}[\quad \cup \quad]\frac{1}{2}; 1,82[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{1\frac{3}{4}x - \frac{7}{8}}{x^4 - 2x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}}$

$Zaehler = 0$

$1\frac{3}{4}x - \frac{7}{8} = 0 \qquad / + \frac{7}{8}$

$1\frac{3}{4}x = \frac{7}{8} \qquad / : 1\frac{3}{4}$

$x = \frac{\frac{7}{8}}{1\frac{3}{4}}$

$x = \frac{1}{2}$

$\underline{x_11 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

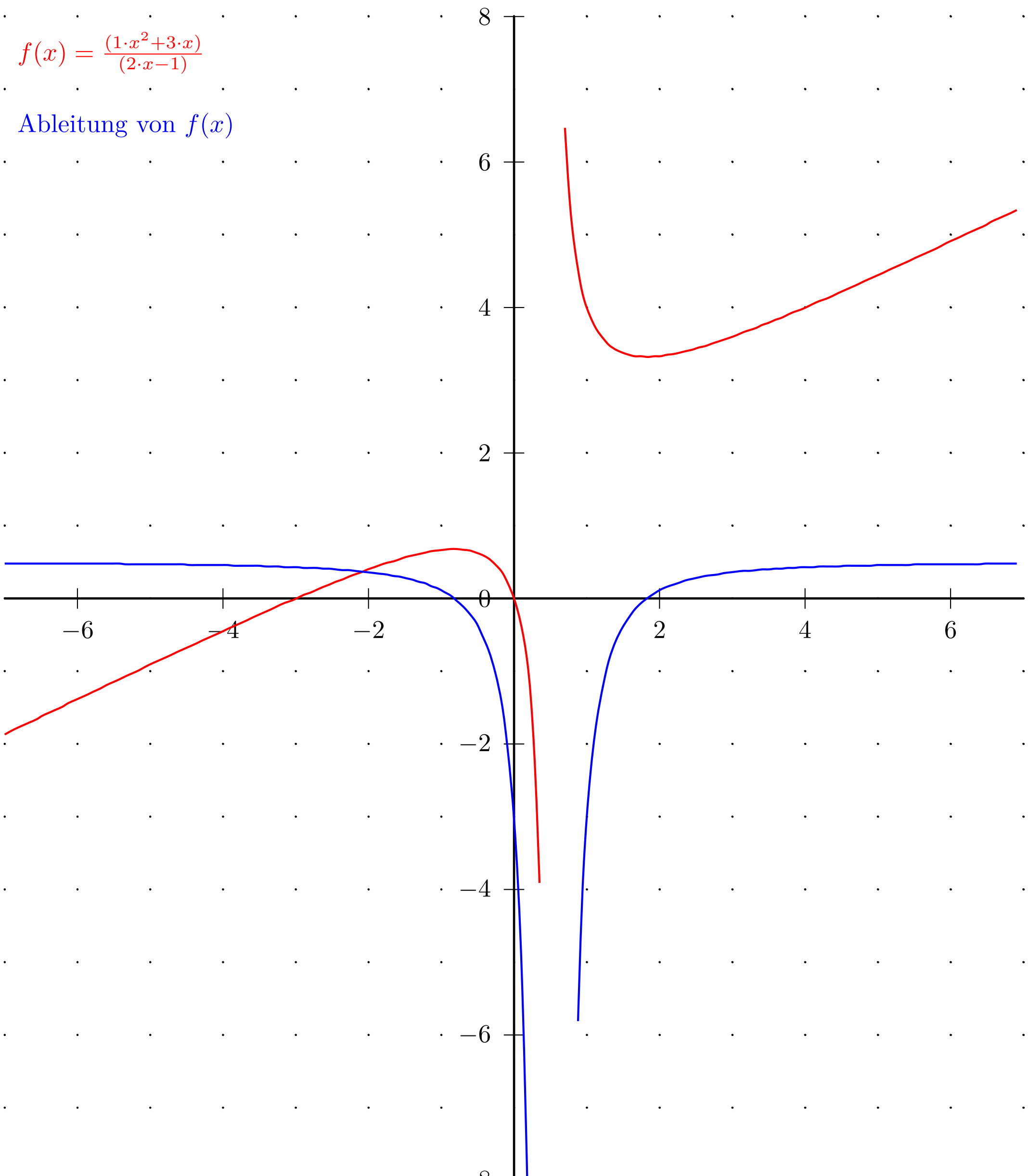
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_12 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \cup \quad]\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{13}{15}$	$0,484$	$-0,00415$
$-6\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{8}$	$\frac{27}{56}$	$-0,0051$
-6	$-1\frac{5}{13}$	$0,479$	$-0,00637$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{48}$	$0,476$	$-0,0081$
-5	$-\frac{10}{11}$	$\frac{57}{121}$	$-0,0105$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{40}$	$0,465$	$-0,014$
-4	$-\frac{4}{9}$	$\frac{37}{81}$	$-0,0192$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{32}$	$0,445$	$-0,0273$
-3	0	$0,429$	$-0,0408$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{24}$	$0,403$	$-0,0648$
-2	$\frac{2}{5}$	$0,36$	$-0,112$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$0,281$	$-0,219$
-1	$\frac{2}{3}$	$0,111$	$-0,519$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$-0,375$	$-1,75$
0	0	-3	-14

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-3	-14
$\frac{1}{2}$	∞	$2857\frac{9}{14}$	$-\infty$
1	4	-3	14
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$-0,375$	$1,75$
2	$3\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,519$
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{7}{16}$	$0,281$	$0,219$
3	$3\frac{3}{5}$	$0,36$	$0,112$
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{19}{24}$	$0,403$	$0,0648$
4	4	$0,429$	$0,0408$
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{32}$	$0,445$	$0,0273$
5	$4\frac{4}{9}$	$\frac{37}{81}$	$0,0192$
$5\frac{1}{2}$	$4\frac{27}{40}$	$0,465$	$0,014$
6	$4\frac{10}{11}$	$\frac{57}{121}$	$0,0105$
$6\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{48}$	$0,476$	$0,0081$
7	$5\frac{5}{13}$	$0,479$	$0,00637$

Aufgabe (2)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{5x - 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 + x - 6 = 0$

$1x^2 + x - 6 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$

$x_1 = \dfrac{-1 + 5}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-1 - 5}{2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -3$

$\underline{x_1 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$5x - 2 = 0$

$5x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$5x = 2 \qquad / : 5$

$x = \dfrac{2}{5}$

$x = \dfrac{2}{5}$

$\underline{x_3 = \dfrac{2}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x + 3)(x - 2)}{5(x - \frac{2}{5})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{2}{5} \right\}$

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5}}{x - \frac{2}{5}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(\frac{1}{5}x^2 & +\frac{1}{5}x & -1\frac{1}{5} &) : (x - \frac{2}{5}) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{25} \\
-(\frac{1}{5}x^2 & -\frac{2}{25}x) & & \\
\hline
 & \frac{7}{25}x & -1\frac{1}{5} & \\
 & -(\frac{7}{25}x & -\frac{14}{125}) & \\
\hline
 & & -1\frac{11}{125} &
\end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{7}{25} + \dfrac{-1\frac{11}{125}}{x - \frac{2}{5}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}) \cdot (x - \frac{2}{5}) - (\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5}) \cdot 1}{(x - \frac{2}{5})^2}$

$= \dfrac{(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{25}x - \frac{2}{25}) - (\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5})}{(x - \frac{2}{5})^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}}{(x - \frac{2}{5})^2}$

$= \frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}}{(x - \frac{2}{5})^2}$

$f''(x) = \frac{(\frac{2}{5}x - \frac{4}{25}) \cdot (x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}) - (\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}) \cdot (2x - \frac{4}{5})}{(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25})^2}$

$= \frac{(\frac{2}{5}x^3 - \frac{12}{25}x^2 + \frac{24}{125}x - 0,0256) - (\frac{2}{5}x^3 - \frac{12}{25}x^2 + 2\frac{46}{125}x - \frac{112}{125})}{(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25})^2}$

$= \frac{-2\frac{22}{125}x + 0,87}{(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25})^2}$

$= \frac{-2\frac{22}{125}x + 0,87}{(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5} = 0$

$\underline{x_4 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	$\frac{2}{5}$	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-3; \frac{2}{5}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]\frac{2}{5}; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2(1 + x - \frac{6}{x^2})}{x(5 - \frac{2}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2(1 + x - \frac{6}{x^2})}{x(5 - \frac{2}{x})} = \infty$

Schiefe Asymptote:$y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{25}$

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{5}^+} \frac{\frac{1}{5}(x+3)(x-2)}{(x - \frac{2}{5})} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{5}^-} \frac{\frac{1}{5}(x+3)(x-2)}{(x - \frac{2}{5})} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = \frac{2}{5}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}}{x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}} = 0$

$\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25} = 0$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{4}{25} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{25}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1\frac{3}{25}}}{2 \cdot \frac{1}{5}}$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{4}{25} \pm \sqrt{-0,87}}{\frac{2}{5}}$

Diskriminante negativ keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}}{x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}}$

Zaehler = 0

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_6 = \frac{2}{5}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$\frac{2}{5}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; \frac{2}{5}[\quad \cup \quad]\frac{2}{5}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-2\frac{22}{125}x + 0,87}{x^4 - 1\frac{3}{5}x^3 + \frac{24}{25}x^2 - \frac{32}{125}x + 0,0256}$

$Zaehler = 0$

$-2\frac{22}{125}x + 0,87 = 0 \qquad / - 0,87$

$-2\frac{22}{125}x = -0,87 \qquad / : \left(-2\frac{22}{125}\right)$

$x = \frac{-0,87}{-2\frac{22}{125}}$

$x = \frac{2}{5}$

$x_7 = \frac{2}{5}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

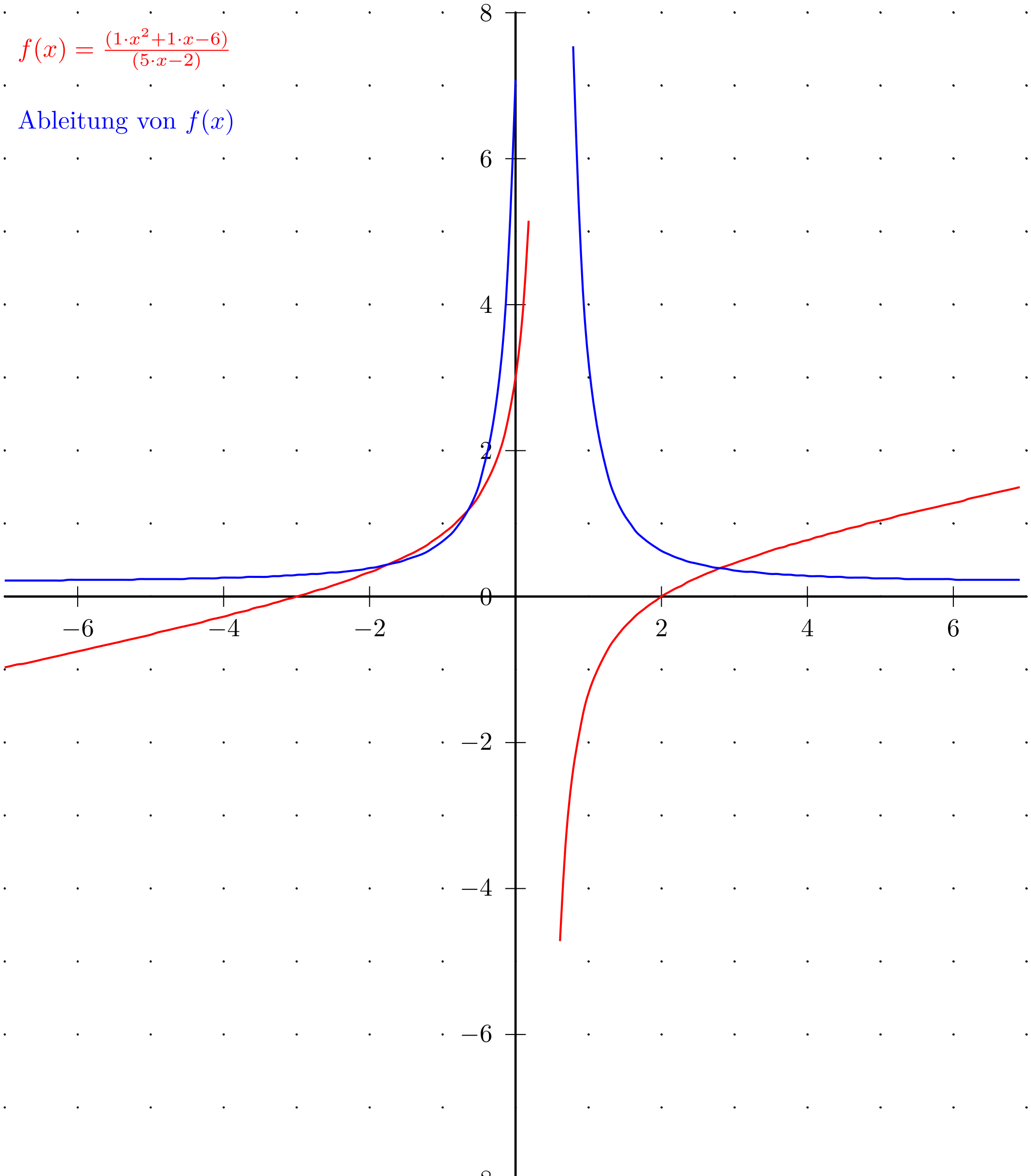
$x_8 = \frac{2}{5}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$\frac{2}{5}$	$< x <$	$\frac{2}{5}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; \frac{2}{5}[\quad \cup \quad]\frac{2}{5}; \frac{2}{5}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]\frac{2}{5}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{36}{37}$	$0,22$	$0,00537$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,862$	$0,223$	$0,00662$
-6	$-\frac{3}{4}$	$0,227$	$0,0083$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{75}{118}$	$0,231$	$0,0106$
-5	$-\frac{14}{27}$	$0,237$	$0,0138$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{39}{98}$	$0,245$	$0,0185$
-4	$-\frac{3}{11}$	$\frac{31}{121}$	$0,0255$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{78}$	$0,272$	$0,0367$
-3	0	$0,294$	$0,0554$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{9}{58}$	$0,329$	$0,0892$
-2	$\frac{1}{3}$	$0,389$	$0,157$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{21}{38}$	$0,501$	$0,317$
-1	$\frac{6}{7}$	$0,755$	$0,793$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{18}$	$1,54$	$2,99$
0	3	$7,01$	$34,1$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	3	$7,01$	$34,1$
$\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{2}$	112	$-2,24 \cdot 10^3$
1	$-1\frac{1}{3}$	$3,22$	$-10,1$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{22}$	$1,1$	$-1,64$
2	0	$0,625$	$-0,531$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{11}{42}$	$0,447$	$-0,235$
3	$\frac{6}{13}$	$0,361$	$-0,124$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{39}{62}$	$0,313$	$-0,073$
4	$\frac{7}{9}$	$0,284$	$-0,0466$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{75}{82}$	$0,265$	$-0,0316$
5	$1\frac{1}{23}$	$0,251$	$-0,0224$
$5\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{6}$	$0,242$	$-0,0164$
6	$1\frac{2}{7}$	$\frac{23}{98}$	$-0,0124$
$6\frac{1}{2}$	$1\frac{49}{122}$	$0,229$	$-0,00959$
7	$1\frac{17}{33}$	$0,225$	$-0,00757$

Aufgabe (3)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 - 1 = 0$

$1x^2 - 1 = 0 \quad / + 1$

$1x^2 = 1 \quad / : 1$

$x^2 = \frac{1}{1}$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x = 0$

$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} \quad (x^2 \qquad\qquad -1 \quad) : (x) = x \\ \underline{-(x^2) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad -1 \end{array}$$

$f(x) = x + \frac{-1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1) \cdot 1}{(x)^2}$

$= \frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{(x)^2}$

$= \frac{x^2 + 1}{(x)^2}$

$= \frac{x^2 + 1}{(x)^2}$

$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{2x^3 - (2x^3 + 2x)}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{x^4}$

$= \frac{-2}{x^3}$

$= \frac{-2}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^2 - 1 = 0$
$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-1;0[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]0;1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1)} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1)} = \infty$$
Schiefe Asymptote:$y = x$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x} = \infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = 0$

$1x^2 + 1 = 0 \qquad / - 1$
$1x^2 = -1 \qquad / : 1$
$x^2 = \frac{-1}{1}$
keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$
Zaehler = 0

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-2}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

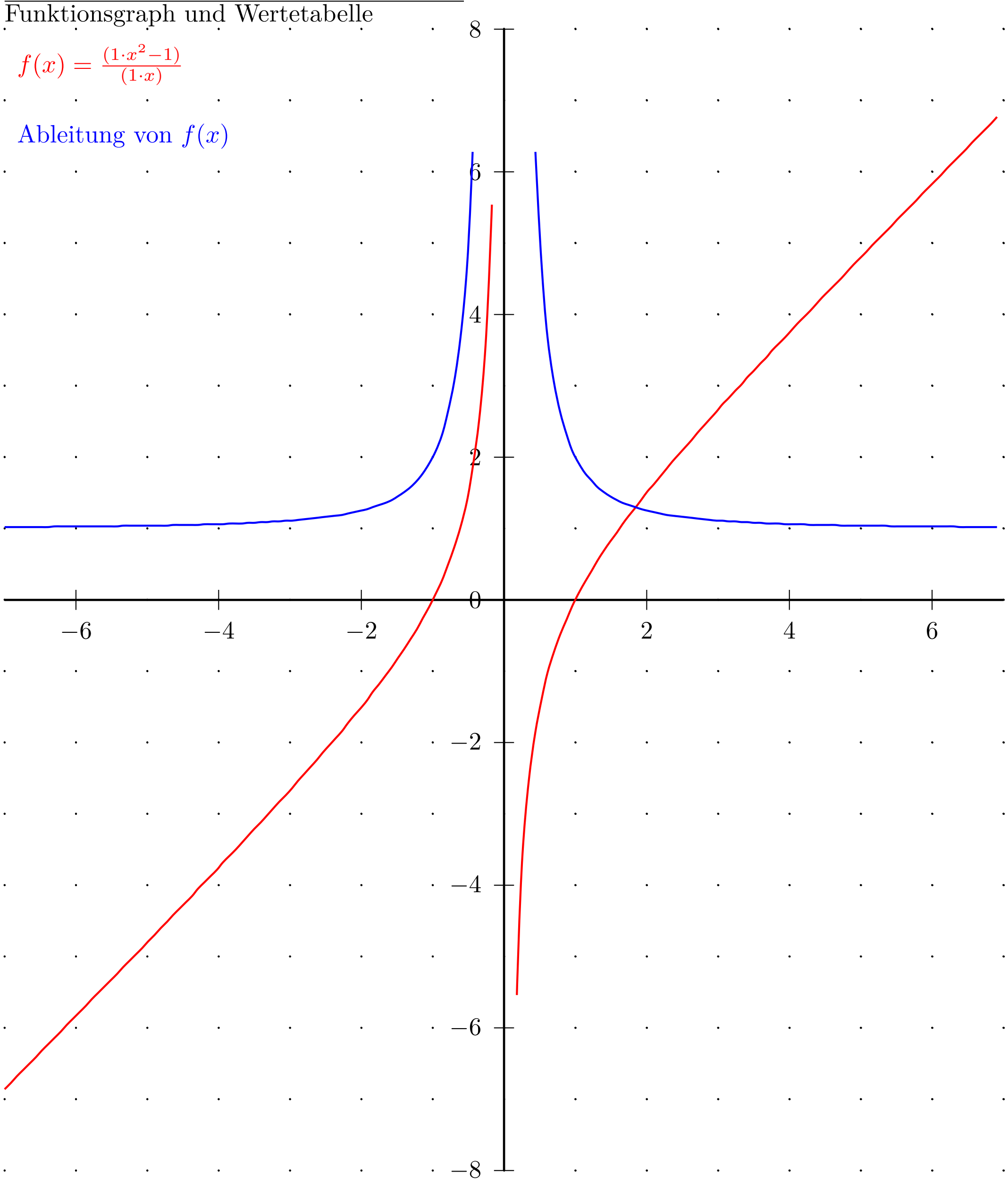
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_7 = 0;\quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0\quad$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0\quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-6\frac{6}{7}$	$1\frac{1}{49}$	$0,00583$
$-6\frac{1}{2}$	$-6\frac{9}{26}$	$1,02$	$0,00728$
-6	$-5\frac{5}{6}$	$1\frac{1}{36}$	$\frac{1}{108}$
$-5\frac{1}{2}$	$-5\frac{7}{22}$	$1\frac{4}{121}$	$0,012$
-5	$-4\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{25}$	$\frac{2}{125}$
$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{5}{18}$	$1\frac{4}{81}$	$0,0219$
-4	$-3\frac{3}{4}$	$1,06$	$\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{14}$	$1,08$	$0,0466$
-3	$-2\frac{2}{3}$	$1,11$	$0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{10}$	$1,16$	$0,128$
-2	$-1\frac{1}{2}$	$1,25$	$0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$1,44$	$0,593$
-1	0	2	2
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	5	16
0	$-\infty$	$-3264\frac{15}{49}$	∞

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\infty$	$-3264\frac{15}{49}$	∞
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	5	-16
1	0	2	-2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$1,44$	$-0,593$
2	$1\frac{1}{2}$	$1,25$	$-0,25$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{10}$	$1,16$	$-0,128$
3	$2\frac{2}{3}$	$1,11$	$-0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{14}$	$1,08$	$-0,0466$
4	$3\frac{3}{4}$	$1,06$	$-\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{5}{18}$	$1\frac{4}{81}$	$-0,0219$
5	$4\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{125}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{22}$	$1\frac{4}{121}$	$-0,012$
6	$5\frac{5}{6}$	$1\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{108}$
$6\frac{1}{2}$	$6\frac{9}{26}$	$1,02$	$-0,00728$
7	$6\frac{6}{7}$	$1\frac{1}{49}$	$-0,00583$

Aufgabe (4)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{2x - 3}$

Zaehler faktorisieren:

$2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 - 8 = 0 \quad / + 8$

$2x^2 = 8 \quad / : 2$

$x^2 = \dfrac{8}{2}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x - 3 = 0$

$2x - 3 = 0 \quad / + 3$

$2x = 3 \quad / : 2$

$x = \dfrac{3}{2}$

$x = 1\dfrac{1}{2}$

$\underline{x_3 = 1\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{2(x+2)(x-2)}{2(x - 1\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{1\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1\frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(x^2 & & -4 &) : (x - 1\frac{1}{2}) = x + 1\frac{1}{2} \\
-(x^2 & -1\frac{1}{2}x) & & \\
\hline
 & 1\frac{1}{2}x & -4 & \\
 & -(1\frac{1}{2}x & -2\frac{1}{4}) & \\
\hline
 & & -1\frac{3}{4} &
\end{array}$$

$f(x) = x + 1\dfrac{1}{2} + \dfrac{-1\frac{3}{4}}{x - 1\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x - 1\frac{1}{2}) - (x^2 - 4) \cdot 1}{(x - 1\frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{(2x^2 - 3x) - (x^2 - 4)}{(x - 1\frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{x^2 - 3x + 4}{(x - 1\frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{x^2 - 3x + 4}{(x - 1\frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \dfrac{(2x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}) - (x^2 - 3x + 4) \cdot (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{(2x^3 - 9x^2 + 13\frac{1}{2}x - 6\frac{3}{4}) - (2x^3 - 9x^2 + 17x - 12)}{(x^2 - 3x + 2\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{-3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4}}{(x^2 - 3x + 2\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{-3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4}}{(x^2 - 3x + 2\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$\underline{x_4 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2; 1\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(2 - \frac{8}{x^2})}{x(2 - \frac{3}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2(2 - \frac{8}{x^2})}{x(2 - \frac{3}{x})} = \infty$

Schiefe Asymptote:$y = x + 1\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1\frac{1}{2}^+} \frac{(x+2)(x-2)}{(x - 1\frac{1}{2})} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1\frac{1}{2}^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x - 1\frac{1}{2})} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 1\frac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}} = 0$

$1x^2 - 3x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-7}}{2}$

Diskriminante negativ keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}}$

Zaehler = 0

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_6 = 1\frac{1}{2}$;   1-fache Nullstelle

	$x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 1\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4}}{x^4 - 6x^3 + 13\frac{1}{2}x^2 - 13\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{16}}$$

$Zaehler = 0$

$$-3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4} = 0 \qquad / -5\frac{1}{4}$$
$$-3\frac{1}{2}x = -5\frac{1}{4} \qquad / : \left(-3\frac{1}{2}\right)$$
$$x = \frac{-5\frac{1}{4}}{-3\frac{1}{2}}$$
$$x = 1\frac{1}{2}$$

$x_7 = 1\frac{1}{2}$;   1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

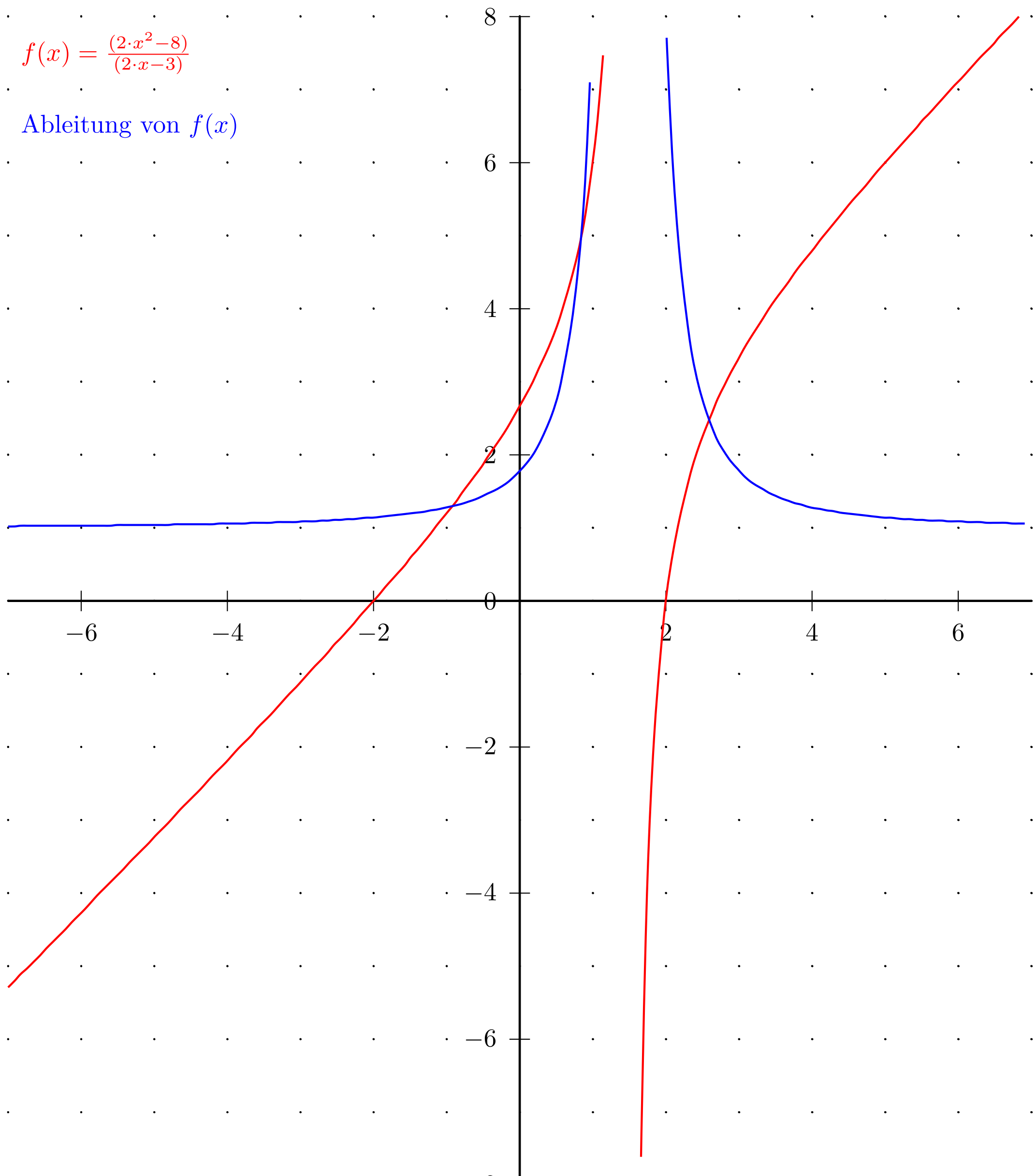
$x_8 = 1\frac{1}{2}$;   1-fache Nullstelle

	$x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 1\frac{1}{2}[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-5\frac{5}{17}$	$1,02$	$0,0057$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{25}{32}$	$1,03$	$0,00684$
-6	$-4\frac{4}{15}$	$1,03$	$0,0083$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{28}$	$\frac{1}{98}$
-5	$-3\frac{3}{13}$	$1,04$	$0,0127$
$-4\frac{1}{2}$	$-2\frac{17}{24}$	$1,05$	$0,0162$
-4	$-2\frac{2}{11}$	$1\frac{7}{121}$	$0,021$
$-3\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{20}$	$1\frac{7}{100}$	$0,028$
-3	$-1\frac{1}{9}$	$1,09$	$0,0384$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{16}$	$1,11$	$0,0547$
-2	0	$1,14$	$0,0816$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$1,19$	$0,13$
-1	$1\frac{1}{5}$	$1,28$	$0,224$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{8}$	$1,44$	$0,438$
0	$2\frac{2}{3}$	$1,78$	$1,04$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$2\frac{2}{3}$	$1,78$	$1,04$
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$2,75$	$3,5$
1	6	$8,01$	28
$1\frac{1}{2}$	$-\infty$	$-5713\frac{2}{7}$	∞
2	0	$8,01$	-28
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$2,75$	$-3,5$
3	$3\frac{1}{3}$	$1,78$	$-1,04$
$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{8}$	$1,44$	$-0,438$
4	$4\frac{4}{5}$	$1,28$	$-0,224$
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{12}$	$1,19$	$-0,13$
5	6	$1,14$	$-0,0816$
$5\frac{1}{2}$	$6\frac{9}{16}$	$1,11$	$-0,0547$
6	$7\frac{1}{9}$	$1,09$	$-0,0384$
$6\frac{1}{2}$	$7\frac{13}{20}$	$1\frac{7}{100}$	$-0,028$
7	$8\frac{2}{11}$	$1\frac{7}{121}$	$-0,021$

Aufgabe (5)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{x^2+6x+8}{-9x-3}$
Zaehler faktorisieren:
$x^2+6x+8=0$

$1x^2+6x+8=0$
$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{4}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm 2}{2}$
$x_1 = \dfrac{-6+2}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-6-2}{2}$
$x_1 = -2 \qquad x_2 = -4$
$\underline{x_1 = -4;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$-9x-3=0$

$-9x-3=0 \qquad /+3$
$-9x=3 \qquad /:(-9)$
$x=\dfrac{3}{-9}$
$x=-\dfrac{1}{3}$
$\underline{x_3=-\dfrac{1}{3};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{(x+4)(x+2)}{-9(x+\frac{1}{3})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

$f(x) = \dfrac{-\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}}{x+\frac{1}{3}}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll}
(-\frac{1}{9}x^2 & -\frac{2}{3}x & -\frac{8}{9} &):(x+\frac{1}{3}) = -\frac{1}{9}x-\frac{17}{27} \\
-(-\frac{1}{9}x^2 & -\frac{1}{27}x) & & \\
\hline
 & -\frac{17}{27}x & -\frac{8}{9} & \\
 & -(-\frac{17}{27}x & -\frac{17}{81}) & \\
\hline
 & & -\frac{55}{81} &
\end{array}$$

$f(x) = -\dfrac{1}{9}x - \dfrac{17}{27} + \dfrac{-\frac{55}{81}}{x+\frac{1}{3}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \dfrac{(-\frac{2}{9}x-\frac{2}{3})\cdot(x+\frac{1}{3}) - (-\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{9})\cdot 1}{(x+\frac{1}{3})^2}$
$= \dfrac{(-\frac{2}{9}x^2-\frac{20}{27}x-\frac{2}{9}) - (-\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{9})}{(x+\frac{1}{3})^2}$
$= \dfrac{-\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{27}x+\frac{2}{3}}{(x+\frac{1}{3})^2}$

$= \frac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}}{(x+\frac{1}{3})^2}$

$f''(x) = \frac{(-\frac{2}{9}x - \frac{2}{27}) \cdot (x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) - (-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}) \cdot (2x + \frac{2}{3})}{(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})^2}$

$= \frac{(-\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{27}x - 0,00823) - (-\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + 1\frac{23}{81}x + \frac{4}{9})}{(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})^2}$

$= \frac{-1\frac{29}{81}x - 0,453}{(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})^2}$

$= \frac{-1\frac{29}{81}x - 0,453}{(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} = 0$

$\underline{x_4 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	-2	$< x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]-2; -\frac{1}{3}[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}$

$x \in]-4; -2[\quad \cup \quad]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2(1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2})}{x(-9 - \frac{3}{x})} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2(1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2})}{x(-9 - \frac{3}{x})} = \infty$

Schiefe Asymptote: $y = -\frac{1}{9}x - \frac{17}{27}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^+} \frac{-\frac{1}{9}(x+4)(x+2)}{(x+\frac{1}{3})} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^-} \frac{-\frac{1}{9}(x+4)(x+2)}{(x+\frac{1}{3})} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -\frac{1}{3}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}}{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}} = 0$

$-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3} = 0$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{2}{27} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{27}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \frac{2}{3}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)}$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{2}{27} \pm \sqrt{0,302}}{-\frac{2}{9}}$

$x_{1/2} = \frac{\frac{2}{27} \pm 0,549}{-\frac{2}{9}}$

$x_1 = \frac{\frac{2}{27} + 0,549}{-\frac{2}{9}} \qquad x_2 = \frac{\frac{2}{27} - 0,549}{-\frac{2}{9}}$

$x_1 = -2,81 \qquad x_2 = 2,14$

$\underline{x_6 = -2,81; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_7 = 2,14; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-2,81) = 0,0899 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2,81/-0,0432)}$

$f''(2,14) = -0,0899$

$f''(2,14) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2,14/-1,14)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}}{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}}$

Zaehler $= 0$

$\underline{x_8 = -2,81; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_9 = 2,14; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_10 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-2,81$	$< x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x <$	$2,14$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-2,81; -\frac{1}{3}[\quad \cup \quad]-\frac{1}{3}; 2,14[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2,81[\quad \cup \quad]2,14; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-1\frac{29}{81}x - 0,453}{x^4 + 1\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{27}x + \frac{1}{81}}$

$Zaehler = 0$

$-1\frac{29}{81}x - 0,453 = 0 \qquad / + 0,453$

$-1\frac{29}{81}x = 0,453 \qquad / : \left(-1\frac{29}{81}\right)$

$x = \frac{0,453}{-1\frac{29}{81}}$

$x = -\frac{1}{3}$

$\underline{x_11 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

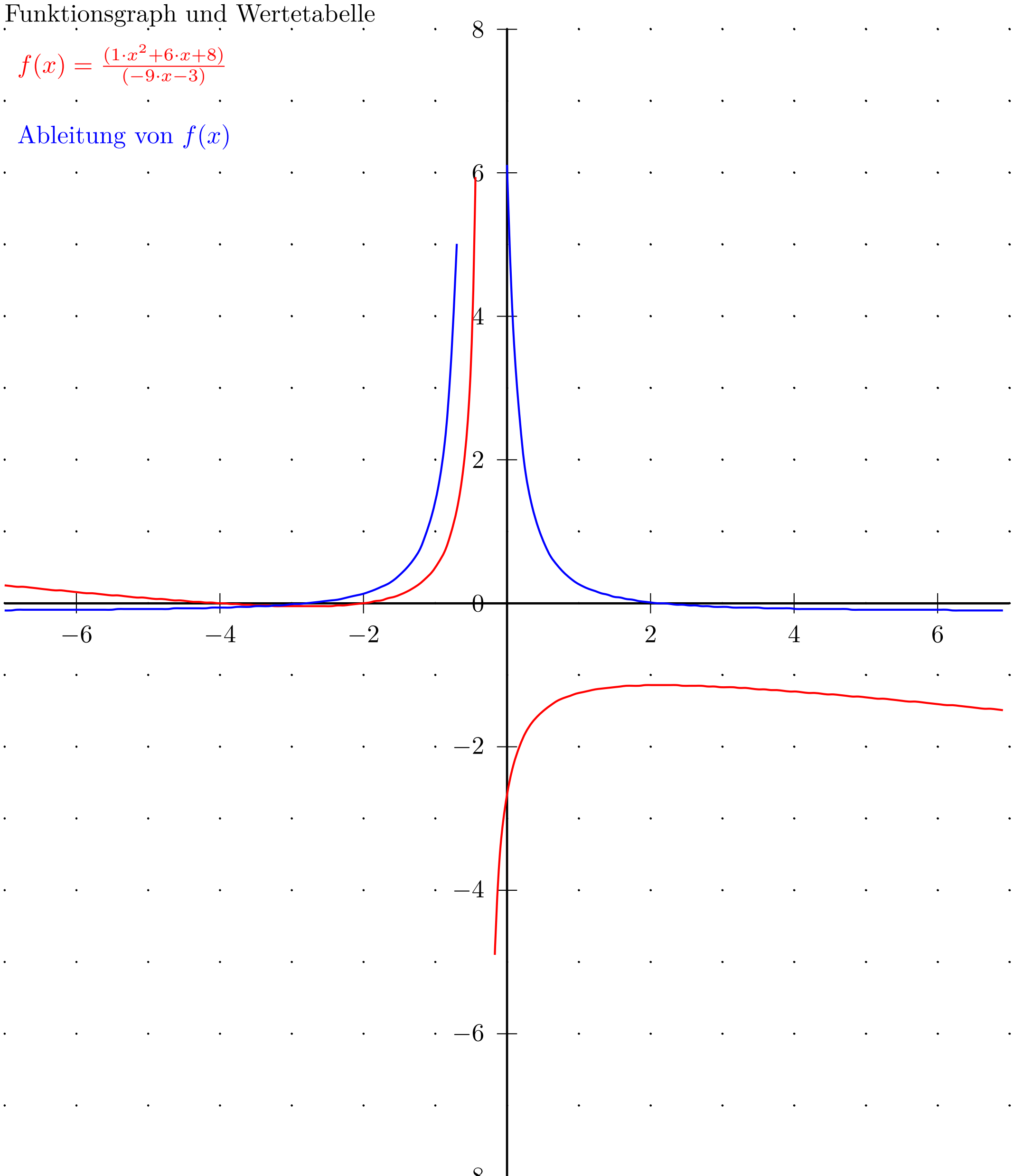
$\underline{x_12 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad \cup \quad]-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{4}$	$-0,0958$	$0,00458$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{15}{74}$	$-0,0933$	$0,00579$
-6	$\frac{8}{51}$	$-0,09$	$0,00746$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{7}{62}$	$-0,0857$	$0,00985$
-5	$\frac{1}{14}$	$-0,0799$	$0,0134$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{9}{125}$	$0,0188$
-4	0	$-0,0606$	$0,0275$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{38}$	$-0,0434$	$0,0428$
-3	$-\frac{1}{24}$	$-0,0156$	$0,0716$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{26}$	$0,0335$	$0,134$
-2	0	$0,133$	$0,293$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{42}$	$0,388$	$0,855$
-1	$\frac{1}{2}$	$1,42$	$4,59$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$24,6$	297
0	$-2\frac{2}{3}$	$6,02$	$-36,8$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-2\frac{2}{3}$	$6,02$	$-36,8$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$0,867$	$-2,35$
1	$-1\frac{1}{4}$	$0,271$	$-0,573$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{6}$	$0,0909$	$-0,22$
2	$-1\frac{1}{7}$	$0,0136$	$-0,107$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{34}$	$-0,0265$	$-0,0597$
3	$-1\frac{1}{6}$	$-0,05$	$-0,0367$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{9}{46}$	$-0,0649$	$-0,0241$
4	$-1\frac{3}{13}$	$-0,075$	$-0,0167$
$4\frac{1}{2}$	$-1,27$	$-0,082$	$-0,012$
5	$-1\frac{5}{16}$	$-0,0872$	$-0,00895$
$5\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{14}$	$-0,0912$	$-0,00684$
6	$-1\frac{23}{57}$	$-0,0942$	$-0,00535$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{37}{82}$	$-0,0966$	$-0,00426$
7	$-1\frac{1}{2}$	$-0,0985$	$-0,00344$

Aufgabe (6)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x^2 + 7x - 12}{x - 3}$
Zaehler faktorisieren:
$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$\begin{array}{llllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 & \\
 & -(-x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & 4x & -12 & \\
 & & -(4x & -12) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_1 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x - 3 = 0$

$x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$x = 3$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})(x-3)}{(x-3)}$
• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 3x^2 - x + 4$
$f'(x) = 6x - 1$
$f''(x) = 6$
$F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - x + 4)dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich:
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [3\dfrac{11}{12}, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(3 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f\left(-x\right) = 3 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) + 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 3x^2 - x + 4 = 0$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{\left(-1\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x - 1 = 0$

$6x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$6x = 1 \qquad / : 6$
$x = \dfrac{1}{6}$
$x = \dfrac{1}{6}$
$x_1 = \dfrac{1}{6}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f''(\frac{1}{6}) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{6}/3\frac{11}{12})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

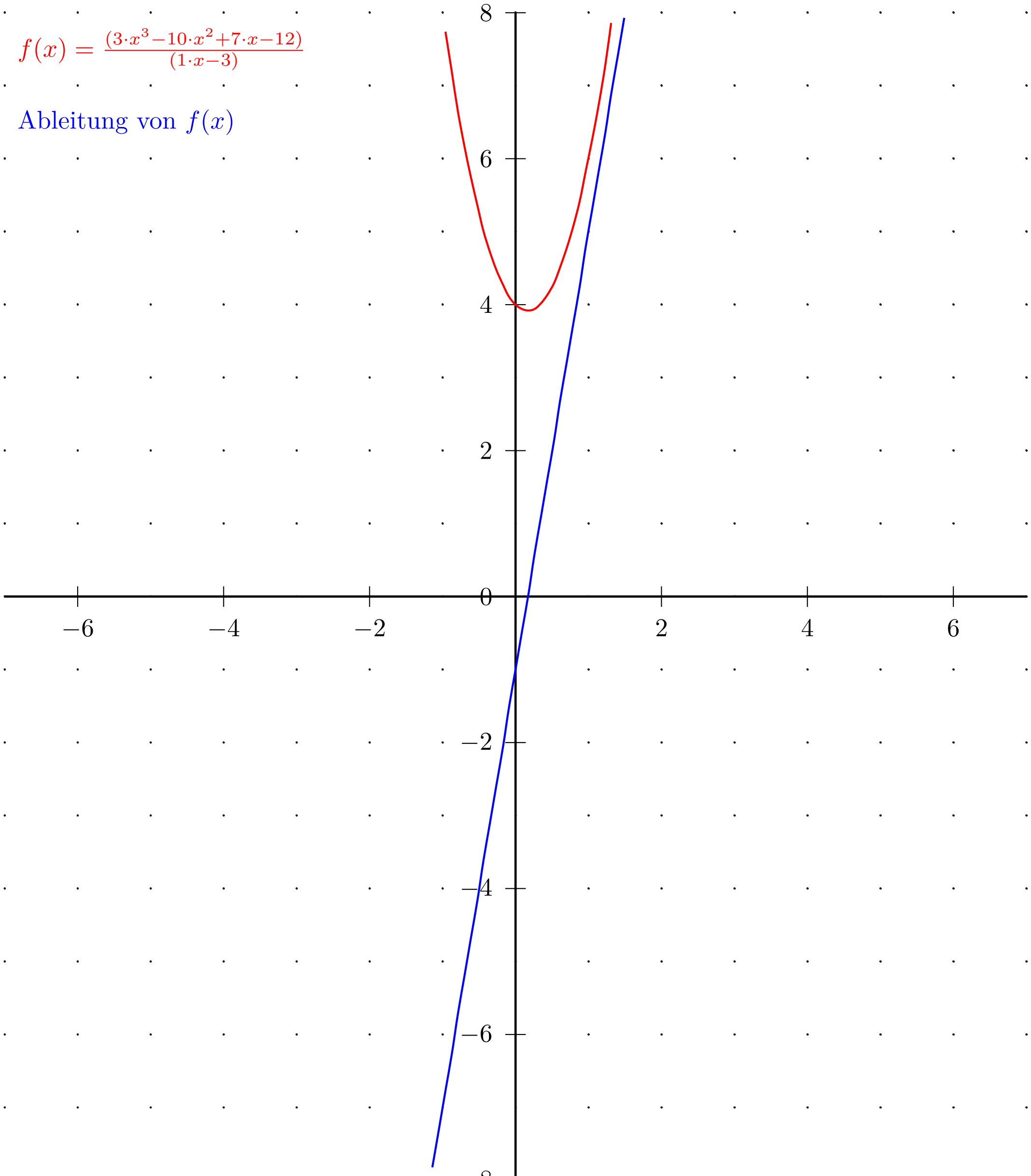
	$x <$	$\frac{1}{6}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{1}{6}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; \frac{1}{6}[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	158	-43	6
$-6\frac{1}{2}$	$137\frac{1}{4}$	-40	6
-6	118	-37	6
$-5\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{4}$	-34	6
-5	84	-31	6
$-4\frac{1}{2}$	$69\frac{1}{4}$	-28	6
-4	56	-25	6
$-3\frac{1}{2}$	$44\frac{1}{4}$	-22	6
-3	34	-19	6
$-2\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{4}$	-16	6
-2	18	-13	6
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	-10	6
-1	8	-7	6
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-4	6
0	4	-1	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	-1	6
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	2	6
1	6	5	6
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	8	6
2	14	11	6
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	14	6
3	NaN	17	NaN
$3\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{4}$	20	6
4	48	23	6
$4\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{4}$	26	6
5	74	29	6
$5\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{4}$	32	6
6	106	35	6
$6\frac{1}{2}$	$124\frac{1}{4}$	38	6
7	144	41	6

Aufgabe (7)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2}{x-2}$

Zaehler faktorisieren:

$\dfrac{1}{3}x^3 - 1\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 2 = 0$

$\dfrac{1}{3}x^3 - 1\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 2 = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}(x+1)(x-3)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x - 1 = \dfrac{1}{3}(x+1)(x-3)$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}$

$f''(x) = \dfrac{2}{3}$

$F(x) = \displaystyle\int (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1)dx = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [(-1\dfrac{1}{3}), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(\dfrac{1}{3} - \dfrac{\frac{2}{3}}{x} - \dfrac{1}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\dfrac{1}{3} \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\dfrac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = \dfrac{1}{3} \cdot (-x)^2 - \dfrac{2}{3} \cdot (-x) - 1$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x - 1 = 0$

$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1)}}{2 \cdot \frac{1}{3}}$

$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{2}{3} \pm \sqrt{1\frac{7}{9}}}{\frac{2}{3}}$

$x_{1/2} = \dfrac{\frac{2}{3} \pm 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x_1 = \dfrac{\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \dfrac{\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-1; 3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \qquad / + \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \qquad / : \frac{2}{3}$

$x = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x = 1$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(1) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/-1\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

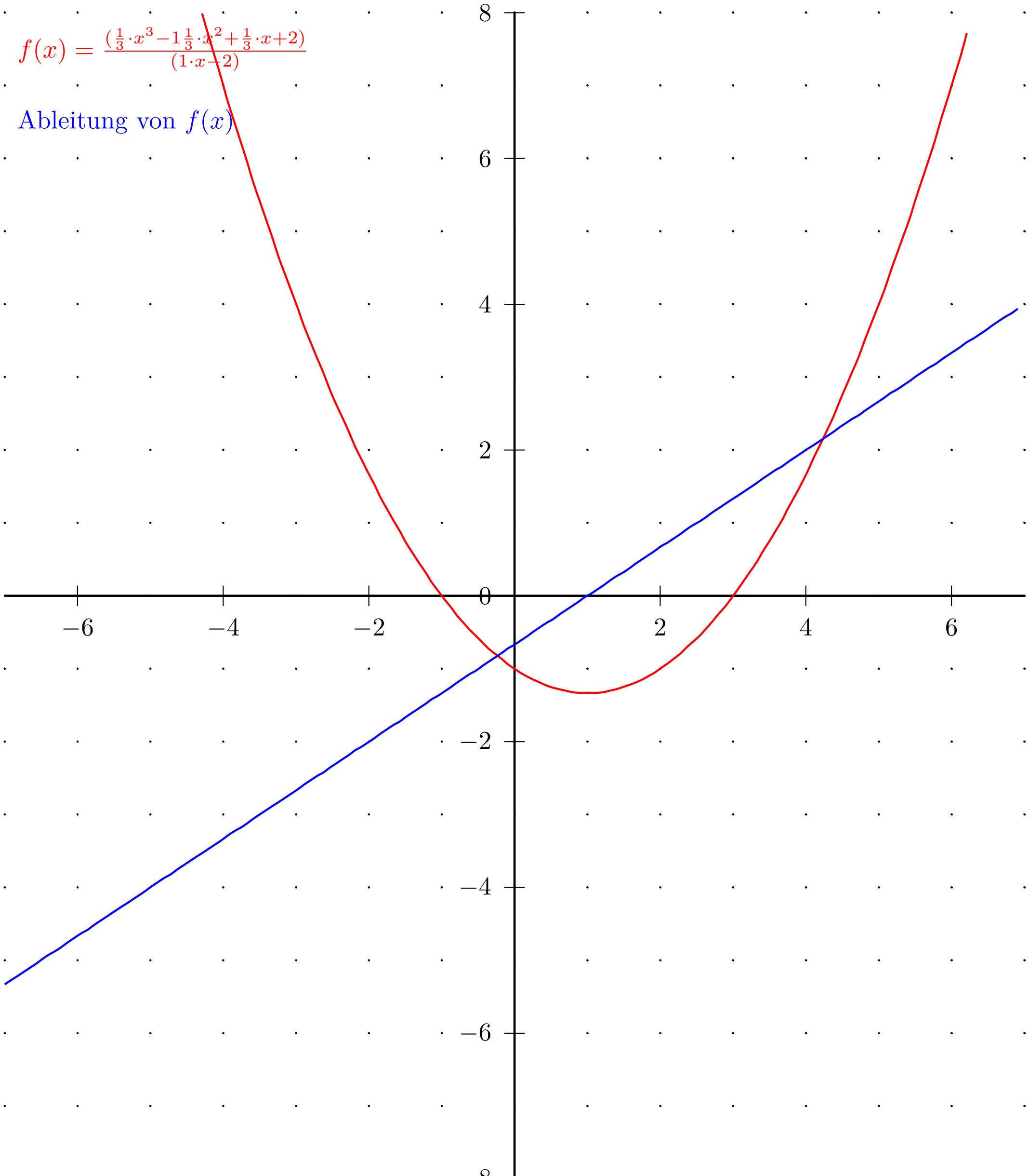
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x\right]_{-1}^{3}$

$= \left(\frac{1}{9} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 - 1 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{9} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^2 - 1 \cdot (-1)\right)$

$= (-3) - \left(\frac{5}{9}\right) = -3\frac{5}{9}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	20	$-5\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$17\frac{5}{12}$	-5	$\frac{2}{3}$
-6	15	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$12\frac{3}{4}$	$-4\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
-5	$10\frac{2}{3}$	-4	$\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	$-3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
-4	7	$-3\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{12}$	-3	$\frac{2}{3}$
-3	4	$-2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
-2	$1\frac{2}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
-1	$-1,33\cdot 10^{-15}$	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{12}$	-1	$\frac{2}{3}$
0	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	$-1\frac{1}{3}$	$-1,9\cdot 10^{-14}$	$\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	∞	$\frac{2}{3}$	$-\infty$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{12}$	1	$\frac{2}{3}$
3	$2,02\cdot 10^{-14}$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
4	$1\frac{2}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
5	4	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{12}$	3	$\frac{2}{3}$
6	7	$3\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	$3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
7	$10\frac{2}{3}$	4	$\frac{2}{3}$

Aufgabe (8)

•Funktion/Faktorisieren
$f\left(x\right)=\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x-2}$
Zaehler faktorisieren:
$x^3+x^2-4x-4=0$

$x^3+x^2-4x-4=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +x^2 & -4x & -4 \quad) : (x+1) = x^2-4 \\
-(x^3 & +x^2) & & \\
\hline
 & -4x & -4 & \\
 & -(-4x & -4) & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2-4=0 \qquad /+4$
$1x^2=4 \qquad /:1$
$x^2=\dfrac{4}{1}$
$x=\pm\sqrt{4}$
$x_1=2 \qquad x_2=-2$
$\underline{x_1=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2=-1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x-2=0$

$x-2=0 \qquad /+2$
$x=2$
$\underline{x_4=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f\left(x\right)=\dfrac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$
• Term gekürzen
$f\left(x\right)=\dfrac{(x+2)(x+1)}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f\left(x\right)=x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$
$f'\left(x\right)=2x+3$
$f''\left(x\right)=2$
$F(x)=\displaystyle\int(x^2+3x+2)dx=\frac{1}{3}x^3+1\frac{1}{2}x^2+2x+c$

• Definitions- und Wertebereich:
$\mathbb{D}=\mathbb{R} \qquad \mathbb{W}=[(-\dfrac{1}{4}),\infty[$

• Grenzwerte:
$f(x)=x^2(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=[1\cdot\infty^2]=\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=[1\cdot(-\infty)^2]=\infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f\left(-x\right)=1\cdot(-x)^2+3\cdot(-x)+2$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$

$1x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$
$x_1 = \frac{-3 + 1}{2} \qquad x_2 = \frac{-3 - 1}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; -1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 3 = 0$

$2x + 3 = 0 \qquad / -3$
$2x = -3 \qquad / : 2$
$x = \frac{-3}{2}$
$x = -1\frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1\frac{1}{2}/-\frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

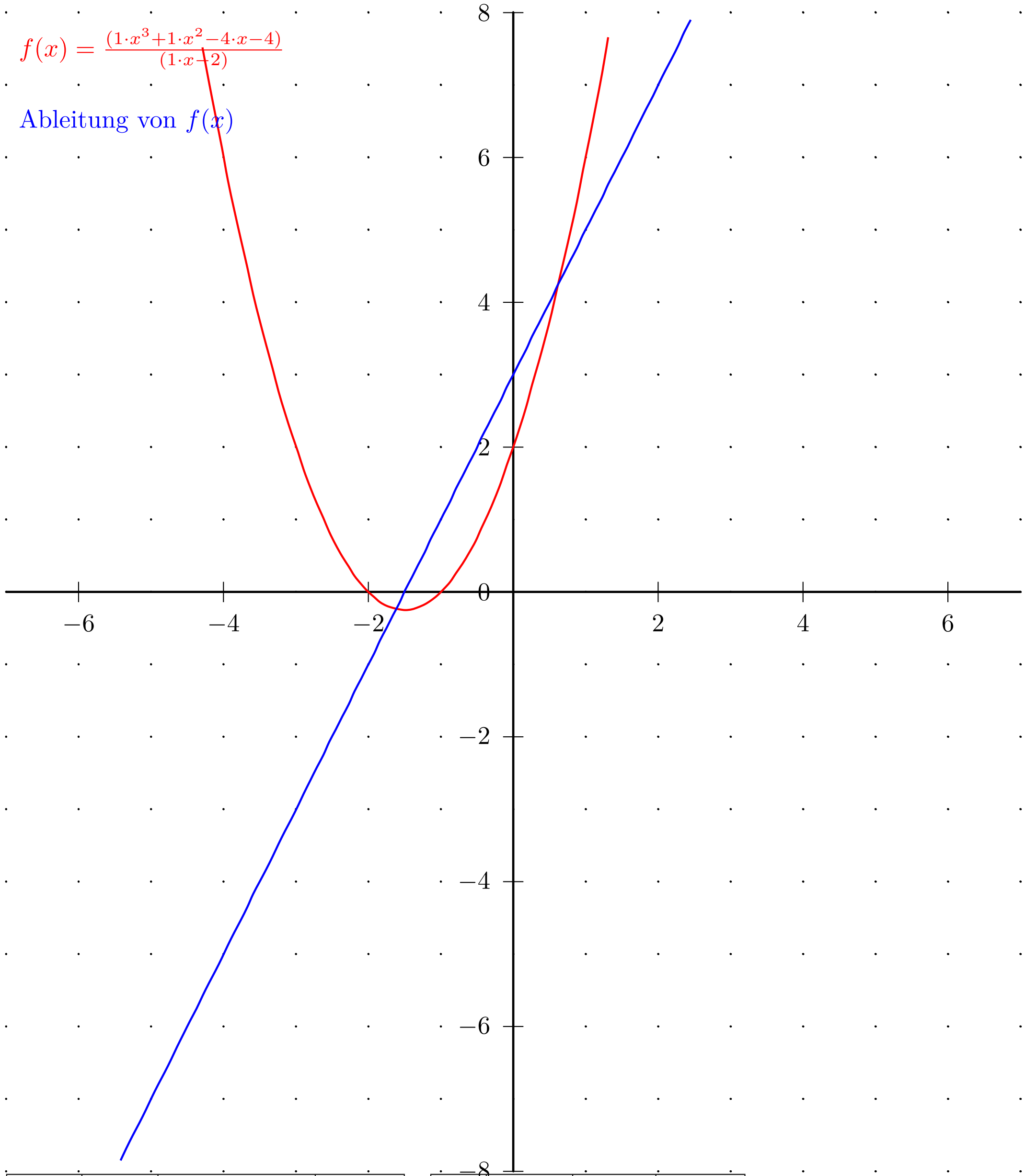
	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-2}^{-1} \left(x^2 + 3x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{-1}$
$= \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2)\right)$
$= \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	30	-11	2
$-6\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	-10	2
-6	20	-9	2
$-5\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	-8	2
-5	12	-7	2
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	-6	2
-4	6	-5	2
$-3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	-4	2
-3	2	-3	2
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-2	2
-2	0	-1	2
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$3,17\cdot 10^{-15}$	2
-1	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	2	2
0	2	3	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	3	2
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4	2
1	6	5	2
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	6	2
2	NaN	7	NaN
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	8	2
3	20	9	2
$3\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	10	2
4	30	11	2
$4\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{4}$	12	2
5	42	13	2
$5\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$	14	2
6	56	15	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{3}{4}$	16	2
7	72	17	2

Aufgabe (9)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - x - 5}{x + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

$x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$
\begin{array}{llll}
(x^3 & +5x^2 & -x & -5 \quad) : (x-1) = x^2 + 6x + 5 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 6x^2 & -x & -5 \\
 & -(6x^2 & -6x) & \\
\hline
 & & 5x & -5 \\
 & & -(5x & -5) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$1x^2 + 6x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{16}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm 4}{2}$

$x_1 = \dfrac{-6 + 4}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-6 - 4}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -5$

$\underline{x_1 = -5; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x + 1 = 0$

$x + 1 = 0 \qquad / - 1$

$x = -1$

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x + 5)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x + 5)(x - 1)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$

$f'(x) = 2x + 4$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \int (x^2 + 4x - 5)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + c$

• Definitions- und Wertebereich:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [(-9), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x) - 5$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 4x - 5 = 0$

$1x^2 + 4x - 5 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$
$x_1 = \frac{-4 + 6}{2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 6}{2}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -5$
$\underline{x_1 = -5; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-5	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -5[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-5; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 4 = 0$

$2x + 4 = 0 \qquad / - 4$
$2x = -4 \qquad / : 2$
$x = \frac{-4}{2}$
$x = -2$
$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2/-9)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

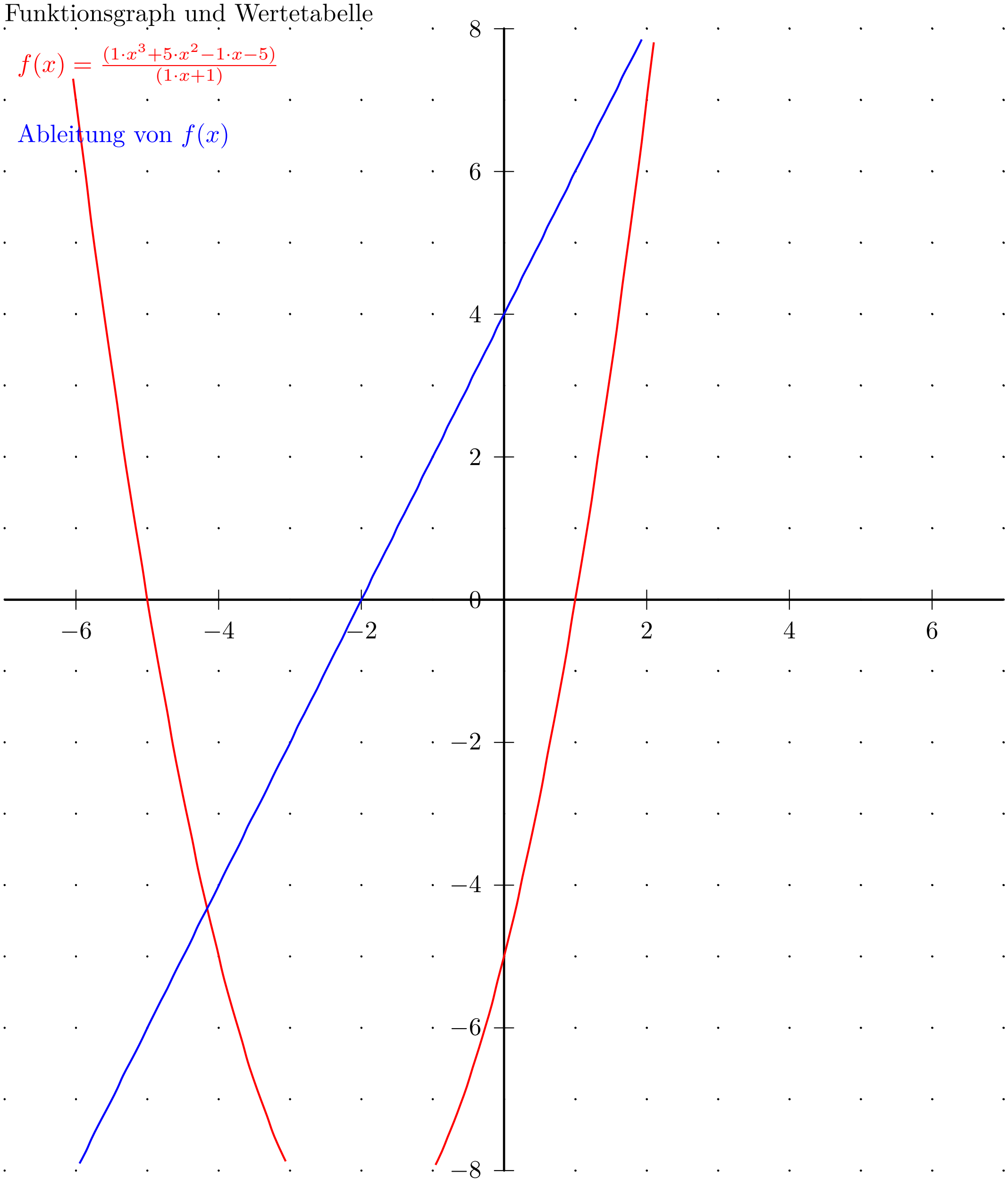
$\underline{\quad x \in]-2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-5}^{1} \left(x^2 + 4x - 5\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right]_{-5}^{1}$
$= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-5)^3 + 2 \cdot (-5)^2 - 5 \cdot (-5)\right)$

$$= \left(-2\frac{2}{3}\right) - \left(33\frac{1}{3}\right) = -36$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	16	-10	2
$-6\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	-9	2
-6	7	-8	2
$-5\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	-7	2
-5	0	-6	2
$-4\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	-5	2
-4	-5	-4	2
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	-3	2
-3	-8	-2	2
$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	-1	2
-2	-9	$1,52 \cdot 10^{-13}$	2
$-1\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	1	2
-1	NaN	2	NaN
$-\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	3	2
0	-5	4	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-5	4	2
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	5	2
1	0	6	2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	7	2
2	7	8	2
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	9	2
3	16	10	2
$3\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	11	2
4	27	12	2
$4\frac{1}{2}$	$33\frac{1}{4}$	13	2
5	40	14	2
$5\frac{1}{2}$	$47\frac{1}{4}$	15	2
6	55	16	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{1}{4}$	17	2
7	72	18	2

Aufgabe (10)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{3x^3 - x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

Zaehler faktorisieren:

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll l}
(3x^3 & -x^2 & -3x & +1 &) : (x-1) = 3x^2 + 2x - 1 \\
-(3x^3 & -3x^2) & & & \\
\hline
& 2x^2 & -3x & +1 & \\
& -(2x^2 & -2x) & & \\
\hline
& & -x & +1 & \\
& & -(-x & +1) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 4}{6}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 4}{6} \qquad x_2 = \dfrac{-2 - 4}{6}$

$x_1 = \dfrac{1}{3} \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 1 = 0$

$x - 1 = 0 \qquad / + 1$

$x = 1$

$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-\frac{1}{3})}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)(x - \dfrac{1}{3})$

$f'(x) = 6x + 2$

$f''(x) = 6$

$F(x) = \displaystyle\int (3x^2 + 2x - 1)dx = x^3 + x^2 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [(-1\dfrac{1}{3}), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x) - 1$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 4}{6}$
$x_1 = \frac{-2+4}{6} \qquad x_2 = \frac{-2-4}{6}$
$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1; \frac{1}{3}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x + 2 = 0$

$6x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$6x = -2 \qquad / : 6$
$x = \frac{-2}{6}$
$x = -\frac{1}{3}$
$\underline{x_3 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-\frac{1}{3}) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-\frac{1}{3} / -1\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

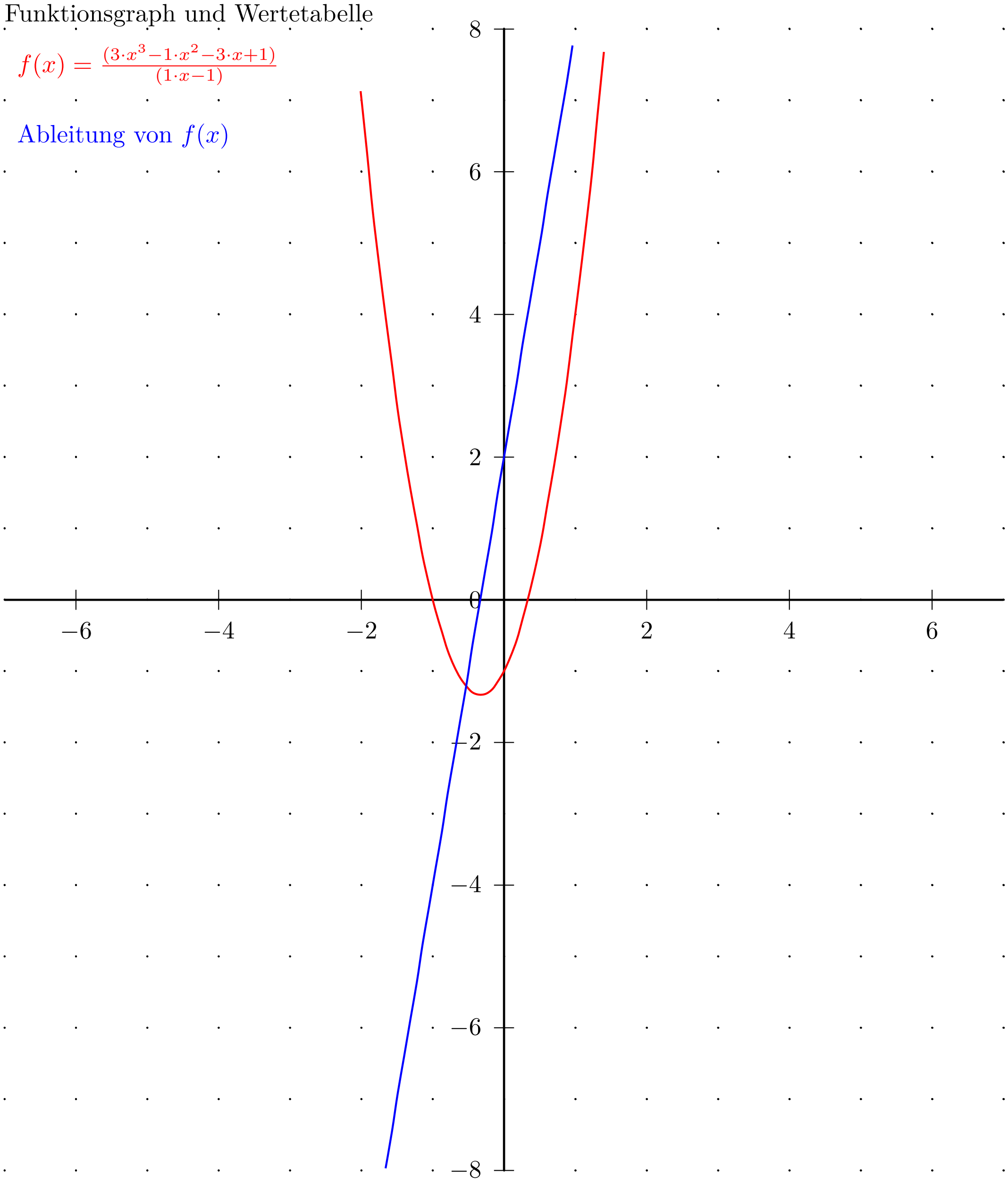
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} \left(3x^2 + 2x - 1\right) dx = \left[x^3 + x^2 - x\right]_{-1}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(1 \cdot \frac{1}{3}^3 + 1 \cdot \frac{1}{3}^2 - 1 \cdot \frac{1}{3}\right) - \left(1 \cdot (-1)^3 + 1 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot (-1)\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{27}\right) - (1) = -1\frac{5}{27}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	132	-40	6
$-6\frac{1}{2}$	$112\frac{3}{4}$	-37	6
-6	95	-34	6
$-5\frac{1}{2}$	$78\frac{3}{4}$	-31	6
-5	64	-28	6
$-4\frac{1}{2}$	$50\frac{3}{4}$	-25	6
-4	39	-22	6
$-3\frac{1}{2}$	$28\frac{3}{4}$	-19	6
-3	20	-16	6
$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{3}{4}$	-13	6
-2	7	-10	6
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	-7	6
-1	0	-4	6
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	-1	6
0	-1	2	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	2	6
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5	6
1	NaN	8	NaN
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	11	6
2	15	14	6
$2\frac{1}{2}$	$22\frac{3}{4}$	17	6
3	32	20	6
$3\frac{1}{2}$	$42\frac{3}{4}$	23	6
4	55	26	6
$4\frac{1}{2}$	$68\frac{3}{4}$	29	6
5	84	32	6
$5\frac{1}{2}$	$100\frac{3}{4}$	35	6
6	119	38	6
$6\frac{1}{2}$	$138\frac{3}{4}$	41	6
7	160	44	6

Aufgabe (11)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 - 8x + 2 = 0$

$x^3 - 8x + 2 = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_1 = -2,95; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 0,252; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 2,69; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x + 2 = 0$

$x + 2 = 0 \qquad / - 2$

$x = -2$

$\underline{x_4 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x + 2,95)(x - 0,252)(x - 2,69)}{(x + 2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 2}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & & -8x & +2 &) : (x+2) = x^2 - 2x - 4 \\
-(x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^2 & -8x & +2 & \\
 & -(-2x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & -4x & +2 & \\
 & & -(-4x & -8) & \\
\hline
 & & & 10 &
\end{array}$$

$f(x) = x^2 - 2x - 4 + \dfrac{10}{x + 2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(3x^2 - 8) \cdot (x + 2) - (x^3 - 8x + 2) \cdot 1}{(x + 2)^2}$

$= \dfrac{(3x^3 + 6x^2 - 8x - 16) - (x^3 - 8x + 2)}{(x + 2)^2}$

$= \dfrac{2x^3 + 6x^2 - 18}{(x + 2)^2}$

$= \dfrac{2x^3 + 6x^2 - 18}{(x + 2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(6x^2 + 12x) \cdot (x^2 + 4x + 4) - (2x^3 + 6x^2 - 18) \cdot (2x + 4)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{(6x^4 + 36x^3 + 72x^2 + 48x) - (4x^4 + 20x^3 + 24x^2 - 36x - 72)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{2x^4 + 16x^3 + 48x^2 + 84x + 72}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{2x^4 + 16x^3 + 48x^2 + 84x + 72}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \frac{2(x^2+1,85x+4,33)(x+4,15)(x+2)}{(x+2)^4}$
$= \frac{2(x^2+1,85x+4,33)(x+4,15)}{(x+2)^3}$
$= \frac{2x^3+12x^2+24x+36}{x^3+6x^2+12x+8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^3 - 8x + 2 = 0$
$\underline{x_5 = -2,95; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 0,252; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 2,69; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,95$	$< x <$	-2	$< x <$	$0,252$	$< x <$	$2,69$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;-2,95[\quad \cup \quad]-2;0,252[\quad \cup \quad]2,69;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2,95;-2[\quad \cup \quad]0,252;2,69[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3(1-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3})}{x(1+\frac{2}{x})} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3(1-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3})}{x(1+\frac{2}{x})} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{(x+2,95)(x-0,252)(x-2,69)}{(x+2)} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{(x+2,95)(x-0,252)(x-2,69)}{(x+2)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{2x^3+6x^2-18}{x^2+4x+4} = 0$

$2x^3 + 6x^2 - 18 = 0$

$NumerischeSuche:$
$\underline{x_8 = 1,43; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(1,43) = 2,5 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1,43/-1,9)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{2x^3+6x^2-18}{x^2+4x+4}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_9 = 1,43; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_10 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x <$	$1,43$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]1,43; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 1,43[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 24x + 36}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

$Zaehler = 0$

$2x^3 + 12x^2 + 24x + 36 = 0$

$NumerischeSuche:$

$x_11 = -4,15; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

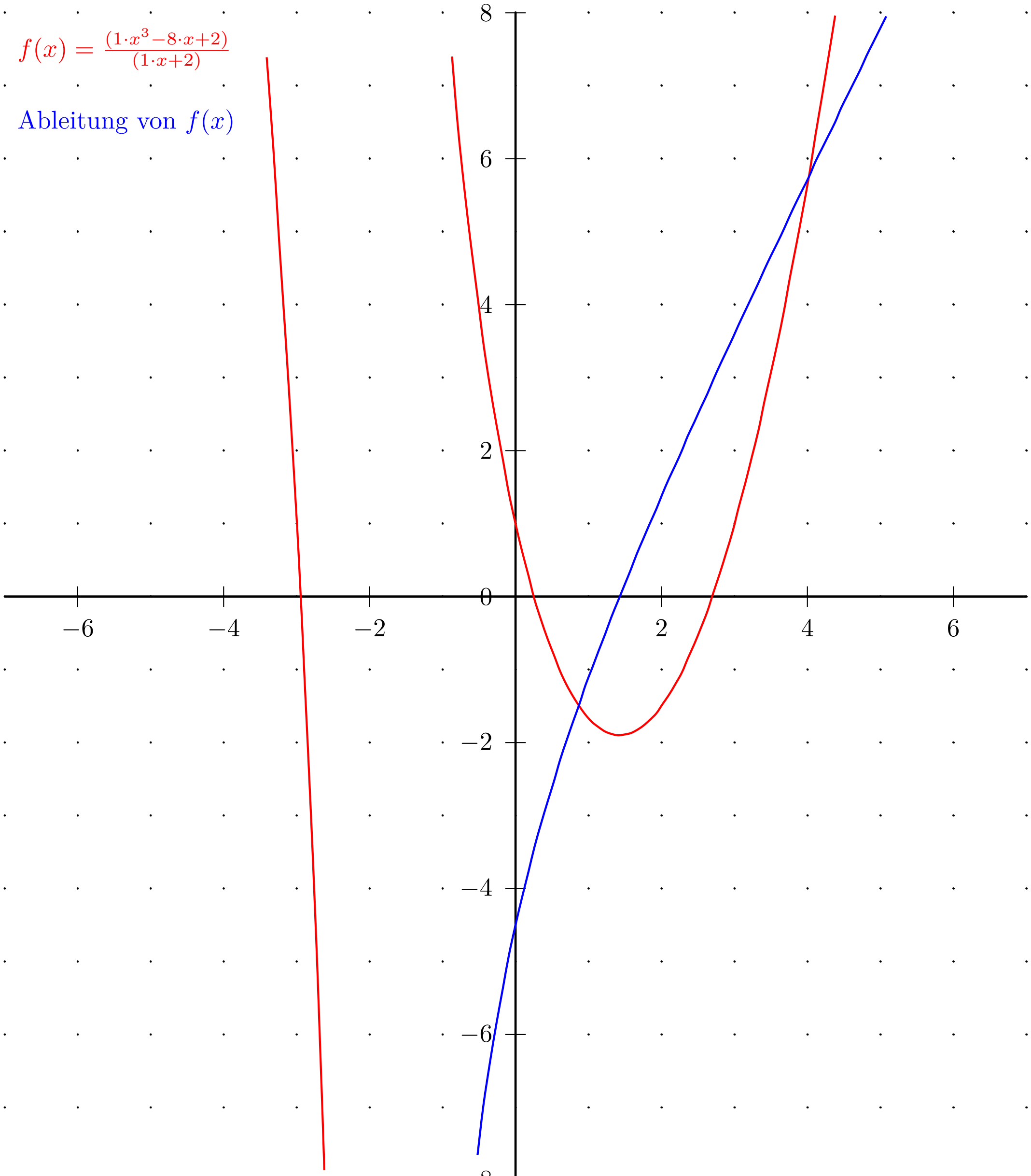
$x_12 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-4,15$	$< x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -4,15[\quad \cup \quad]-2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-4,15; -2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	57	$-16,4$	$1,84$
$-6\frac{1}{2}$	$49\frac{1}{36}$	$-15,5$	$1,78$
-6	$41\frac{1}{2}$	$-14,6$	$1,69$
$-5\frac{1}{2}$	$34\frac{11}{28}$	$-13,8$	$1,53$
-5	$27\frac{2}{3}$	$-13,1$	$1,26$
$-4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	$-12,6$	$0,72$
-4	15	$-12,5$	$-0,5$
$-3\frac{1}{2}$	$8\frac{7}{12}$	$-13,4$	$-3,93$
-3	1	-18	-18
$-2\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{4}$	-47	-158
-2	∞	$32647\frac{3}{49}$	$-\infty$
$-1\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	-45	162
-1	9	-14	22
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$-7,45$	$7,93$
0	1	$-4,5$	$4,5$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-4,5$	$4,5$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-2,6$	$3,28$
1	$-1\frac{2}{3}$	$-1,11$	$2,74$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{25}{28}$	$0,184$	$2,47$
2	$-1\frac{1}{2}$	$1,37$	$2,31$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{19}{36}$	$2,51$	$2,22$
3	1	$3,6$	$2,16$
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{44}$	$4,67$	$2,12$
4	$5\frac{2}{3}$	$5,72$	$2\frac{5}{54}$
$4\frac{1}{2}$	$8\frac{41}{52}$	$6,76$	$2,07$
5	$12\frac{3}{7}$	$7,8$	$2,06$
$5\frac{1}{2}$	$16\frac{7}{12}$	$8\frac{37}{45}$	$2,05$
6	$21\frac{1}{4}$	$9\frac{27}{32}$	$2,04$
$6\frac{1}{2}$	$26\frac{29}{68}$	$10,9$	$2,03$
7	$32\frac{1}{9}$	$11\frac{71}{81}$	$2,03$

Aufgabe (12)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+1}$

Zaehler faktorisieren:

$2x^3+1=0$

$2x^3+1=0$

$2x^3+1=0 \quad /-1$

$2x^3=-1 \quad /:2$

$x^3=\frac{-1}{2}$

$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

$x=-0,794$

Polynomdivision:$(-0,794)$

$$\begin{array}{llll} (2x^3 & & & +1 \quad) : (x+0,794) = 2x^2-1,59x+1,26 \\ -(2x^3 & +1,59x^2) & & \\ \hline & -1,59x^2 & & +1 \\ & -(-1,59x^2 & -1,26x) & \\ \hline & & 1,26x & +1 \\ & & -(1,26x & +1) \\ \hline & & & -2,22\cdot 10^{-16} \end{array}$$

$2x^2-1,59x+1,26=0$

$x_{1/2}=\frac{+1,59\pm\sqrt{(-1,59)^2-4\cdot 2\cdot 1,26}}{2\cdot 2}$

$x_{1/2}=\frac{+1,59\pm\sqrt{-7,56}}{4}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$\underline{x_1=-0,794; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2+1=0$

$1x^2+1=0 \quad /-1$

$1x^2=-1 \quad /:1$

$x^2=\frac{-1}{1}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f(x)=\frac{2(x^2-0,794x+0,63)(x+0,794)}{(x^2+1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+1}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{lll} (2x^3 & & +1 \quad) : (x^2+1) = 2x \\ -(2x^3 & +2x) & \\ \hline & -2x & +1 \end{array}$$

$f(x)=2x+\frac{-2x+1}{x^2+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x)=\frac{6x^2\cdot(x^2+1)-(2x^3+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{(6x^4+6x^2)-(4x^4+2x)}{(x^2+1)^2}$
$= \dfrac{2x^4+6x^2-2x}{(x^2+1)^2}$
$= \dfrac{2x^4+6x^2-2x}{(x^2+1)^2}$
$f''(x) = \dfrac{(8x^3+12x-2)\cdot(x^4+2x^2+1)-(2x^4+6x^2-2x)\cdot(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+1)^2}$
$= \dfrac{(8x^7+28x^5-2x^4+32x^3-4x^2+12x-2)-(8x^7+32x^5-8x^4+24x^3-8x^2)}{(x^4+2x^2+1)^2}$
$= \dfrac{-4x^5+6x^4+8x^3+4x^2+12x-2}{(x^4+2x^2+1)^2}$
$= \dfrac{-4x^5+6x^4+8x^3+4x^2+12x-2}{(x^4+2x^2+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$2x^3+1=0$
$\underline{x_2 = -0,794; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-0,794$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-0,794;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-0,794[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3(2+\frac{1}{x^3})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3(2+\frac{1}{x^3})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = 2x$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{2x^4+6x^2-2x}{x^4+2x^2+1} = 0$
$x(2x^3+6x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad 2x^3+6x-2=0$
$2x^3+6x-2=0$

$NumerischeSuche:$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0,322; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -2$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/1)}$
$f''(0,322) = 1,75 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,322/0,967)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{2x^4 + 6x^2 - 2x}{x^4 + 2x^2 + 1}$
Zaehler $= 0$
$x_5 = 0$; 1-fache Nullstelle
$x_6 = 0,322$; 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	0	$< x <$	$0,322$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0,322;\infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]0;0,322[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-4x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 12x - 2}{x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1}$
$Zaehler = 0$

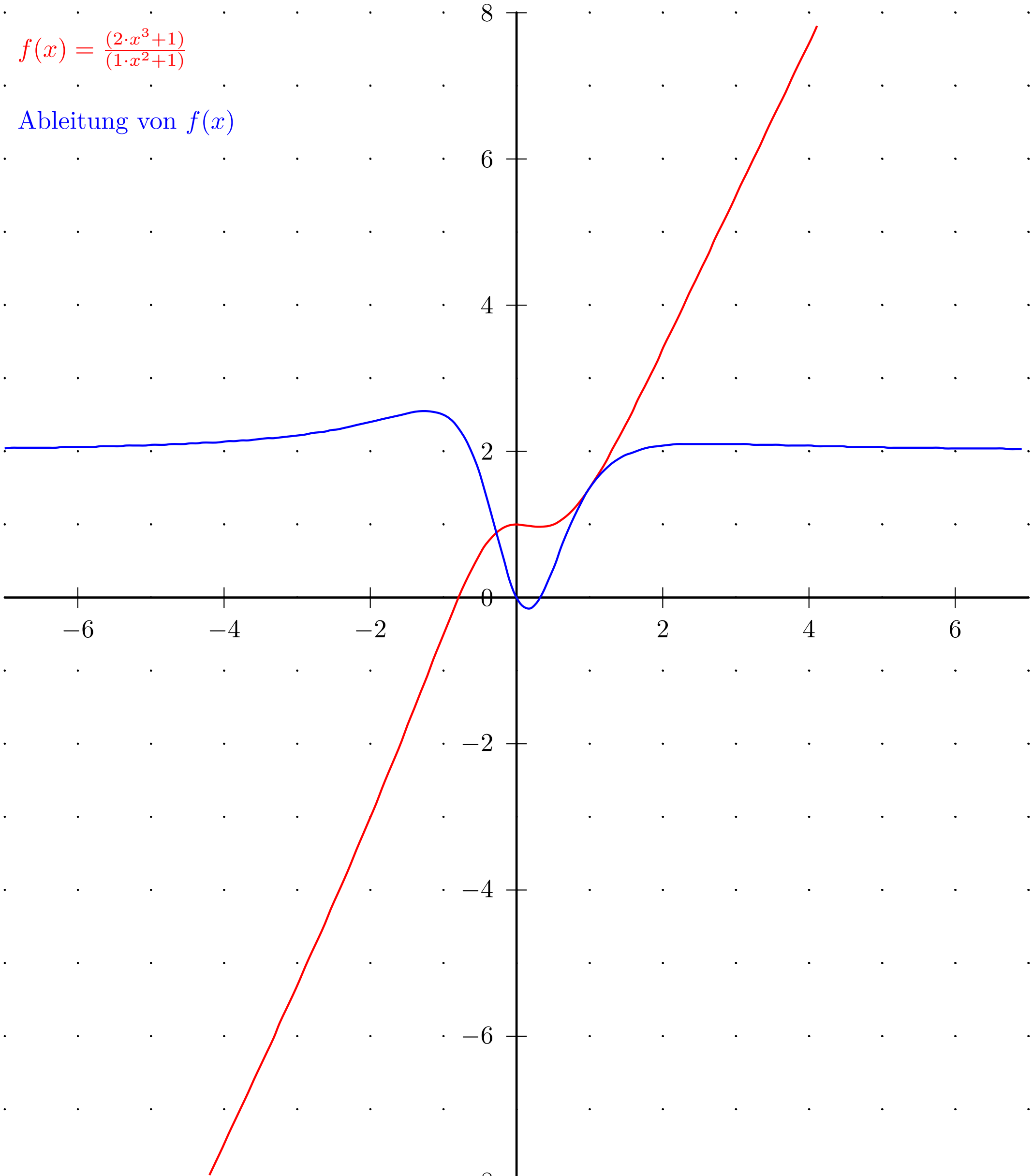
$NumerischeSuche:$
$x_7 = -1,24$; 1-fache Nullstelle
$x_8 = 0,156$; 1-fache Nullstelle
$x_9 = 2,59$; 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-1,24$	$< x <$	$0,156$	$< x <$	$2,59$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;-1,24[\quad \cup \quad]0,156;2,59[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-1,24;0,156[\quad \cup \quad]2,59;\infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-13\frac{7}{10}$	$2,04$	$0,0126$
$-6\frac{1}{2}$	$-12,7$	$2,05$	$0,0157$
-6	$-11\frac{24}{37}$	$2,06$	$0,0199$
$-5\frac{1}{2}$	$-10\frac{77}{125}$	$2,07$	$0,0255$
-5	$-9\frac{15}{26}$	$2,09$	$0,0335$
$-4\frac{1}{2}$	$-8\frac{9}{17}$	$2,11$	$0,0448$
-4	$-7\frac{8}{17}$	$2,13$	$0,0615$
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{21}{53}$	$2,17$	$0,0864$
-3	$-5\frac{3}{10}$	$2,22$	$0,124$
$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{5}{29}$	$2,29$	$0,178$
-2	-3	$2,4$	$0,24$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{10}{13}$	$2,52$	$0,204$
-1	$-\frac{1}{2}$	$2,5$	$-0,5$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$1,68$	$-3,07$
0	1	$0,000612$	-2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$0,000612$	-2
$\frac{1}{2}$	1	$0,4$	$2,56$
1	$1\frac{1}{2}$	$1,5$	$1,5$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{13}$	$1,95$	$0,466$
2	$3\frac{2}{5}$	$2,08$	$0,112$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{13}{29}$	$2,1$	$0,00788$
3	$5\frac{1}{2}$	$2,1$	$-0,02$
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{29}{53}$	$2,09$	$-0,0249$
4	$7\frac{10}{17}$	$2,08$	$-0,0232$
$4\frac{1}{2}$	$8\frac{53}{85}$	$2,07$	$-0,0199$
5	$9\frac{17}{26}$	$2,06$	$-0,0166$
$5\frac{1}{2}$	$10\frac{17}{25}$	$2,05$	$-0,0138$
6	$11\frac{26}{37}$	$2,04$	$-0,0114$
$6\frac{1}{2}$	$12,7$	$2,04$	$-0,00951$
7	$13\frac{37}{50}$	$2,03$	$-0,00797$

Aufgabe (13)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - x - 12}$
Zaehler faktorisieren:
$x^3 + x = 0$
$x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 1 = 0$
$1x^2 + 1 = 0 \qquad / - 1$
$1x^2 = -1 \qquad / : 1$
$x^2 = \dfrac{-1}{1}$
keine Lösung
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 - x - 12 = 0$

$1x^2 - x - 12 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{49}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$
$x_1 = \dfrac{1 + 7}{2} \qquad x_2 = \dfrac{1 - 7}{2}$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -3$
$\underline{x_2 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{x(x^2 + 1)}{(x + 3)(x - 4)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$
$f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - x - 12}$
Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & & +x &) : (x^2 - x - 12) = x + 1 \\
-(x^3 & -x^2 & -12x) & \\
\hline
 & x^2 & +13x & \\
 & -(x^2 & -x & -12) \\
\hline
 & & 14x & +12
\end{array}$$

$f(x) = x + 1 + \dfrac{14x + 12}{x^2 - x - 12}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 1) \cdot (x^2 - x - 12) - (x^3 + x) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x - 12)^2}$
$= \dfrac{(3x^4 - 3x^3 - 35x^2 - x - 12) - (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x)}{(x^2 - x - 12)^2}$
$= \dfrac{x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12}{(x^2 - x - 12)^2}$
$= \dfrac{x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12}{(x^2 - x - 12)^2}$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x^2 - 74x) \cdot (x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144) - (x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12) \cdot (4x^3 - 6x^2 - 46x + 24)}{(x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144)^2}$$
$$= \frac{(4x^7 - 14x^6 - 154x^5 + 382x^4 + 2,13 \cdot 10^3 x^3 - 2,64 \cdot 10^3 x^2 - 1,07 \cdot 10^4 x) - (4x^7 - 14x^6 - 182x^5 + 338x^4 + 1,61 \cdot 10^3 x^3 - 816x^2}{(x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144)^2}$$
$$= \frac{28x^5 + 44x^4 + 528x^3 - 1,82 \cdot 10^3 x^2 - 1,12 \cdot 10^4 x + 288}{(x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144)^2}$$
$$= \frac{28x^5 + 44x^4 + 528x^3 - 1,82 \cdot 10^3 x^2 - 1,12 \cdot 10^4 x + 288}{(x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144)^2}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^3 + x = 0$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-3; 0[\quad \cup \quad]4; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]0; 4[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2})} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2})} = \infty$$
Schiefe Asymptote: $y = x + 1$
$$\lim_{x\to-3^+} \frac{x(x^2+1)}{(x+3)(x-4)} = \infty$$
$$\lim_{x\to-3^-} \frac{x(x^2+1)}{(x+3)(x-4)} = -\infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$
$$\lim_{x\to4^+} \frac{x(x^2+1)}{(x+3)(x-4)} = \infty$$
$$\lim_{x\to4^-} \frac{x(x^2+1)}{(x+3)(x-4)} = -\infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 4$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12}{x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144} = 0$$
$x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12$
$NumerischeSuche:$

$\underline{x_5 = -5,2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 7,18; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-5,2) = -0,195$
$f''(-5,2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-5,2/-7,2)}$

$f''(7,18) = 0,125 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(7,18/11,7)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12}{x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144}$

Zaehler $= 0$

$x_7 = -5,2;$ 1-fache Nullstelle

$x_8 = 7,18;$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_9 = -3;$ 1-fache Nullstelle

$x_10 = 4;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-5,2$	$< x <$	-3	$< x <$	4	$< x <$	$7,18$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -5,2[\quad \cup \quad]7,18; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-5,2; -3[\quad \cup \quad]-3; 4[\quad \cup \quad]4; 7,18[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{28x^5 + 44x^4 + 528x^3 - 1,82 \cdot 10^3x^2 - 1,12 \cdot 10^4x + 288}{x^8 - 4x^7 - 42x^6 + 140x^5 + 721x^4 - 1,68 \cdot 10^3x^3 - 6,05 \cdot 10^3x^2 + 6,91 \cdot 10^3x + 2,07 \cdot 10^4}$

$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$

$x_11 = -3;$ 1-fache Nullstelle

$x_12 = 0,0256;$ 1-fache Nullstelle

$x_13 = 4;$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_14 = -3;$ 1-fache Nullstelle

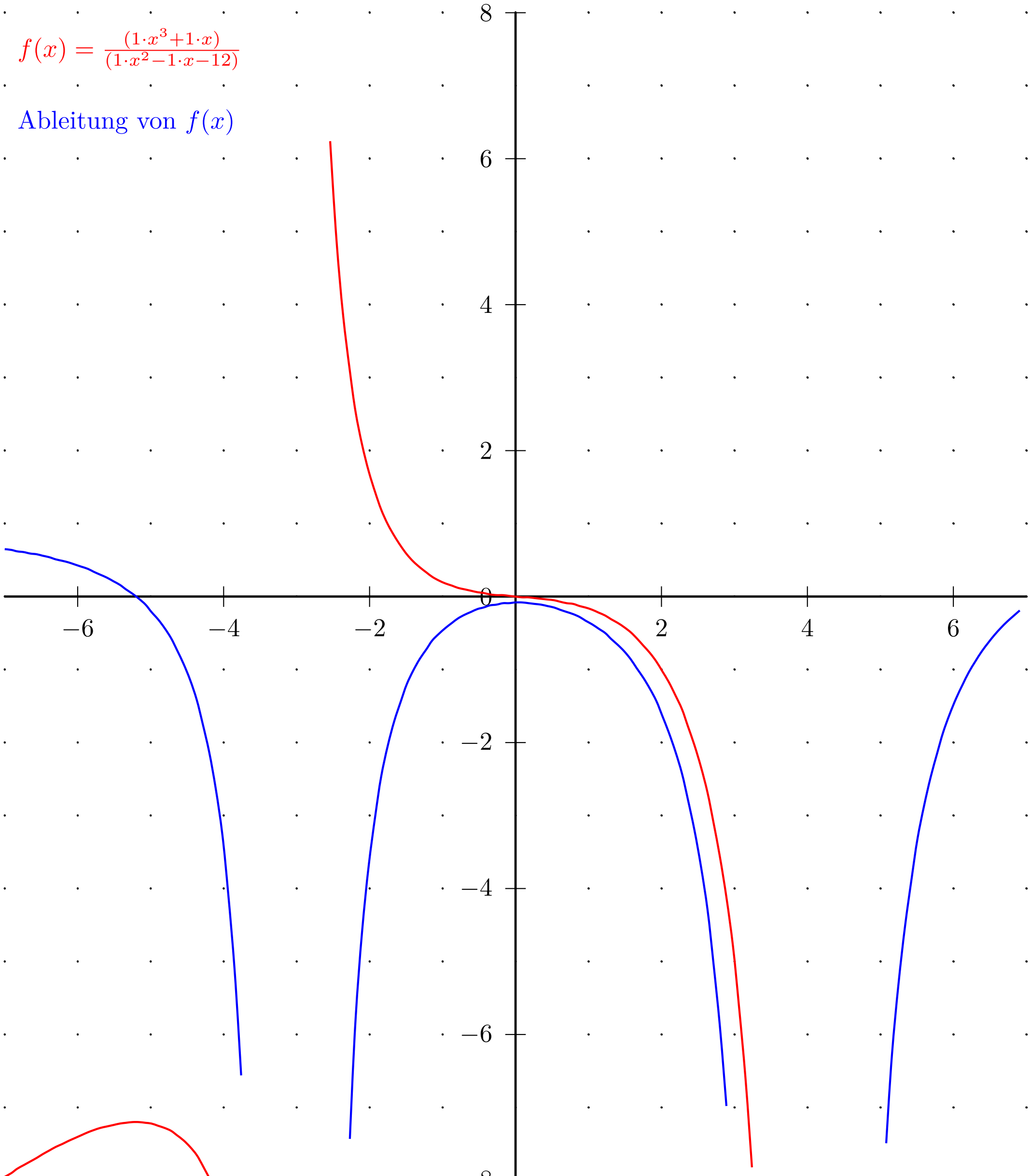
$x_15 = 4;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-3	$< x <$	-3	$< x <$	$0,0256$	$< x <$	4	$< x <$	4	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]-3; -3[\quad \cup \quad]-3; 0,0256[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0,0256; 4[\quad \cup \quad]4; 4[\quad \cup \quad]4; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-7\frac{21}{22}$	$0,652$	$-0,149$
$-6\frac{1}{2}$	$-7,65$	$0,562$	$-0,217$
-6	$-7\frac{2}{5}$	$0,427$	$-0,337$
$-5\frac{1}{2}$	$-7\frac{9}{38}$	$0,207$	$-0,571$
-5	$-7\frac{2}{9}$	$-0,191$	$-1,1$
$-4\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	$-1,04$	$-2,57$
-4	$-8\frac{1}{2}$	$-3,44$	$-8,61$
$-3\frac{1}{2}$	$-12\frac{11}{30}$	$-16,3$	$-68,7$
-3	$-\infty$	$1,4\cdot 10^4$	∞
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{15}{26}$	$-16,4$	$68,6$
-2	$1\frac{2}{3}$	$-3,56$	$8,48$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{13}{22}$	$-1,23$	$2,42$
-1	$\frac{1}{5}$	$-0,46$	$0,916$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$-0,165$	$0,335$
0	0	$-0,0834$	$0,0139$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,0834$	$0,0139$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{98}$	$-0,143$	$-0,253$
1	$-\frac{1}{6}$	$-0,347$	$-0,586$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{30}$	$-0,766$	$-1\frac{13}{87}$
2	-1	$-1,6$	$-2,36$
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{66}$	$-3,46$	$-5,71$
3	-5	$-8,84$	$-19,4$
$3\frac{1}{2}$	$-14\frac{7}{26}$	-38	-156
4	∞	$3,17\cdot 10^4$	$-\infty$
$4\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$	-38	156
5	$16\frac{1}{4}$	$-8,78$	$19,5$
$5\frac{1}{2}$	$13\frac{49}{102}$	$-3,38$	$5,77$
6	$12\frac{1}{3}$	$-1,48$	$2,44$
$6\frac{1}{2}$	$11,8$	$-0,602$	$1,25$
7	$11\frac{2}{3}$	$-0,122$	$0,728$

Aufgabe (14)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$

Zaehler faktorisieren:

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$1u^2 - 3u - 4 = 0$

$u_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$

$u_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{25}}{2}$

$u_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{2}$

$u_1 = \frac{3+5}{2} \qquad u_2 = \frac{3-5}{2}$

$u_1 = 4 \qquad u_2 = -1$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$x^2 = -1 x = \pm\sqrt{-1}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 4 = 0$

$1x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$1x^2 = 4 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x+2)(x^2+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{(x^2+1)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \int (x^2 - 1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [(-1), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1 - \frac{1}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 1$
$f(-x) = 1 \cdot x^2 - 1$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - 1 = 0$

$1x^2 - 1 = 0 \qquad / + 1$
$1x^2 = 1 \qquad / : 1$
$x^2 = \frac{1}{1}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-1; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

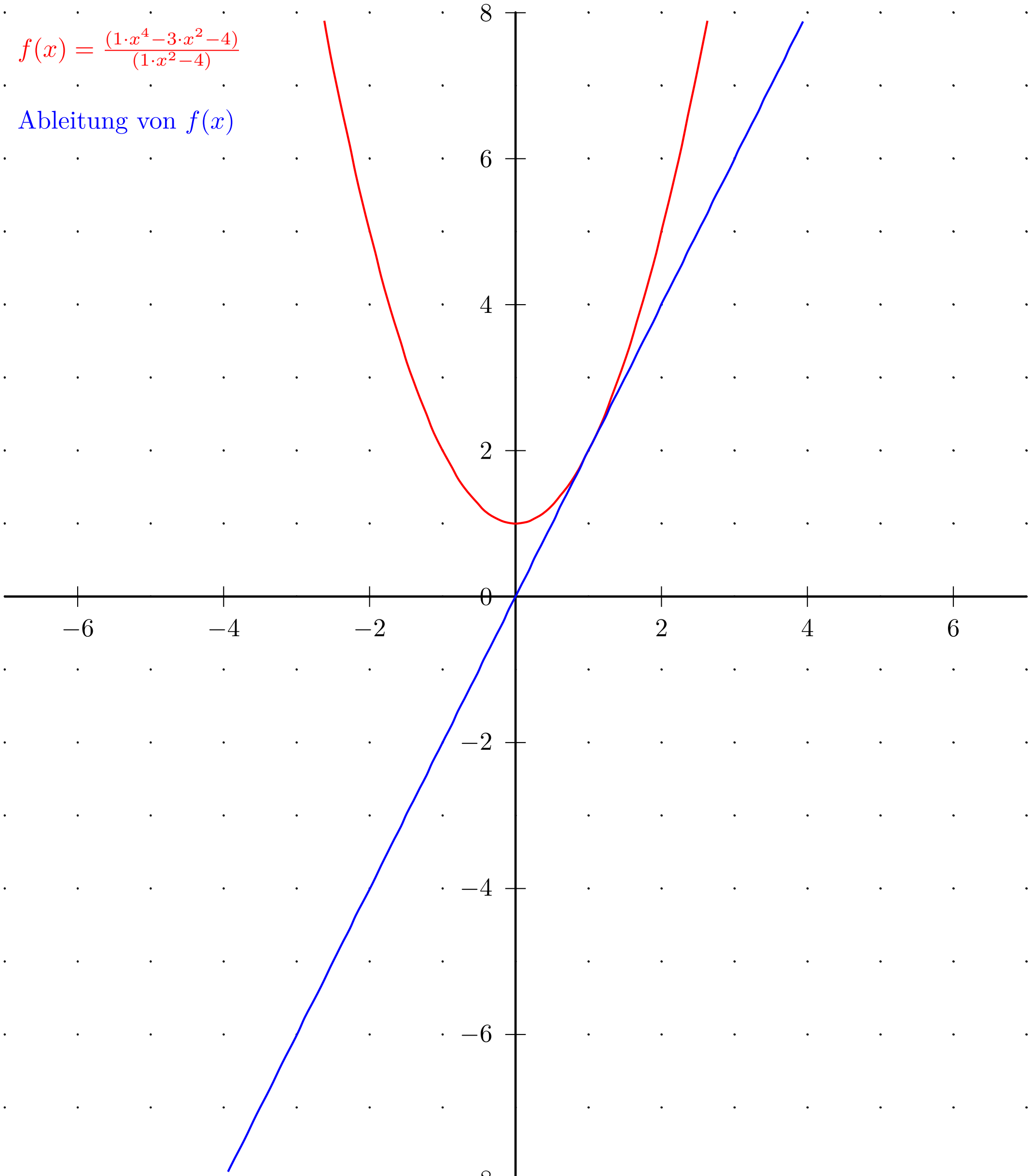
	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1}$
$= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 1 \cdot (-1)\right)$
$= \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{1}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	50	-14	2
$-6\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{4}$	-13	2
-6	37	-12	2
$-5\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	-11	2
-5	26	-10	2
$-4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	-9	2
-4	17	-8	2
$-3\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{4}$	-7	2
-3	10	-6	2
$-2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	-5	2
-2	NaN	-4	NaN
$-1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	-3	2
-1	2	-2	2
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	-1	2
0	1	0	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	2
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	1	2
1	2	2	2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	3	2
2	NaN	4	NaN
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	5	2
3	10	6	2
$3\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{4}$	7	2
4	17	8	2
$4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	9	2
5	26	10	2
$5\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	11	2
6	37	12	2
$6\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{4}$	13	2
7	50	14	2

Aufgabe (15)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$1u^2 - 5u + 4 = 0$

$u_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$u_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$u_{1/2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$u_1 = \frac{5+3}{2} \qquad u_2 = \frac{5-3}{2}$

$u_1 = 4 \qquad u_2 = 1$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$1x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$x_1 = \frac{3+1}{2} \qquad x_2 = \frac{3-1}{2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$

$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

$f'(x) = 2x + 3$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich:
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [(-\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$

$1x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$
$x_1 = \frac{-3 + 1}{2} \qquad x_2 = \frac{-3 - 1}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; -1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 3 = 0$

$2x + 3 = 0 \qquad / - 3$
$2x = -3 \qquad / : 2$
$x = \frac{-3}{2}$
$x = -1\frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1\frac{1}{2}/-\frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1\frac{1}{2};\infty[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend
$x \in]-\infty;-1\frac{1}{2}[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

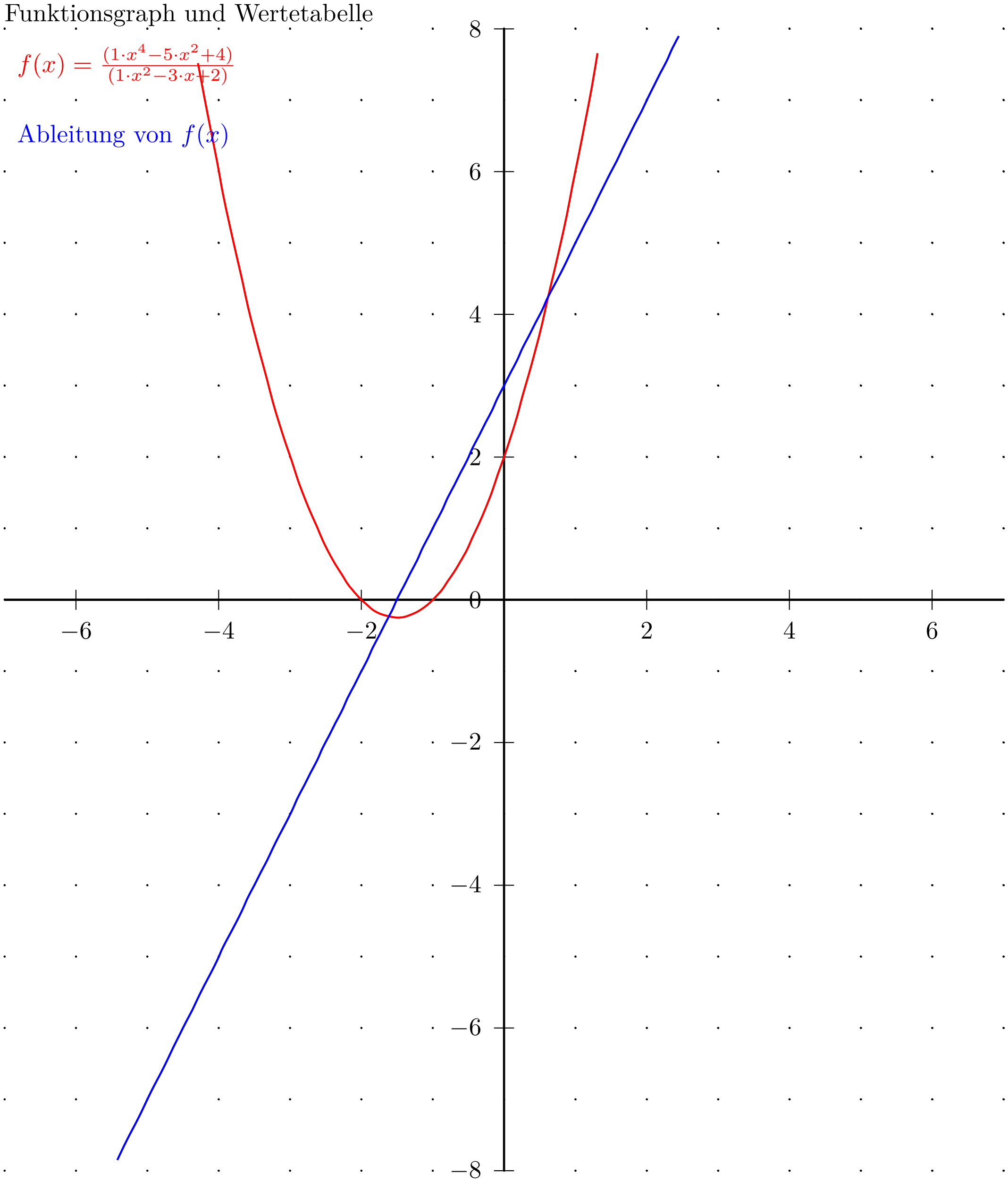
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{-1} \left(x^2 + 3x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2)\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	30	-11	2
$-6\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	-10	2
-6	20	-9	2
$-5\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	-8	2
-5	12	-7	2
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	-6	2
-4	6	-5	2
$-3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	-4	2
-3	2	-3	2
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-2	2
-2	0	-1	2
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	2
-1	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	2	2
0	2	3	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	3	2
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4	2
1	NaN	5	NaN
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	6	2
2	NaN	7	NaN
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	8	2
3	20	9	2
$3\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	10	2
4	30	11	2
$4\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{4}$	12	2
5	42	13	2
$5\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$	14	2
6	56	15	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{3}{4}$	16	2
7	72	17	2

Aufgabe (16)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{-x + 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$1x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{6 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{6 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{6 - 0}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

$\underline{x_1 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-x + 2 = 0$

$-1x + 2 = 0 \qquad / -2$

$-1x = -2 \qquad / : (-1)$

$x = \frac{-2}{-1}$

$x = 2$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x-3)^2}{-(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x - 2}$

Polynomdivision :

$$
\begin{array}{llll}
(-x^2 & +6x & -9 &) : (x-2) = -x + 4 \\
-(-x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & 4x & -9 & \\
 & -(4x & -8) & \\
\hline
 & & -1 &
\end{array}
$$

$f(x) = -x + 4 + \frac{-1}{x - 2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(-2x + 6) \cdot (x - 2) - (-x^2 + 6x - 9) \cdot 1}{(x-2)^2}$

$= \frac{(-2x^2 + 10x - 12) - (-x^2 + 6x - 9)}{(x-2)^2}$

$= \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2}$

$= \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2}$

$f''(x) = \frac{(-2x + 4) \cdot (x^2 - 4x + 4) - (-x^2 + 4x - 3) \cdot (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{(-2x^3+12x^2-24x+16)-(-2x^3+12x^2-22x+12)}{(x^2-4x+4)^2}$
$= \frac{-2x+4}{(x^2-4x+4)^2}$
$= \frac{-2x+4}{(x^2-4x+4)^2}$
$= \frac{-2(x-2)}{(x-2)^4}$
$= \frac{-2}{(x-2)^3}$
$= \frac{-2}{x^3-6x^2+12x-8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-x^2+6x-9=0$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x<$	2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	+	0	−	0	−

$\underline{\quad x \in]-\infty; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]2;3[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})}{x(-1+\frac{2}{x})} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})}{x(-1+\frac{2}{x})} = \infty$$

Schiefe Asymptote:$y = -x+4$
$\lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-3)^2}{(x-2)} = -\infty$
$\lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-3)^2}{(x-2)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-x^2+4x-3}{x^2-4x+4} = 0$

$-x^2+4x-3=0$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{2\cdot(-1)}$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2}$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$
$x_1 = \frac{-4+2}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4-2}{-2}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/4)}$
$f''(3) = -2$
$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 4}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_6 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	1	$< x <$	2	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]1; 2[\quad \cup \quad]2; 3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

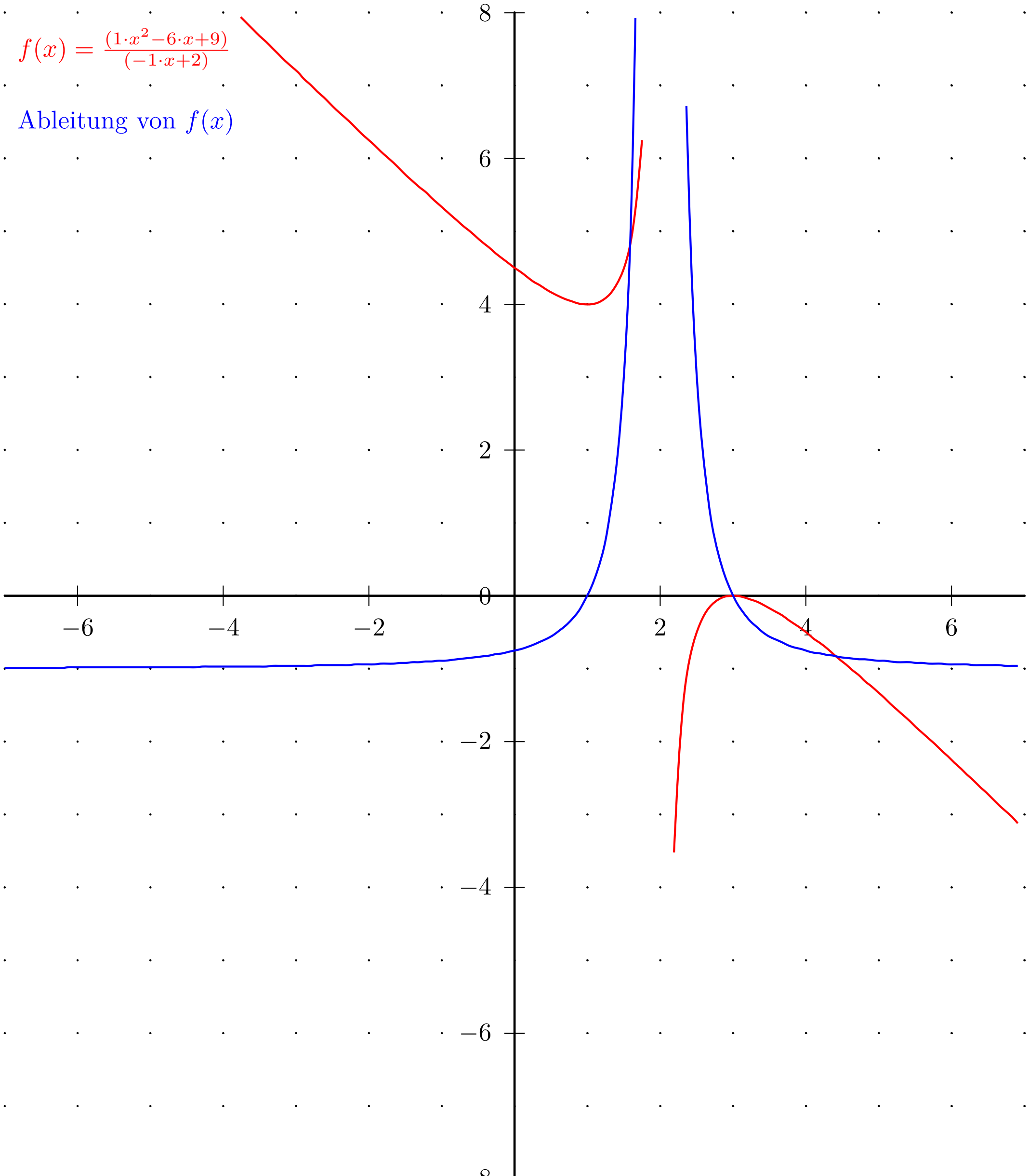
• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 2[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]2; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$11\frac{1}{9}$	$-\frac{80}{81}$	$0,00274$
$-6\frac{1}{2}$	$10\frac{21}{34}$	$-0,986$	$0,00326$
-6	$10\frac{1}{8}$	$-\frac{63}{64}$	$0,00391$
$-5\frac{1}{2}$	$9\frac{19}{30}$	$-0,982$	$0,00474$
-5	$9\frac{1}{7}$	$-\frac{48}{49}$	$0,00583$
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{17}{26}$	$-0,976$	$0,00728$
-4	$8\frac{1}{6}$	$-\frac{35}{36}$	$\frac{1}{108}$
$-3\frac{1}{2}$	$7\frac{15}{22}$	$-\frac{117}{121}$	$0,012$
-3	$7\frac{1}{5}$	$-\frac{24}{25}$	$\frac{2}{125}$
$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{13}{18}$	$-\frac{77}{81}$	$0,0219$
-2	$6\frac{1}{4}$	$-0,937$	$\frac{1}{32}$
$-1\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{14}$	$-0,918$	$0,0466$
-1	$5\frac{1}{3}$	$-0,889$	$0,0741$
$-\frac{1}{2}$	$4\frac{9}{10}$	$-0,84$	$0,128$
0	$4\frac{1}{2}$	$-0,75$	$0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$4\frac{1}{2}$	$-0,75$	$0,25$
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{6}$	$-0,555$	$0,593$
1	4	$0,000306$	2
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	3	16
2	∞	$-3266\frac{15}{49}$	$-\infty$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-16
3	0	$0,000306$	-2
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-0,555$	$-0,593$
4	$-\frac{1}{2}$	$-0,75$	$-0,25$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{10}$	$-0,84$	$-0,128$
5	$-1\frac{1}{3}$	$-0,889$	$-0,0741$
$5\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{14}$	$-0,918$	$-0,0466$
6	$-2\frac{1}{4}$	$-0,937$	$-\frac{1}{32}$
$6\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{18}$	$-\frac{77}{81}$	$-0,0219$
7	$-3\frac{1}{5}$	$-\frac{24}{25}$	$-\frac{2}{125}$

Aufgabe (17)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{3x + 6}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 + 3x + 3 = 0$

$1x^2 + 3x + 3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Diskriminante negativ keine Lösung

Nenner faktorisieren:

$3x + 6 = 0$

$3x + 6 = 0 \qquad / - 6$

$3x = -6 \qquad / : 3$

$x = \frac{-6}{3}$

$x = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x^2 + 3x + 3)}{3(x + 2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2 + x + 1}{x + 2}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(\frac{1}{3}x^2 & +x & +1 &) : (x+2) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\
-(\frac{1}{3}x^2 & +\frac{2}{3}x) & & \\
\hline
 & \frac{1}{3}x & +1 & \\
 & -(\frac{1}{3}x & +\frac{2}{3}) & \\
\hline
 & & \frac{1}{3} &
\end{array}$$

$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{x + 2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(\frac{2}{3}x + 1) \cdot (x + 2) - (\frac{1}{3}x^2 + x + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2}$

$= \frac{(\frac{2}{3}x^2 + 2\frac{1}{3}x + 2) - (\frac{1}{3}x^2 + x + 1)}{(x + 2)^2}$

$= \frac{\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1}{(x + 2)^2}$

$= \frac{\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1}{(x + 2)^2}$

$f''(x) = \frac{(\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}) \cdot (x^2 + 4x + 4) - (\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1) \cdot (2x + 4)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \frac{(\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x + 5\frac{1}{3}) - (\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 7\frac{1}{3}x + 4)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \frac{4,44 \cdot 10^{-16}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \frac{4,44 \cdot 10^{-16}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}{(x^2+4x+4)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$\frac{1}{3}x^2 + x + 1 = 0$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-2[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})}{x(3+\frac{6}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})}{x(3+\frac{6}{x})} = \infty$

Schiefe Asymptote:$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{\frac{1}{3}(x^2+3x+3)}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{\frac{1}{3}(x^2+3x+3)}{(x+2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1}{x^2+4x+4} = 0$

$\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-1\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(1\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{1}{3}}$

$x_{1/2} = \frac{-1\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}}{\frac{2}{3}}$

$x_{1/2} = \frac{-1\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x_1 = \frac{-1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \frac{-1\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -3$

$x_2 = -3; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_3 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f''(-3) = -\frac{2}{3}$

$f''(-3) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-3/-1)$

$f''(-1) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1/\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1}{x^2 + 4x + 4}$

Zaehler $= 0$

$\underline{x_4 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_6 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-3; -2[\quad \cup \quad]-2; -1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{4,44 \cdot 10^{-16}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}$

$Zaehler = 0$

$4,44 \cdot 10^{-16}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3} = 0$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot 4,44 \cdot 10^{-16} \cdot 1\frac{1}{3}}}{2 \cdot 4,44 \cdot 10^{-16}}$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}}{8,88 \cdot 10^{-16}}$

$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}}{8,88 \cdot 10^{-16}}$

$x_1 = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{8,88 \cdot 10^{-16}} \qquad x_2 = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{8,88 \cdot 10^{-16}}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1,5 \cdot 10^{15}$

$\underline{x_7 = -1,5 \cdot 10^{15}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

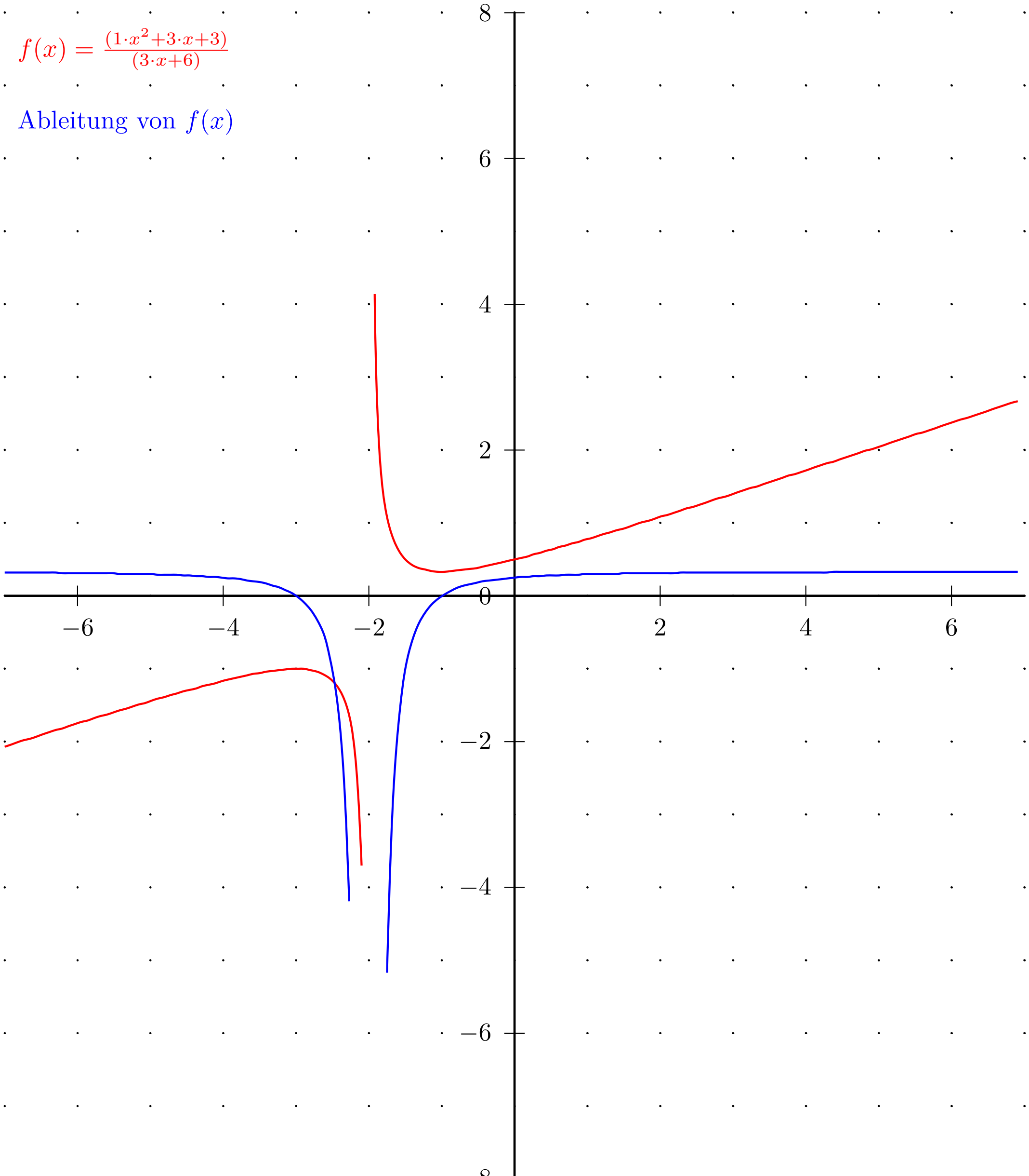
$\underline{x_9 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-1,5 \cdot 10^{15}$	$< x <$	-2	$< x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1,5 \cdot 10^{15}[\quad \cup \quad]-1,5 \cdot 10^{15}; -2[\quad \cup \quad]-2; -2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2\frac{1}{15}$	$\frac{8}{25}$	$-0,00533$
$-6\frac{1}{2}$	$-1\frac{49}{54}$	$0,317$	$-0,00732$
-6	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{96}$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{25}{42}$	$\frac{15}{49}$	$-0,0155$
-5	$-1\frac{4}{9}$	$0,296$	$-\frac{2}{81}$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{10}$	$0,28$	$-0,0427$
-4	$-1\frac{1}{6}$	$0,25$	$-0,0833$
$-3\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{18}$	$0,185$	$-0,198$
-3	-1	$-0,000102$	$-0,667$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{6}$	-1	$-5,34$
-2	∞	$1,09 \cdot 10^3$	$-\infty$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$5,34$
-1	$\frac{1}{3}$	$-0,000102$	$0,667$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$0,185$	$0,198$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,0833$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,0833$
$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{30}$	$0,28$	$0,0427$
1	$\frac{7}{9}$	$0,296$	$\frac{2}{81}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{15}{49}$	$0,0155$
2	$1\frac{1}{12}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{96}$
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{13}{54}$	$0,317$	$0,00732$
3	$1\frac{2}{5}$	$\frac{8}{25}$	$0,00533$
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{37}{66}$	$\frac{39}{121}$	$0,00401$
4	$1\frac{13}{18}$	$\frac{35}{108}$	$0,00309$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{23}{26}$	$0,325$	$0,00243$
5	$2\frac{1}{21}$	$\frac{16}{49}$	$0,00194$
$5\frac{1}{2}$	$2\frac{19}{90}$	$0,327$	$0,00158$
6	$2\frac{3}{8}$	$\frac{21}{64}$	$0,0013$
$6\frac{1}{2}$	$2\frac{55}{102}$	$0,329$	$0,00109$
7	$2\frac{19}{27}$	$0,329$	$0,000914$

Aufgabe (18)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
& 4x^2 & & -4 \\
& -(4x^2 & -4x) & \\
\hline
& & 4x & -4 \\
& & -(4x & -4) \\
\hline
& & & 0
\end{array}$$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{-4 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 0}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{(x+2)^2(x-1)}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x^2) = x + 3 \\
-(x^3) & & & \\
\hline
& 3x^2 & & -4 \\
& -(3x^2) & & \\
\hline
& & -4 &
\end{array}$$

$f(x) = x + 3 + \frac{-4}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x) \cdot x^2 - (x^3 + 3x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{(3x^4 + 6x^3) - (2x^4 + 6x^3 - 8x)}{(x^2)^2}$

$= \frac{x^4 + 8x}{(x^2)^2}$
$= \frac{x^4 + 8x}{(x^2)^2}$
$= \frac{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)x}{x^4}$
$= \frac{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)}{x^3}$
$= \frac{x^3 + 8}{x^3}$
$f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 + 8) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{3x^5 - (3x^5 + 24x^2)}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{x^6}$
$= \frac{-24}{x^4}$
$= \frac{-24}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$\underline{x_4 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 0[\quad \cup \quad]0; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3})}{x^2(1)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3})}{x^2(1)} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = x + 3$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(x + 2)^2(x - 1)}{x^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(x + 2)^2(x - 1)}{x^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{x^3+8}{x^3} = 0$

$x^3 + 8 = 0$
$1x^3 + 8 = 0 \quad / - 8$
$1x^3 = -8 \quad / : 1$
$x^3 = \frac{-8}{1}$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$
Polynomdivision:(-2)

$$\begin{array}{cccccl}
(x^3 & & & +8 &) : (x+2) = x^2 - 2x + 4 \\
-(x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
& -2x^2 & & +8 & \\
& -(-2x^2 & -4x) & & \\
\hline
& & 4x & +8 & \\
& & -(4x & +8) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 - 2x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{-12}}{2}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_6 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = -1\frac{1}{2}$
$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{x^3+8}{x^3}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_7 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_8 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

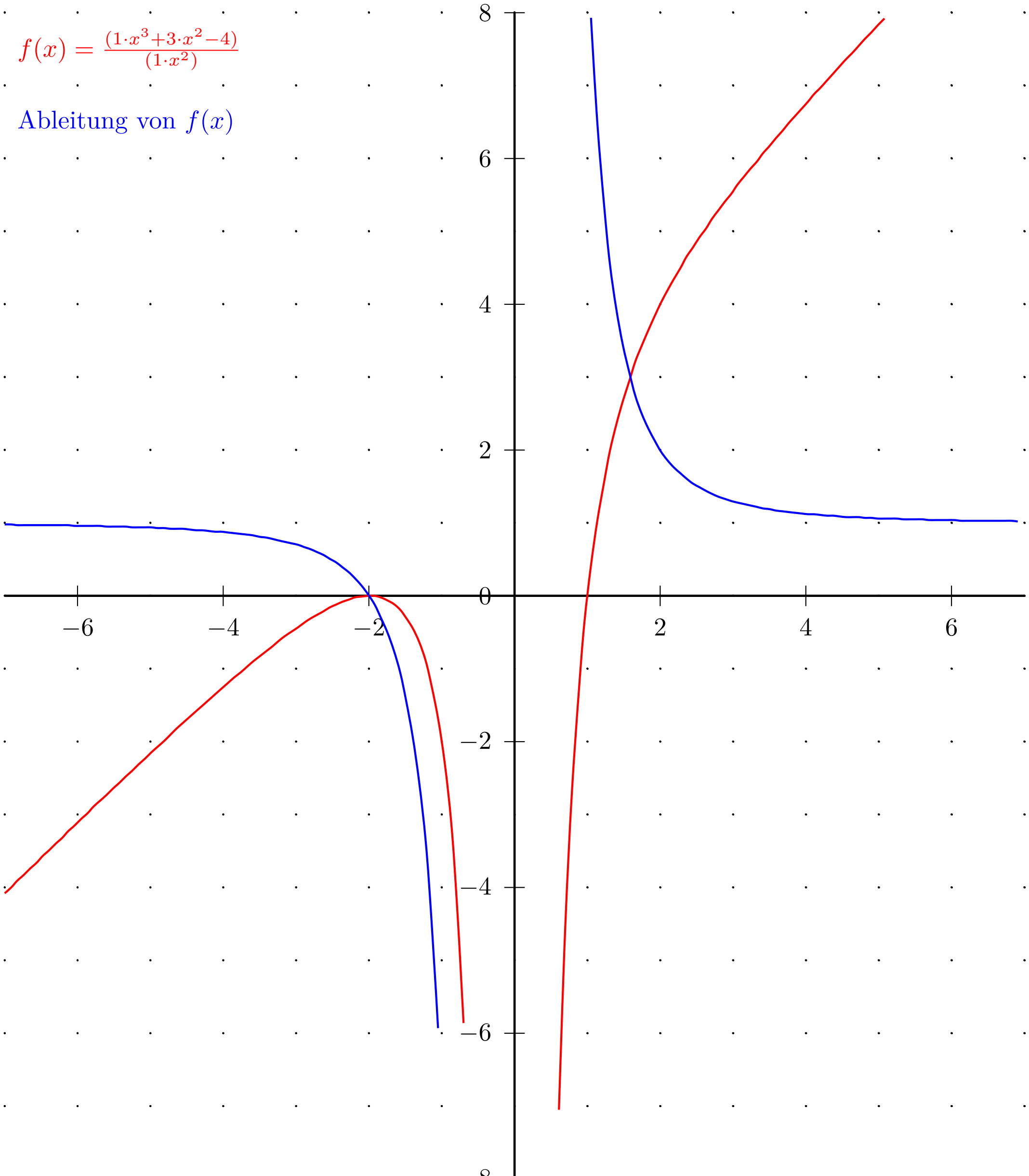
$\underline{x \in]-2; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-24}{x^4}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{4}{49}$	$0,977$	$-0,01$
$-6\frac{1}{2}$	$-3,59$	$0,971$	$-0,0134$
-6	$-3\frac{1}{9}$	$\frac{26}{27}$	$-\frac{1}{54}$
$-5\frac{1}{2}$	$-2,63$	$0,952$	$-0,0262$
-5	$-2\frac{4}{25}$	$0,936$	$-0,0384$
$-4\frac{1}{2}$	$-1,7$	$0,912$	$-0,0585$
-4	$-1\frac{1}{4}$	$0,875$	$-0,0938$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{81}{98}$	$0,813$	$-0,16$
-3	$-\frac{4}{9}$	$0,704$	$-0,296$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{50}$	$0,488$	$-0,614$
-2	0	$-0,000153$	$-1,5$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{18}$	$-1,37$	$-4,74$
-1	-2	-7	-24
$-\frac{1}{2}$	$-13\frac{1}{2}$	$-63,2$	-385
0	$-\infty$	1	∞

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\infty$	1	∞
$\frac{1}{2}$	$-12\frac{1}{2}$	$65,2$	-385
1	0	9	-24
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{18}$	$3,37$	$-4,74$
2	4	2	$-1,5$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{43}{50}$	$1,51$	$-0,614$
3	$5\frac{5}{9}$	$1,3$	$-0,296$
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{17}{98}$	$1,19$	$-0,16$
4	$6\frac{3}{4}$	$1,13$	$-0,0938$
$4\frac{1}{2}$	$7,3$	$1,09$	$-0,0585$
5	$7\frac{21}{25}$	$1,06$	$-0,0384$
$5\frac{1}{2}$	$8,37$	$1,05$	$-0,0262$
6	$8\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{54}$
$6\frac{1}{2}$	$9,41$	$1,03$	$-0,0134$
7	$9\frac{45}{49}$	$1,02$	$-0,01$

Aufgabe (19)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{-x^{3}+3x^{2}-4}{-\frac{1}{2}x^{2}-3x-4\frac{1}{2}}$

Zaehler faktorisieren:

$-\,x^{3}+3x^{2}-4=0$

$-\,x^{3}+3x^{2}-4=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: $-\,1$

$$
\begin{array}{llll}
(-x^{3} & +3x^{2} & & -4 \quad) : (x+1) = -x^{2}+4x-4 \\
-(-x^{3} & -x^{2}) & & \\
\hline
 & 4x^{2} & & -4 \\
 & -(4x^{2} & +4x) & \\
\hline
 & & -4x & -4 \\
 & & -(-4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$-\,x^{2}+4x-4=0$

$x_{1/2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^{2}-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}$

$x_{1/2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{-2}$

$x_{1/2}=\dfrac{-4\pm0}{-2}$

$x_{1}=\dfrac{-4+0}{-2}\qquad x_{2}=\dfrac{-4-0}{-2}$

$x_{1}=2\qquad x_{2}=2$

$\underline{x_{1}=-1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_{2}=2;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-\,\dfrac{1}{2}x^{2}-3x-4\dfrac{1}{2}=0$

$-\,\dfrac{1}{2}x^{2}-3x-4\dfrac{1}{2}=0$

$x_{1/2}=\dfrac{+3\pm\sqrt{\left(-3\right)^{2}-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{2}\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$x_{1/2}=\dfrac{+3\pm\sqrt{0}}{-1}$

$x_{1/2}=\dfrac{3\pm0}{-1}$

$x_{1}=\dfrac{3+0}{-1}\qquad x_{2}=\dfrac{3-0}{-1}$

$x_{1}=-3\qquad x_{2}=-3$

$\underline{x_{3}=-3;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{-(x+1)(x-2)^{2}}{-\frac{1}{2}(x+3)^{2}}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{2x^{3}-6x^{2}+8}{x^{2}+6x+9}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll}
(2x^3 & -6x^2 & & +8 \quad) : (x^2+6x+9) = 2x-18 \\
-(2x^3 & +12x^2 & +18x) & \\
\hline
 & -18x^2 & -18x & +8 \\
 & -(-18x^2 & -108x & -162) \\
\hline
 & & 90x & +170
\end{array}$$

$f(x) = 2x - 18 + \dfrac{90x+170}{x^2+6x+9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(6x^2-12x)\cdot(x^2+6x+9)-(2x^3-6x^2+8)\cdot(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{(6x^4+24x^3-18x^2-108x)-(4x^4-36x^2+16x+48)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x^4+24x^3+18x^2-124x-48}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x^4+24x^3+18x^2-124x-48}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2(x+10,6)(x+3)(x+0,377)(x-2)}{(x+3)^4}$

$= \dfrac{2(x+10,6)(x+0,377)(x-2)}{(x+3)^3}$

$= \dfrac{2x^3+18x^2-36x-16}{x^3+9x^2+27x+27}$

$f''(x) = \dfrac{(6x^2+36x-36)\cdot(x^3+9x^2+27x+27)-(2x^3+18x^2-36x-16)\cdot(3x^2+18x+27)}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{(6x^5+90x^4+450x^3+810x^2-972)-(6x^5+90x^4+270x^3-210x^2-1,26\cdot10^3x-432)}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{180x^3+1,02\cdot10^3x^2+1,26\cdot10^3x-540}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{180x^3+1,02\cdot10^3x^2+1,26\cdot10^3x-540}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$2x^3 - 6x^2 + 8 = 0$

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-1;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-3;-1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}-\frac{4\frac{1}{2}}{x^2})} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}-\frac{4\frac{1}{2}}{x^2})} = \infty$$

Schiefe Asymptote:$y = 2x - 18$

$\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{2(x+1)(x-2)^2}{(x+3)^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{2(x+1)(x-2)^2}{(x+3)^2} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{2x^3 + 18x^2 - 36x - 16}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27} = 0$

$2x^3 + 18x^2 - 36x - 16 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:2

$$
\begin{array}{lllll}
(2x^3 & +18x^2 & -36x & -16 &) : (x-2) = 2x^2 + 22x + 8 \\
-(2x^3 & -4x^2) & & & \\
\hline
 & 22x^2 & -36x & -16 & \\
 & -(22x^2 & -44x) & & \\
\hline
 & & 8x & -16 & \\
 & & -(8x & -16) & \\
\hline
 & & & -7,11 \cdot 10^{-15} &
\end{array}
$$

$2x^2 + 22x + 8 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$

$x_{1/2} = \frac{-22 \pm \sqrt{420}}{4}$

$x_{1/2} = \frac{-22 \pm 20,5}{4}$

$x_1 = \frac{-22 + 20,5}{4} \qquad x_2 = \frac{-22 - 20,5}{4}$

$x_1 = -0,377 \qquad x_2 = -10,6$

$\underline{x_6 = -10,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_7 = -0,377; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-10,6) = 0,515 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-10,6/-52,8)}$

$f''(-0,377) = -2,67$

$f''(-0,377) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,377/1,02)}$

$f''(2) = 0,388 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{2x^3 + 18x^2 - 36x - 16}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$

Zaehler = 0

$\underline{x_9 = -10,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_10 = -0,377; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_11 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_12 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-10,6$	$< x <$	-3	$< x <$	$-0,377$	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -10,6[\quad \cup \quad]-3; -0,377[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$x \in]-10,6;-3[\quad \cup \quad]-0,377;2[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{180x^3 + 1,02 \cdot 10^3 x^2 + 1,26 \cdot 10^3 x - 540}{x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1,22 \cdot 10^3 x^2 + 1,46 \cdot 10^3 x + 729}$$

$Zaehler = 0$

$180x^3 + 1,02 \cdot 10^3 x^2 + 1,26 \cdot 10^3 x - 540 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -3

$$\begin{array}{llllll}
(180x^3 & +1,02 \cdot 10^3 x^2 & +1,26 \cdot 10^3 x & -540 &) : (x+3) = 180x^2 + 480x - 180 \\
-(180x^3 & +540x^2) & & & \\
\hline
 & 480x^2 & +1,26 \cdot 10^3 x & -540 & \\
 & -(480x^2 & +1,44 \cdot 10^3 x) & & \\
\hline
 & & -180x & -540 & \\
 & & -(-180x & -540) & \\
\hline
 & & & 2,27 \cdot 10^{-13} &
\end{array}$$

$180x^2 + 480x - 180 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-480 \pm \sqrt{480^2 - 4 \cdot 180 \cdot (-180)}}{2 \cdot 180}$

$x_{1/2} = \frac{-480 \pm \sqrt{3,6 \cdot 10^5}}{360}$

$x_{1/2} = \frac{-480 \pm 600}{360}$

$x_1 = \frac{-480 + 600}{360} \qquad x_2 = \frac{-480 - 600}{360}$

$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -3$

$x_13 = -3; \quad$ 2-fache Nullstelle

$x_14 = \frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

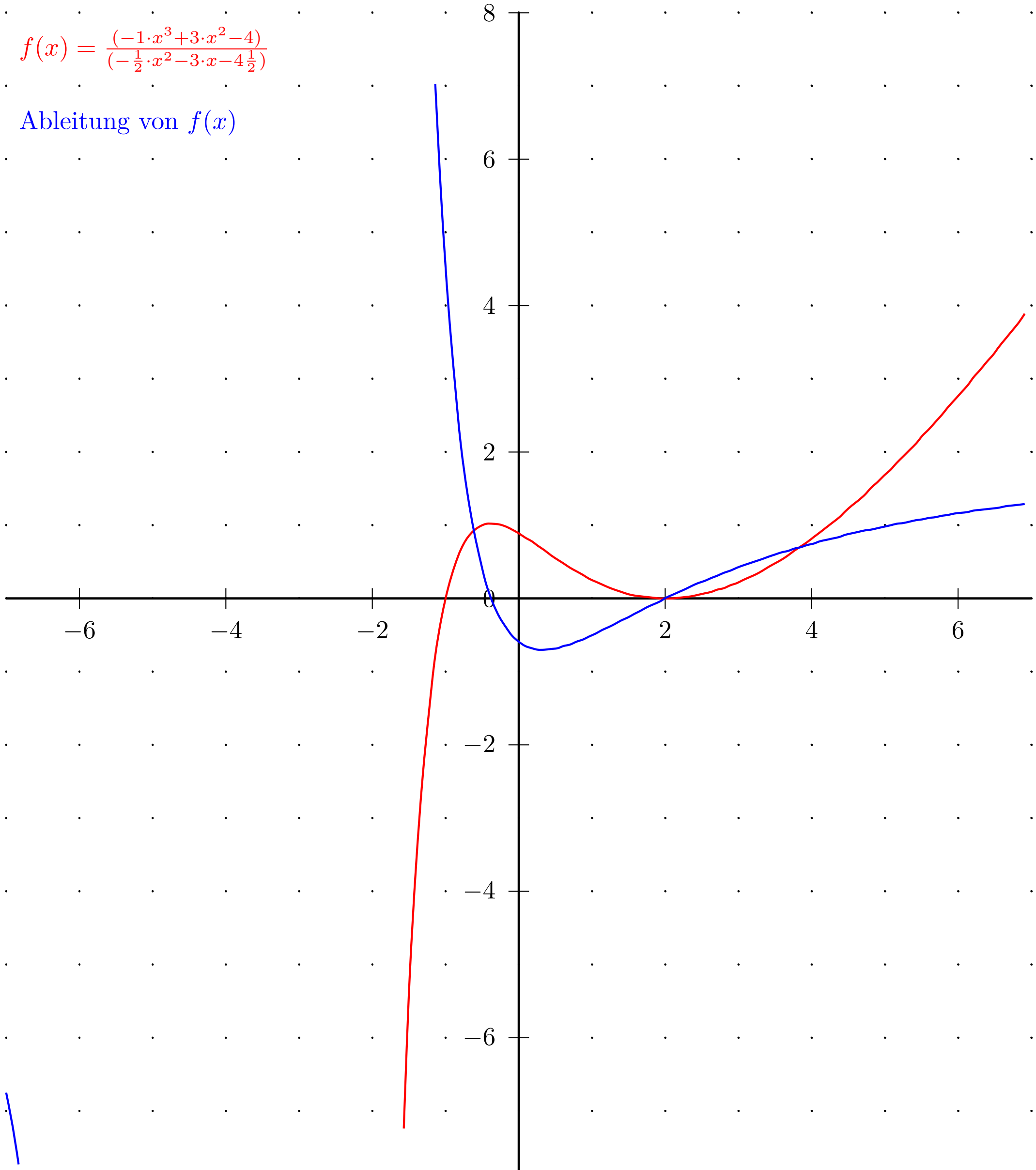
$x_15 = -3; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-3	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]\frac{1}{3};\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-3;\frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-60\frac{3}{4}$	$-6,75$	$-5,16$
$-6\frac{1}{2}$	$-64\frac{43}{49}$	-10	$-8,2$
-6	$-71\frac{1}{9}$	$-15,4$	$-14,1$
$-5\frac{1}{2}$	-81	$-25,2$	$-26\frac{97}{110}$
-5	-98	$-45,5$	-60
$-4\frac{1}{2}$	$-131\frac{4}{9}$	$-97,3$	-172
-4	-216	-288	-780
$-3\frac{1}{2}$	-605	$-1,96\cdot 10^3$	$-1,11\cdot 10^4$
-3	∞	$293879\frac{27}{49}$	$-\infty$
$-2\frac{1}{2}$	-243	$1,25\cdot 10^3$	$-8,18\cdot 10^3$
-2	-32	112	-420
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{4}{9}$	$21,3$	$-65,2$
-1	0	$4,5$	-15
$-\frac{1}{2}$	1	$0,401$	$-3,84$
0	$\frac{8}{9}$	$-0,592$	$-0,741$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{8}{9}$	$-0,592$	$-0,741$
$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{49}$	$-0,682$	$0,2$
1	$\frac{1}{4}$	$-0,5$	$0,469$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{81}$	$-0,25$	$0,512$
2	0	$-4,9\cdot 10^{-6}$	$0,48$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{7}{121}$	$\frac{27}{119}$	$0,426$
3	$\frac{2}{9}$	$0,426$	$\frac{10}{27}$
$3\frac{1}{2}$	$0,479$	$0,598$	$0,319$
4	$\frac{40}{49}$	$0,746$	$0,275$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{9}$	$0,874$	$0,237$
5	$1\frac{11}{16}$	$0,984$	$0,205$
$5\frac{1}{2}$	$2,2$	$1,08$	$0,178$
6	$2\frac{62}{81}$	$1,16$	$0,155$
$6\frac{1}{2}$	$3,37$	$1,24$	$0,136$
7	4	$1,3$	$\frac{3}{25}$

Aufgabe (20)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x^2 + 7x - 12}{x - 3}$

Zaehler faktorisieren:

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$\begin{array}{llllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
& -x^2 & +7x & -12 & \\
& -(-x^2 & +3x) & & \\
\hline
& & 4x & -12 & \\
& & -(4x & -12) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$3x^2 - x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$\underline{x_1 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 3 = 0$

$x - 3 = 0 \qquad / + 3$

$x = 3$

$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})(x-3)}{(x-3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = 3x^2 - x + 4$

$f'(x) = 6x - 1$

$f''(x) = 6$

$F(x) = \int (3x^2 - x + 4)dx = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [3\dfrac{11}{12}, \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(3 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2})$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) + 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 3x^2 - x + 4 = 0$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x - 1 = 0$

$6x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$6x = 1 \qquad / : 6$
$x = \frac{1}{6}$
$x = \frac{1}{6}$
$x_1 = \frac{1}{6}$; 1-fache Nullstelle
$f''(\frac{1}{6}) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{6}/3\frac{11}{12})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

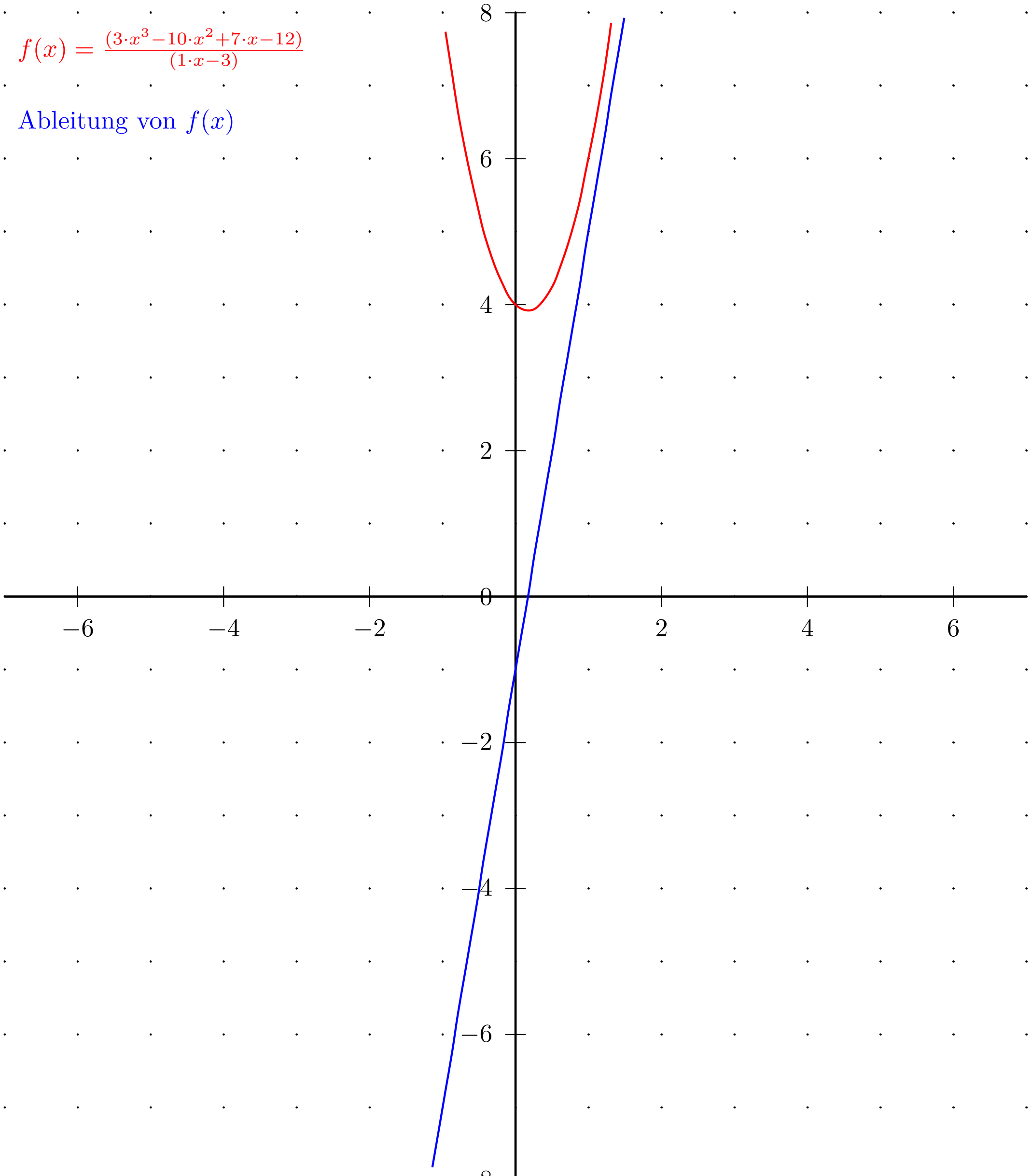
	$x <$	$\frac{1}{6}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{1}{6}; \infty[$ $\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; \frac{1}{6}[$ $\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	158	-43	6
$-6\frac{1}{2}$	$137\frac{1}{4}$	-40	6
-6	118	-37	6
$-5\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{4}$	-34	6
-5	84	-31	6
$-4\frac{1}{2}$	$69\frac{1}{4}$	-28	6
-4	56	-25	6
$-3\frac{1}{2}$	$44\frac{1}{4}$	-22	6
-3	34	-19	6
$-2\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{4}$	-16	6
-2	18	-13	6
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	-10	6
-1	8	-7	6
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-4	6
0	4	-1	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	-1	6
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	2	6
1	6	5	6
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	8	6
2	14	11	6
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	14	6
3	NaN	17	NaN
$3\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{4}$	20	6
4	48	23	6
$4\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{4}$	26	6
5	74	29	6
$5\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{4}$	32	6
6	106	35	6
$6\frac{1}{2}$	$124\frac{1}{4}$	38	6
7	144	41	6

Aufgabe (21)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2}$
Zaehler faktorisieren:
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & -6x^2 & +11x & -6 &) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\ \hline
 & -5x^2 & +11x & -6 & \\
 & -(-5x^2 & +5x) & & \\ \hline
 & & 6x & -6 & \\
 & & -(6x & -6) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 - 5x + 6 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2}$
$x_1 = \frac{5 + 1}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - 1}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$
$x = 2$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$
$f'(x) = 2x - 4$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + c$

• Definitions- und Wertebereich:
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [(-1), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$

$1x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{4 \pm 2}{2}$
$x_1 = \frac{4 + 2}{2} \qquad x_2 = \frac{4 - 2}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$
$\underline{x_1 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]1; 3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x - 4 = 0$

$2x - 4 = 0 \qquad / + 4$
$2x = 4 \qquad / : 2$
$x = \frac{4}{2}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/-1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

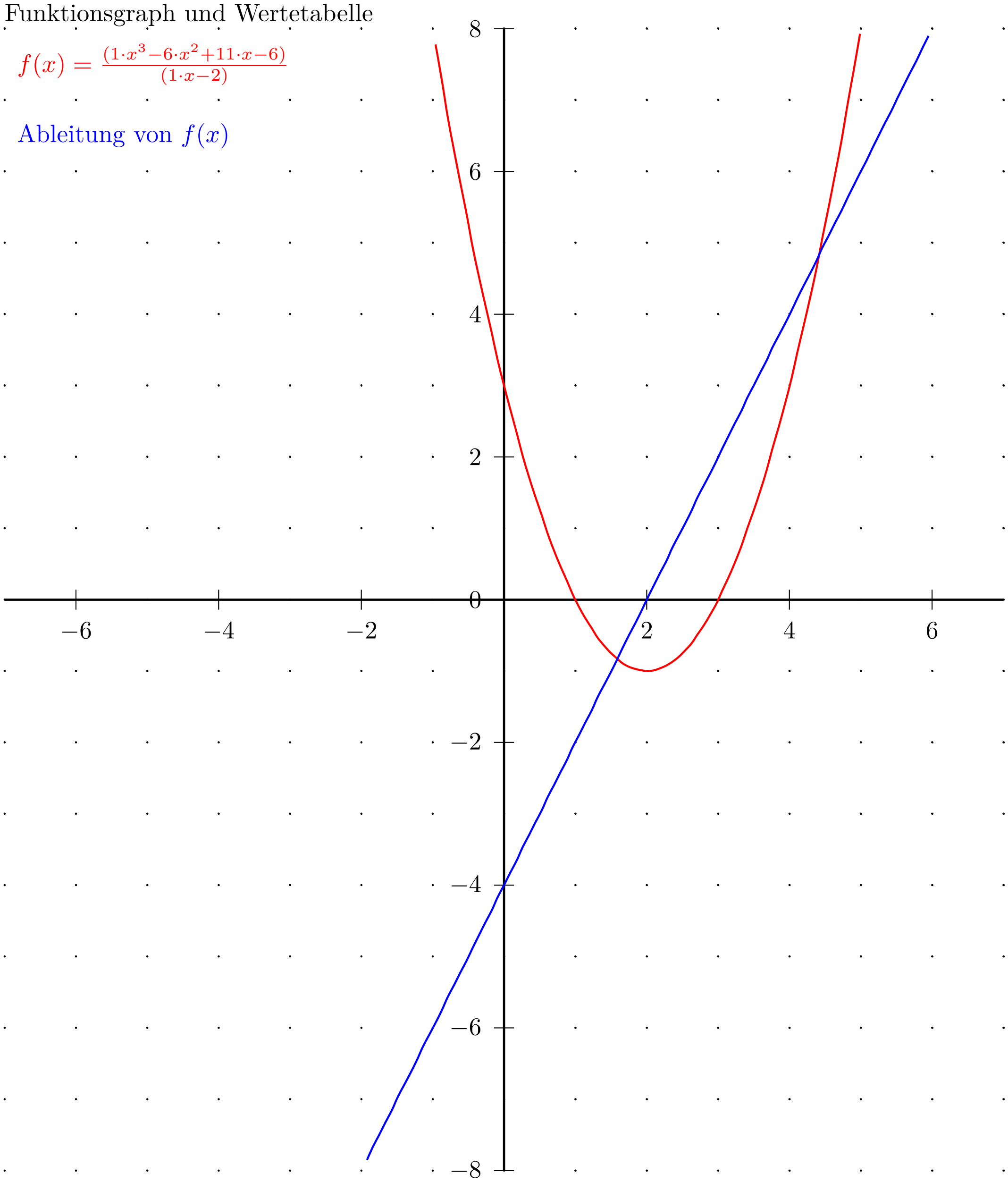
$\underline{\quad x \in]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$
$= \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right)$

$= \left(-8,88 \cdot 10^{-15}\right) - \left(1\frac{1}{3}\right) = -1\frac{1}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	80	-18	2
$-6\frac{1}{2}$	$71\frac{1}{4}$	-17	2
-6	63	-16	2
$-5\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{4}$	-15	2
-5	48	-14	2
$-4\frac{1}{2}$	$41\frac{1}{4}$	-13	2
-4	35	-12	2
$-3\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{4}$	-11	2
-3	24	-10	2
$-2\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	-9	2
-2	15	-8	2
$-1\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	-7	2
-1	8	-6	2
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-5	2
0	3	-4	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	3	-4	2
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	-3	2
1	0	-2	2
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	2
2	NaN	$-2,9\cdot 10^{-12}$	NaN
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
3	0	2	2
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	3	2
4	3	4	2
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	5	2
5	8	6	2
$5\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	7	2
6	15	8	2
$6\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	9	2
7	24	10	2

Aufgabe (22)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & -2x^2 & -5x & +6 \quad) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & -x^2 & -5x & +6 \\
 & -(-x^2 & +x) & \\
\hline
 & & -6x & +6 \\
 & & -(-6x & +6) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$1x^2 - x - 6 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$x_1 = \dfrac{1+5}{2} \qquad x_2 = \dfrac{1-5}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 1 = 0$

$x - 1 = 0 \qquad / + 1$

$x = 1$

$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

$f'(x) = 2x - 1$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \displaystyle\int (x^2 - x - 6)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + c$

• Definitions- und Wertebereich:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [(-6\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) - 6$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - x - 6 = 0$

$1x^2 - x - 6 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{25}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{1 \pm 5}{2}$
$x_1 = \frac{1+5}{2} \qquad x_2 = \frac{1-5}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; 3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x - 1 = 0$

$2x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$2x = 1 \qquad / : 2$
$x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\frac{1}{2} / -6\frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

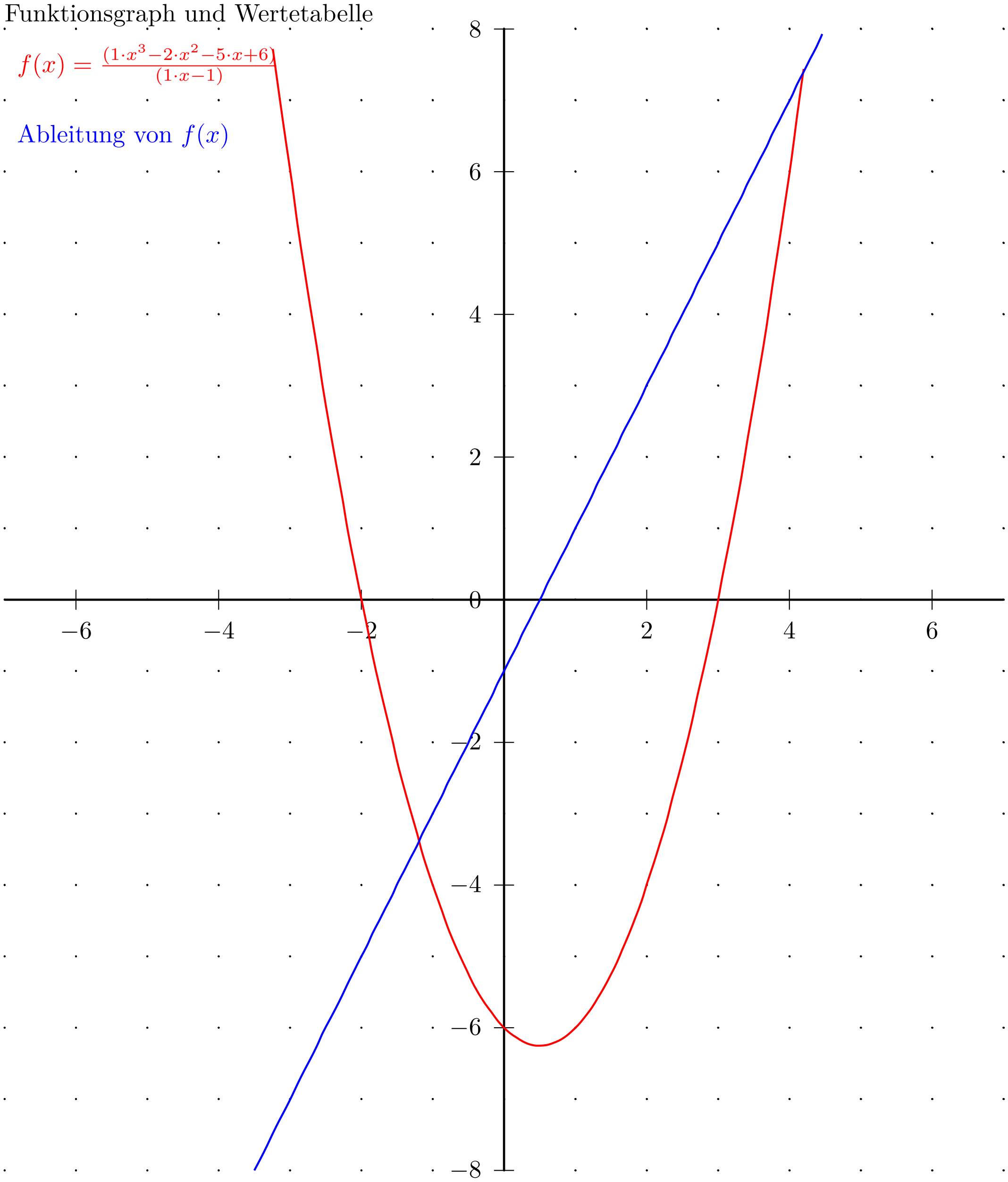
$\underline{x \in]\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{3} \left(x^2 - x - 6\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(-13\frac{1}{2}\right) - \left(7\frac{1}{3}\right) = -20\frac{5}{6}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	50	-15	2
$-6\frac{1}{2}$	$42\frac{3}{4}$	-14	2
-6	36	-13	2
$-5\frac{1}{2}$	$29\frac{3}{4}$	-12	2
-5	24	-11	2
$-4\frac{1}{2}$	$18\frac{3}{4}$	-10	2
-4	14	-9	2
$-3\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4}$	-8	2
-3	6	-7	2
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	-6	2
-2	0	-5	2
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	-4	2
-1	-4	-3	2
$-\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	-2	2
0	-6	-1	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-6	-1	2
$\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$	0	2
1	NaN	1	NaN
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	2	2
2	-4	3	2
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	4	2
3	0	5	2
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	6	2
4	6	7	2
$4\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4}$	8	2
5	14	9	2
$5\frac{1}{2}$	$18\frac{3}{4}$	10	2
6	24	11	2
$6\frac{1}{2}$	$29\frac{3}{4}$	12	2
7	36	13	2